

## CHUYÊN ĐỀ

# TÍCH PHÂN

### A. LÝ THUYẾT CẦN NẮM

#### I - NGUYÊN HÀM

##### 1 - Tính chất của nguyên hàm:

- 1)  $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- 2)  $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0)$
- 3)  $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- 4)  $\int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$

##### 2 - Bảng các nguyên hàm thường gặp

| <i>Nguyên hàm<br/>các hàm số sơ cấp</i>                                       | <i>Hàm số hợp tương ứng<br/>(dưới đây <math>u = u(x)</math>)</i>              |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $\int dx = x + C$                                                             | $\int du = u + C$                                                             |
| $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C \quad (x \neq 0)$                           | $\int \frac{1}{u} du = \ln u  + C \quad (u \neq 0)$                           |
| $\int e^x dx = e^x + C$                                                       | $\int e^u du = e^u + C$                                                       |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$                    | $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$                    |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                                                 | $\int \cos u du = \sin u + C$                                                 |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                                                | $\int \sin u du = -\cos u + C$                                                |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$                                     | $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$                                     |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$                                    | $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$                                    |

**Hệ quả:**

| <i>Nguyên hàm<br/>các hàm số sơ cấp</i>                                                                   | <i>Nguyên hàm<br/>các hàm số sơ cấp</i>                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$              |
| $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + C$                                                      | $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$             |
| $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$                                                             | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$  |
| $\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$                                         | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ |

**II – TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH****1 – Định nghĩa:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(Trong đó  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ )

**2 – Tính chất của tích phân xác định**

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(4) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$(6) f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$(7) f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)$$

$$(8) m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

## B. CÁC DẠNG TOÁN

### Chủ điểm 1

## PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

### Vấn đề 1: Dùng phép biến đổi sơ cấp và công thức vi phân

**Bài 1: Tính các tích phân bất định sau:**

$$1) \int \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^2} dx$$

$$2) \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^3 dx$$

$$3) \int \frac{\ln^{2010} x}{x} dx$$

$$4) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$5) \int \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x}} dx$$

$$6) \int \frac{1}{(x^2 + 3x + 2)^2} dx$$

$$7) \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$$

$$8) \int \frac{4x^5 - 3x^4 - 1}{x^4} dx$$

$$9) \int \left( x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$$

$$10) \int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})^3 dx$$

$$11) \int (\sqrt[3]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 2) dx$$

$$12) \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$$

$$13) \int \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)^4 dx$$

$$14) \int \frac{x^2 + 4x}{x} dx$$

$$15) \int (ax^3 + b)^2 dx$$

$$16) \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$$

$$17) \int x(x+a)(x+b) dx$$

$$18) \int 2^x e^x dx$$

$$19) \int (2^x - e^x)^2 dx$$

$$20) \int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2} dx$$

$$21) \int \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} dx$$

$$22) \int \frac{e^{2-5x} + 1}{e^x} dx$$

$$23) \int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$24) \int \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

$$25) \int \frac{4\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$26) \int \frac{1}{e^{2009x} + 2010} dx$$

**Bài 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:**

$$1. f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$$

$$2. f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$$

$$3. f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \ln x + \frac{1}{x} + C$$

$$4. f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C$$

$$5. f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$$

$$6. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$$

$$7. f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln x + C$$

$$8. f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$9. f(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = x - \sin x + C$$

$$10. f(x) = \tan^2 x$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \tan x - x + C$$

$$11. f(x) = \cos^2 x$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$12. f(x) = (\tan x - \cot x)^2$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \tan x - \cot x - 4x + C$$

$$13. f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \tan x - \cot x + C$$

$$14. f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = -\cot x - \tan x + C$$

$$15. f(x) = \sin 3x$$

$$\text{ĐS. } F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

$$16. f(x) = 2\sin 3x \cos 2x$$

$$\text{ĐS. } F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x + C$$

$$17. f(x) = e^x(e^x - 1)$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + C$$

$$18. f(x) = e^x(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})$$

$$\text{ĐS. } F(x) = 2e^x + \tan x + C$$

$$19. f(x) = 2a^x + 3^x$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{2a^x}{\ln a} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$20. f(x) = e^{3x+1}$$

$$\text{ĐS. } F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$$

### Bài 3: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

$$1. f'(x) = 2x + 1 \text{ và } f(1) = 5$$

$$\text{ĐS. } f(x) = x^2 + x + 3$$

$$2. f'(x) = 2 - x^2 \text{ và } f(2) = 7/3 \quad \text{ĐS. } f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + 1$$

$$3. f'(x) = 4\sqrt{x} - x \text{ và } f(4) = 0 \quad \text{ĐS. } f(x) = \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3}$$

$$4. f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } f(1) = 2 \quad \text{ĐS. } f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2x - \frac{3}{2}$$

$$5. f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2 \text{ và } f(-1) = 3 \quad \text{ĐS. } f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$$

$$6. f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}, f'(1)=0, f(1)=4, f(-1)=2 \quad \text{ĐS. } f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$$

#### Bài 4: Tính các tích phân bất định sau:

$$1. \int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$$

$$2. \int 2^x \cdot 3^{x+1} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

$$4. \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}$$

#### Bài 5: Tính các tích phân sau:

$$1. \int \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$$

$$2. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$3. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$4. \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$5. \int \cot^2 x dx$$

$$6. \int \tan^3 x dx$$

$$7. \int \frac{\cot x}{1 + \sin^9 x} dx$$

$$8. \int \cos^3 x dx$$

$$9. \int \sin^4 x dx$$

$$10. \int \tan^5 x dx$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$$

$$12. \int \frac{\ln(ex)}{1 + x \ln x} dx$$

$$13. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$15. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx$$

$$16. \int \frac{dx}{\cos x \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

$$17. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})} \quad (ds: 2 \cdot \ln \frac{3}{2})$$

ĐS (TPXD): 13.  $(\frac{4}{3})$  14.  $(\frac{4}{3})$  15.  $(-\frac{1}{8\sqrt[3]{3}})$

### Bài 6: Tính các tích phân bất định sau:

1.  $\int \left( \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

2.  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} dx$

3.  $\int \frac{dx}{x^3 + x^5}$

4.  $\int \frac{dx}{x^3 - x}$

5.  $\int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx$

6.  $\int \frac{(3x+1)}{(x+1)^3} dx$

7.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}}$

8.  $\int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$

9.  $\int (4x^2 - 4x + 1)^5 dx$

10.  $\int (2x+3)\sqrt{2x+1} dx$

11.  $\int \frac{dx}{3-2x}$

12.  $\int \frac{3x+1}{2x-3} dx$

13.  $\int \frac{2x^2 - 7x + 7}{x-2} dx$

14.  $\int \frac{4x-7}{2x^2 - 7x + 7} dx$

15.  $\int \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} dx$

16.  $\int \frac{dx}{x(x^n + a)^m}$

17.  $\int \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$

18.  $\int \frac{dx}{e^{2x} + 3}$

### Vấn đề 2: Phương pháp đổi biến số

#### A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.

#### B. Bài tập tự luyện:

#### Bài 1: Tính các tích phân sau:

1)  $\int (5x-1)dx$

2)  $\int \frac{dx}{(3-2x)^5}$

3)  $\int \sqrt{5-2x} dx$

4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

5)  $\int (2x^2 + 1)^7 x dx$

6)  $\int (x^3 + 5)^4 x^2 dx$

7)  $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$

8)  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

9)  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5 + 2x^3}} dx$

10)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$

11)  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

12)  $\int x \cdot e^{x^2+1} dx$

13)  $\int \sin^4 x \cos x dx$

14)  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

15)  $\int_0^{\ln 2} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx$

16)  $\int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$

17)  $\int \frac{dx}{\sin x}$

18)  $\int \frac{dx}{\cos x}$

19)  $\int \tan x dx$

20)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

21)  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}}$

22)  $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

23)  $\int \sqrt{1 - x^2} \cdot dx$

24)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

25)  $\int x^2 \sqrt{1 - x^2} \cdot dx$

26)  $\int \frac{dx}{1 + x^2}$

27)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

28)  $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

29)  $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$

30)  $\int x \sqrt{x - 1} \cdot dx$

31)  $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

32)  $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} \cdot dx$

33)  $\int 2x \sqrt{x^2 + 1} dx$

34)  $\int x \sqrt{1 - x^2} dx$

35)  $\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$

36)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

37)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

38)  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$

39)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$

40)  $\int \frac{(6x - 5) dx}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$

41)  $\int \sin^3 x \cos x dx$

42)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

43)  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

44)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}$

45)  $\int e^x \sin(e^x) dx$

46)  $\int \frac{(2x - 3) dx}{x^2 - 3x + 8}$

47)  $\int \frac{x dx}{1 + x^2}$

48)  $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

$$\begin{array}{llll}
49) \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} & 50) \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + a^2} & 51) \int \tan x dx & 52) \int \cot x dx \\
53) \int \tan 3x dx & 54) \int \cot(2x + 1) dx & 55) \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx & 56) \int \frac{dx}{x \ln x} \\
57) \int \frac{(\ln x)^m}{x} dx & 58) \int e^{\sin x} \cos x dx & 59) \int e^{x^2} x dx & 60) \int e^{-x^3} x^2 dx \\
61) \int (3x + 1)^4 dx & 62) \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 2} dx & 63) \int \frac{dx}{x \ln x} & 64) \int \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx \\
65) \int x \sqrt{x + 1} dx & 66) \int (e^x + 1)^3 dx & 67) \int \frac{x}{1 + x^2} dx & 68) \int \frac{x + 4}{x^2 - 2x + 1} dx \\
69) \int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} dx & 70) \int \frac{x^7}{(x^4 + 1)^2} dx & 71) \int \frac{xdx}{(x + 1)^3} & 72) \int x \sqrt{x^2 + 1} dx \\
73) \int \cos^4 x dx & 74) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} & 75) \int x \sqrt{2x - 1} dx & 76) \int \frac{x^3 dx}{(x^4 - 4)^2} \\
77) \int \tan^3 x dx & 78) \int (2x^3 + 1)^3 x^2 dx & 79) \int \sin^5 x \cos x dx & 80) \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx \\
81) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx & 82) \int \frac{1}{1 - x^2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} dx & 83) \int x^3 \sqrt[3]{1 + x^2} dx & 84) \int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}
\end{array}$$

**Bài 2: Tính các tích phân sau:**

$$1) I = \int (2x - 3) \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 5} dx \quad 2) J = \int \frac{dx}{x \ln x} \quad 3) T = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$4) K = \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx \quad 5) L = \int \frac{x^3 - x}{x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 1} dx \quad 6) \int \frac{1}{1 + 8^x} dx \quad 7) \int_{-1}^1 \frac{x^4}{1 + 2^x} dx$$

**HD và ĐS:** 3) Đặt  $x = \tan t \Rightarrow T = \ln(\sqrt{2} + 1)$

4) Giả sử  $x \neq 0$ , chia tử và mẫu cho  $x^2$

$$\text{Sau đó đặt } u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \text{ĐS: } K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C$$

5) Giả sử  $x \neq 0$ , chia tử và mẫu cho  $x^3$ , Sau đó đặt  $u = x + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \text{ĐS: } K = \frac{1}{2} \ln \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} + C$$

$$\text{Câu 6; 7: Đặt } t = -x; \text{ câu 7: ĐS: } 1/5; \text{ câu 6: ĐS: } -\frac{1}{\ln 8} \ln \frac{8^x}{1 + 8^x} + C$$

### Vấn đề 3: Phương pháp tích phân từng phần

**A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.**

**B. Bài tập tự luyện: Tính các tích phân sau:**

**Bài 1:**

$$1) \int_0^1 (x^2 + 2x) \cdot e^x dx \quad 2) \int_1^e (1 + x) \cdot \ln x dx \quad 3) \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$\text{HD-ĐS: } 1) e \quad 2) \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4} \quad 3) \text{ Đặt } u = \ln^2 x, dv = dx: \text{ĐS: } e - 2$$

**Bài 2:**

$$1) \int_0^1 (1 + x)^2 \cdot e^{2x} dx \quad (\text{Đặt } u = (1 + x)^2, dv = e^{2x} dx) \quad 2) \int_1^e x \cdot \ln^2 x dx$$

$$3) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx \quad (\text{Đặt } u = \ln x, dv = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot dx) \quad 4) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$5) \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx \quad (\text{Đặt } u = \sqrt{x^2+1}, dv = dx) \quad *6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x dx$$

$$7) \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx \quad (\text{Đặt } u = x, dv = \sin x \cdot \cos^2 x dx) \quad 8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos^2 x dx$$

$$9) \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx \quad (\text{Đặt } u = \cos(\ln x), dv = dx) \quad 10) \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx \quad \text{ĐS: } e^2 \quad 12) \int_0^1 \frac{(x^2+1)}{(x+1)^2} e^x dx \quad \text{ĐS: } 1$$

**HD & ĐS:**

$$1) \frac{5e^2 - 1}{4} \quad 2) \frac{e^2 - 1}{4} \quad 3) 0 \quad 4) \frac{1}{2}(1 - \ln 2) \quad 5) \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

$$*6) \text{ Đặt } u = \frac{1}{\cos x}, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, \text{ ĐS: } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \quad 7) \frac{\pi}{3} \quad 8) \frac{1}{5}(2e^{\frac{\pi}{2}} - 3)$$

$$9) -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) \quad 10) \text{ Đặt } u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), dv = x^2 dx, \text{ ĐS: } 3\ln 3 - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{1}{6}$$

**Vấn đề 4: Tích phân của hàm phân thức hữu tỉ****A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.**

- Nắm các dạng cơ bản:  $\frac{b_0}{b_1}, \frac{b_0}{b_k}, \frac{b_0}{b_2}, \frac{b_1}{b_2}$ .

- **Dạng tổng quát:**  $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$

**B. Bài tập tự luyện: Tính các tích phân sau:**

$$1) I = \int \frac{4x+3}{2x+1} dx$$

$$2) I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 1}$$

$$3) I = \int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$4) I = \int \frac{x^2 + 4x + 2}{(x+1)^3} dx$$

$$5) I = \int \frac{x^5}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$6) I = \int \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} dx$$

$$7) I = \int_0^1 \frac{5x-13}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$8) I = \int_1^e \frac{2x-5}{x^3 - 3x^2 + 4} dx$$

$$9) I = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$10) I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$$

$$11) I = \int_0^2 \frac{3x^3}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$12) I = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2 - 7x + 12} dx$$

$$13) I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$14) \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$$

**HD & ĐS:** 1)  $I = 2x + \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$       2)  $I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}} \right| + C$

$$3) \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \Rightarrow A = -\frac{3}{2}, B = \frac{5}{3}, C = -\frac{1}{6}$$

$$4) I = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \Rightarrow A = 1, B = 2, C = -1$$

$$5) I = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow B = D = 0, C = -1, A = 4$$

$$\text{ĐS: } \frac{x^2}{2} - 2\ln(x^2+2) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$6) I = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow A = 3, B = 2, C = 1$$

$$7) -\ln 18 \quad 8) \frac{1}{3(x-2)} + \frac{7}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C \quad 9) 3\ln 4 - \frac{9}{4}$$

$$10) \frac{\pi}{3} \quad 11) -8 + \frac{9}{2} \ln 9 \quad 12) 1 + 25 \ln 2 - 16 \ln 3 \quad 13) \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

## Vấn đề 5: Tích phân hàm vô tỉ

### A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.

- Nắm một số dạng tiêu biểu sau:

$$\begin{aligned} 1) & \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx \\ 2) & \int_{\alpha}^{\beta} f(x^k, \sqrt[n]{ax^k+b}) \cdot x^{k-1} dx \\ 3) & \int_{\alpha}^{\beta} f(\sqrt[m]{ax^k+b}, \sqrt[n]{ax^k+b}) \cdot x^{k-1} dx \\ 4) & \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 \pm x^2} dx \\ 5) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dots}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} dx \\ 6) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dots}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \\ 7) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx \\ 8) & \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + k} dx \\ 9) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \\ 11) & \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \\ 12) & \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x+a)(x+b)} dx \\ 13) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} dx \\ 14) & \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx, a>0 \\ 15) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \\ 16) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{p(x)+a} \pm \sqrt{p(x)+b}} \\ 17) & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{p(x) \pm \sqrt{[p(x)]^2 + b}} \end{aligned}$$

### B. Bài tập tự luyện:

**Tính các tích phân sau đây:****Bài 1:**

1)  $\int \sqrt[3]{(2x+3)^2} dx$

2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^3}}$

3)  $\int (x+2)\sqrt{2x+3} dx$

4)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

5)  $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

6)  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

7)  $\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{1+x^2} dx$

8)  $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

9)  $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$

10)  $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$

11)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

12)  $\int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}} dx$

13)  $\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

14)  $\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

15)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

16)  $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

17)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

18)  $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$

19)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

20)  $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

21)  $\int_0^1 \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} dx$

**HD & ĐS:****(Chú ý:** Ngoài căn, trong căn cùng bậc 2 thì nên dùng hàm lượng giác)

4)  $2(1 - \ln 2)$

5)  $\frac{46}{15}$

6)  $\frac{2}{15}$

7)  $14,2$

8)  $\frac{141}{20}$

10)  $\sqrt{3} - \sqrt{5} + \ln \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{5}-1)}$

11)  $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$

12)  $\frac{106}{15}$

13)  $\frac{8}{15}$

14)  $\frac{\pi}{12}$

15)  $\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2} - 1)$

**Bài 2:** 1)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$

2)  $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1} dx$

3)  $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$  ( $\pi$ )

**Bài 3:** 1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}$  2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

**Bài 4:** 1)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x})}$  2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

**HD – ĐS: Bài 2:** 1) **ĐS:**  $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$  Với  $x = \sin t$

2) **ĐS:**  $\sqrt{2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{u} \right] + C$  Với  $u = \cos t, x+1 = \sqrt{2} \tan t$

**Bài 3:** 1) **ĐS:**  $3 \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right] + C$  Với  $t = \sqrt[6]{2x+1}$

2) **ĐS:**  $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2 \ln |\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C$

**Bài 4:** 1) **ĐS:**  $-12 \left[ \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right] + C$  Với  $t = \sqrt[12]{x}$

2) **ĐS:**  $6 \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t + \ln |t+1| \right] + C$  Với  $t = \sqrt[6]{x}$

## Vấn đề 6: Tích phân các hàm số lượng giác

### A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.

- **Đổi biến trong tích phân hàm lượng giác.**

- **Nắm một số dạng tiêu biểu sau:**

1)  $\int (\sin, \cos, \dots)^n dx$

2)  $\int (\tan, \cot, \dots)^n dx$

3)  $\int \frac{1}{(\sin, \cos, \dots)^n} dx$

4)  $\int \text{tích}(\sin, \cos) dx$

5)  $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

6)  $\int \frac{a \sin x + b \cos x + c}{m \sin x + p \cos x + q} dx$

7)  $\int \frac{dx}{\sin(ax + \alpha) \cdot \sin(ax + \beta)}$

8)  $\int \frac{dx}{\sin(ax + \alpha) \cdot \cos(ax + \beta)}$

9)  $\int \frac{dx}{\cos(ax + \alpha) \cdot \cos(ax + \beta)}$

10)  $\int \tan(ax + \alpha) \cdot \tan(ax + \beta) dx$

$$11) \int \tan(ax + \alpha) \cdot \cot(ax + \beta) dx$$

$$12) \int \cot(ax + \alpha) \cdot \cot(ax + \beta) dx$$

$$13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha x / \cos^\alpha x}{\sin^\alpha x + \cos^\alpha x} dx$$

$$14) I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

## B. Bài tập tự luyện: Tính các tích phân

$$\begin{aligned} \text{Bài 1: } I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx \quad \left(\frac{8}{15}\right) \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} \quad I_3 = \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} \\ I_4 &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx \quad I_5 = \int \cos^4 x \, dx \quad I_6 = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx \\ I_7 &= \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx \quad I_8 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^2 x} \quad I_9 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x} \\ I_{10} &= \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos x} \quad I_{11} = \int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} \quad I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x \, dx \quad \left(\frac{3\pi}{16}\right) \\ I_{13} &= \int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x} \quad I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} \, dx \quad I_{15} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} \, dx \end{aligned}$$

$$\text{Bài 2: } I_1 = \int \sin 2x \cdot \cos 5x \, dx$$

$$I_2 = \int \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \, dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\text{Bài 3: } I_1 = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sin x + m} \quad (m \leq 1) \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{Bài 4: } I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx \quad (\rightarrow 1) \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (\rightarrow 0)$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \cos^2 2x \, dx \quad (\rightarrow \frac{\pi}{8})$$

**Bài 5:**  $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin x + \cos x)^4 dx$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$$

**Vấn đề 7: Tích phân các hàm trị tuyệt đối**  $\int_a^b |f(x)| dx$

**A. Phương pháp: Bài giảng trên lớp.**

**B. Bài tập tự luyện:**

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{4x^2 - 4x + 1} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{1}{2})$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx \quad (\text{ĐS: } 2\sqrt{2})$$

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin 2x| dx \quad (\text{ĐS: } 1)$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx \quad (\text{ĐS: } 2\sqrt{2})$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{4}{3})$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \quad (\text{ĐS: } 4\sqrt{2})$$

## Chủ điểm 2

## ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

**Vấn đề 1: Tính diện tích hình phẳng**

**A. Phương pháp**

∇. Diện tích hình thang cong S giới hạn bởi các đường:

$x = a$  ;  $x = b$  ( $a < b$ ) ;  $y = f(x)$  và  $y = g(x) = 0$  (trục hoành) được cho bởi công thức sau:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

**∇. Tổng quát:** Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường:  $x = a$  ;  $x = b$  ( $a < b$ ) ;  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  được cho bởi công thức sau:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$$

**Chú ý:** • Công thức (2) trở thành công thức (1) nếu  $g(x) = 0$ .

• Tính các tích phân (1), (2): Dùng pp ở vấn đề tính tích phân hàm chứa giá trị tuyệt đối hay dùng đồ thị để phá trị tuyệt đối.

• **Dùng (1):** Nếu (S) giới hạn bởi (C):  $y = f(x)$  và trục Ox thì (C) phải cắt Ox tại hai điểm có hoành độ là a, b  $\Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx$ .

• **Dùng (2):** Gọi (C):  $y = f(x)$ , (C'):  $y = g(x)$  thì ta phải tìm điểm chung của (C) và (C') trên  $[a, b]$ :

\* Nếu tìm được **hai điểm chung** mà hoành độ là a, b hoặc

$$\text{không có điểm chung} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

\* Nếu tìm được **một điểm chung**  $c \in [a, b]$

$$\Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx$$

(Dựa vào hình vẽ của (C) và (C') hoặc xét dấu để phá trị tuyệt đối)

**Nói chung:**

- Nếu miền giới hạn bởi hai đường, không cho a, b: Tìm các nghiệm

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n. \text{ Khi đó } S = \int_{x_1}^{x_n} |f - g| dx = \dots$$

- Nếu miền giới hạn bởi ba đường trở lên thì ta phải vẽ đồ thị để xác định cận.

## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P):  $y = x^2 - 2x + 2$ ,

trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1, x = 2$  ( $S = \frac{4}{3}$  đvdt)

**Bài 2:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C):  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ,

trục hoành. ( $S = \frac{16}{15}$  đvdt)

**Bài 3:** Tính diện tích giới hạn bởi (H):  $y = \frac{-2x}{x+2}$

trục hoành Ox và đường thẳng  $x = 2$ . ( $S = 4(1 - \ln 2)$  đvdt)

**Bài 4:** Tính diện tích giới hạn bởi (C):  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ , ( $0 \leq x \leq 2$ )

trục hoành Ox, trục tung Oy và đường thẳng  $x = 2$ . ( $S = \frac{5}{2}$  đvdt)

**Bài 5:** a) Vẽ (C):  $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$

b) Tính diện tích  $S(a)$  giới hạn bởi (C), tiệm cận xiên của (C) và hai đường thẳng  $x = a, x = 2a$  ( $a > 1$ ). Tìm  $a$  để  $S(a) = \ln 3$ .

$$(b) \quad S(a) = \ln \frac{2a-1}{a-1} \text{ đvdt, } a = 2$$

**Bài 6:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P):  $y = 2 - x^2$  và đường thẳng

(d):  $y = x$  ( $S = \frac{9}{2}$  đvdt)

**Bài 7:** Cho (C):  $y = f(x) = (x^2 - 1)^2$  và (P):  $y = g(x) = -3x^2 + 2x + 1$

a) Tìm điểm chung của (C) và (P)

b) Vẽ (C) và (P) trong cùng mặt phẳng (Oxy)

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P). ( $S = \frac{7}{15}$  đvdt)

**Bài 8:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình:

$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{27}, \quad y = \frac{27}{x} \quad (S = 27 \cdot \ln 3 \text{ đvdt})$$

**Bài 9:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình:

$$ax = y^2, \quad ay = x^2 \quad (a > 0) \quad (S = \frac{a^2}{3} \text{ đvdt})$$

**Bài 10:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình:

$$y = -\frac{x^2}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{7}{3} \quad \text{và} \quad y = \frac{7-x}{x-3} \quad (S = 9 - 8\ln 2 \text{ đvdt})$$

**Bài 11:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình:

$$y = x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \quad \text{và} \quad y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \quad (S = \frac{8}{3} \text{ đvdt})$$

**Bài 12:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \text{ (C) và tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm có hoành độ bằng 2.} \quad (S = \frac{64}{3} \text{ đvdt})$$

**Bài 13:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(P): y^2 = 2x, \text{ trục Ox và tiếp tuyến của (P) tại } A(2; 2) \quad (S = \frac{4}{3} \text{ đvdt})$$

**Bài 14:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$(P): y = x^2 - 4x + 5 \text{ và hai tiếp tuyến của (P) kẻ tại hai điểm } A(1; 2) \text{ và } B(4; 5) \quad (S = \frac{39}{9} \text{ đvdt})$$

**Bài 15:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong:

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 1} \text{ (C) và đường thẳng } y = -x + 3 \quad (S = 3 - 4\ln 2 \text{ đvdt})$$

**Bài 16:** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau đây:

$$y = 2x^2 \text{ và } x = y^2 \quad (S = \frac{1}{6} \text{ đvdt})$$

## Vấn đề 2: Tính thể tích của vật thể tròn xoay

### A. Phương pháp

∇. Thể tích của vật thể tròn xoay  $V_{\text{ox}}$  sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $x = a$ ;  $x = b$  ( $a < b$ );  $y = 0$  và  $y = f(x)$  quay xung quanh trục

$$\text{Ox, được cho bởi công thức sau đây: } V_{\text{ox}} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

∇. Thể tích của vật thể tròn xoay  $V_{oy}$  sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = a$  ;  $y = b$  ( $a < b$ ) ;  $x = 0$  và  $x = g(y)$  quay xung

quanh trục Oy, được cho bởi công thức sau đây:  $V_{oy} = \pi \int_a^b g^2(y) dy$

∇. Nếu hình phẳng giới hạn bởi (C):  $y = f(x)$  và (C'):  $y = g(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  và  $f(x) > g(x) \forall x \in [a, b]$  và hai đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$ . Khi đó thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng này quay quanh trục Ox

được tính bởi:  $V_{ox} = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx$   
( $V = V_1 - V_2$ )

∇. (Tương tự khi hai đường quay quanh Oy)

## B. Bài tập tự luyện

**Bài 1:** Miền D giới hạn bởi các đường  $y = 0$  và  $y = 2x - x^2$ . Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi D quay:

a) Quay trục Ox (ĐS:  $\frac{16\pi}{15}$  đvtt)

b) Quay trục Oy (ĐS:  $\frac{8\pi}{3}$  đvtt)

**Bài 2:** Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi (C):  $y = \ln x$ , trục Ox, đường thẳng  $x = e$ .  
(ĐS:  $\pi(e - 2)$  đvtt)

**Bài 3:** Cho hình phẳng D giới hạn bởi  $y = \tan x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $y = 0$

a) Tính diện tích của D

b) Tính thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox

(ĐS:  $S = \ln 2$  đvdt,  $V = \pi(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$  đvtt)

**Bài 4:** Tính thể tích của khối tròn xoay tạo ra bởi hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$  quay quanh trục Ox. (ĐS:  $\frac{3\pi}{10}$  đvtt)

**Bài 5:** Miền D giới hạn bởi các đường  $y = 4$  và  $y = (x - 2)^2$ . Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi D quay:

a) Quay trục Ox  $(\text{ĐS: } \frac{256\pi}{5} \text{ đvtt})$

b) Quay trục Oy  $(\text{ĐS: } \frac{128\pi}{3} \text{ đvtt})$

**Bài 6:** Miền D giới hạn bởi các đường  $x^2 + y - 5 = 0$  và  $x + y - 3 = 0$ .

Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi D quay quanh Ox

$(\text{ĐS: } \frac{153\pi}{5} \text{ đvtt})$

**Bài 7:** Miền D giới hạn bởi các đường  $y = 4 - x$  và  $y = x^2 + 2$

Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi D quay quanh Ox

$(\text{ĐS: } 16\pi \text{ đvtt})$

**Bài 8:** Miền D giới hạn bởi các đường  $y = \frac{x^3}{3}$  và  $y = x^2$

Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra khi D quay quanh Ox

$(\text{ĐS: } \frac{2.3^5\pi}{35} \text{ đvtt})$

## TÍCH PHÂN TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ 2002 ĐẾN 2013

Bài 1 (ĐH A2002) : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$y = |x^2 - 2x + 3|$  .  $y = x + 3$   $\text{ĐS : } S = \frac{109}{6}$

Bài 2 (ĐH B2002) : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$  và  $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$   $\text{ĐS : } S = 2\pi + \frac{4}{3}$

Bài 3 (ĐH A2003) : Tính tích phân :

$I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$   $\text{ĐS : } I = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$

Bài 4 (ĐH B2003) : Tính tích phân :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$   $\text{ĐS : } I = \frac{1}{2} \ln 2$

Bài 5 (ĐH D2003) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$$

$$\text{ĐS : } I = 1$$

Bài 6 (ĐH A2004) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x} - 1} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$$

Bài 7 (ĐH B2004) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{116}{135}$$

Bài 8 (ĐH D2004) : Tính tích phân :

$$I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx.$$

$$\text{ĐS : } I = 3 \ln 3 - 2$$

Bài 9 (ĐH A2005) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{34}{27}$$

Bài 10 (ĐH B2005) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = 2 \ln 2 - 1$$

Bài 11 (ĐH D2005) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx.$$

$$\text{ĐS : } I = e + \frac{\pi}{4} - 1$$

Bài 12 (ĐH A2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{2}{3}$$

Bài 13 (ĐH B2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}.$$

$$\text{ĐS : } I = \ln \frac{3}{2}$$

Bài 14 (ĐH D2006) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{5 - 3e^2}{4}$$

Bài 15 (ĐH A2007) : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = (e + 1)x, \quad y = (1 + e^x)x.$$

$$\text{ĐS : } S = \frac{e}{2} - 1$$

Bài 16 (ĐH B2007) : Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường .  $y = x \ln x$  ,  $y = 0$  ,  $x = e$  . Tính thể

tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox. ĐS :  $V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27}$

Bài 17 (ĐH D2007) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx . \quad \text{ĐS : } I = \frac{5e^4 - 1}{32}$$

Bài 18 (ĐH A2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx . \quad \text{ĐS : } I = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10}{9\sqrt{3}}$$

Bài 19 (ĐH B2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4}) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)} . \quad \text{ĐS : } I = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 20 (ĐH D2008) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{3 - 2 \ln 2}{16}$$

Bài 21 (ĐH A2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$$

Bài 22 (ĐH B2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{1}{4} (3 + \ln \frac{27}{16})$$

Bài 23 (ĐH D2009) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1} \quad \text{ĐS : } I = \ln(e^2 + e + 1) - 2$$

Bài 24 (ĐH A2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{2e^x + 1} dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2e}{3}$$

Bài 25 (ĐH B2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx \quad \text{ĐS : } I = -\frac{1}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

Bài 26 (ĐH D2010) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^e (2x - \frac{3}{x}) \ln x dx \quad \text{ĐS : } I = \frac{e^2}{2} - 1$$

Bài 27 (ĐH A2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{\pi}{4} + \ln \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \right)$$

Bài 28 (ĐH B2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$$

Bài 29 (ĐH D2011) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{34}{3} + 10 \ln \left( \frac{3}{5} \right)$$

Bài 30 (ĐH A2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{2}{3} + \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2$$

Bài 31 (ĐH B2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

$$\text{ĐS : } I = \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2$$

Bài 32 (ĐH D2012) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\pi/4} x(1 + \sin 2x) dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$$

Bài 33 (ĐH A2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x \, dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2}$$

Bài 34 (ĐH B2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx$$

$$\text{ĐS : } I = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Bài 35 (ĐH D2013) : Tính tích phân :

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

$$\text{ĐS : } I = 1 + \ln 2$$

Bài 36 (ĐH A, A12014) : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong  $y = x^2 - x + 3$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$ .

$$\text{ĐS : } I = \frac{1}{6}$$

Bài 37 (ĐH B2014) : Tính tích phân  $\int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$

$$\text{ĐS : } 1 + \ln 3$$

Bài 38 (ĐH D2014) : Tính tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1) \sin 2x dx$

$$\text{ĐS : } I = \frac{3}{4}$$

## MỘT SỐ ĐỀ CĐ, ĐH KHÁC

Bài 1. Tham khảo 2005

$$I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} dx \quad \text{KQ: } \frac{141}{10}$$

Bài 2. Tham khảo 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \operatorname{tg} x dx \quad \text{KQ: } \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Bài 3. Tham khảo 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + e^{\sin x} \cdot \cos x) dx \quad \text{KQ: } \ln \sqrt{2} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1$$

Bài 4. Tham khảo 2005

$$I = \int_1^e x^2 \ln x dx \quad \text{KQ: } \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

Bài 5. CĐ Khối A, B – 2005

$$I = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{x^2 + 3} dx \quad \text{KQ: } \frac{6\sqrt{3} - 8}{5}$$

Bài 6. CĐ Xây Dựng Số 3 – 2005

$$I = \int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1} + x+3} dx \quad \text{KQ: } 6 \ln 3 - 8$$

Bài 7. CĐ GTVT – 2005

$$I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{KQ: } \frac{8}{105}$$

Bài 8. CĐ Kinh Tế Kỹ Thuật I – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 5x dx \quad \text{KQ: } \frac{3 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}} + 5}{34}$$

Bài 9. CĐ Tài Chính Kế Toán IV – 2005

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^3 + 1} \cdot x^5 dx \quad \text{KQ: } \frac{848}{105}$$

Bài 10. CĐ Truyền Hình Khối A – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2} \ln 2$$

Bài 11. CĐSP Tp.HCM – 2005

$$I = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} \quad \text{KQ: } \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

Bài 12. CĐ KT-KT Cần Thơ – 2005

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \text{KQ: } 1 - \frac{2}{e}$$

Bài 13. CĐSP Vĩnh Long – 2005

$$I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx \quad \text{KQ: } \frac{46}{15}$$

Bài 14. CĐ Bến Tre – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\sin x + 1} dx \quad \text{KQ: } 2 - 3 \ln 2$$

Bài 15. CĐSP Sóc Trăng Khôi A – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x + 2 \cos x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin^2 x dx}{\sin 2x \cos^2 x} \quad \text{KQ: } I = \ln 2, \quad J = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Bài 16. CĐ Cộng Đồng Vĩnh Long – 2005

$$I = \int_1^e x \ln x dx \quad \text{KQ: } \frac{e^2 + 1}{4}$$

Bài 17. CĐ Công Nghiệp Hà Nội – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi^2}{2} - 4$$

Bài 18. CĐSP Hà Nội – 2005

$$I = \int_0^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 4} dx \quad \text{KQ: } 6 + \frac{\pi}{8}$$

Bài 19. CĐ Tài Chính – 2005

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3} \quad \text{KQ: } \frac{1}{8}$$

Bài 20. CĐSP Vĩnh Phúc – 2005

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{6}$$

Bài 21. CĐSP Hà Nội – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2004} x}{\sin^{2004} x + \cos^{2004} x} dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4}$$

Bài 22. CĐSP KonTum – 2005

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx \quad \text{KQ: } 2$$

Bài 23. Tham khảo 2006

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}} \quad \text{KQ: } \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

Bài 24. Tham khảo 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4} + 1$$

Bài 25. Tham khảo 2006

$$I = \int_1^2 (x-2) \ln x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{5}{4} - \ln 4$$

Bài 26. Tham khảo 2006

$$I = \int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}} \quad \text{KQ: } 2 \ln 2 + 1$$

Bài 27. Tham khảo 2006

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2 \ln x}{x\sqrt{1+2 \ln x}} dx \quad \text{KQ: } \frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{11}{3}$$

Bài 28. CĐ KTKT Công Nghiệp II – 2006

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx \quad \text{KQ: } \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (\text{Đổi biến } t = 1+x^2, \text{ từng phần})$$

Bài 29. CĐ Cơ Khí – Luyện Kim – 2006

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx \quad \text{KQ: } 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

Bài 30. CĐ Nông Lâm – 2006

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx \quad \text{KQ: } \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Bài 31. ĐH Hải Phòng – 2006

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2} \ln 2$$

Bài 32. CĐ Y Tế – 2006

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx \quad \text{KQ: } \ln \sqrt{2}$$

Bài 33. CĐ Tài Chính Kế Toán – 2006

$$I = \int_0^3 x \ln(x^2+5) dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2}(14 \ln 14 - 5 \ln 5 - 9)$$

Bài 34. CĐ Sư Phạm Hải Dương – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{32}$$

Bài 35. Hệ CĐ – ĐH Hùng Vương – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1) \cos x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - 1$$

Bài 36. CĐ KTKT Đông Du – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{4} \ln 3$$

Bài 37. CĐ Sư Phạm Quảng Bình – 2006

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx \quad \text{KQ: } 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$$

Bài 38. CĐ Sư Phạm Quảng Ngãi – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx \quad \text{KQ: } 2$$

Bài 39. CĐ Sư Phạm Trà Vinh – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 40. CĐ Bán Công – Công Nghệ - Tp.HCM – 2006

$$I = \int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1} + x+3} dx \quad \text{KQ: } 6 \ln 3 - 8$$

Bài 41. CĐ Sư Phạm Tiền Giang – 2006

$$I = \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} \, dx \quad \text{KQ: } -\frac{468}{7}$$

Bài 42. CĐ Bến Tre – 2006

$$I = \int_1^e \left( \frac{x^3+1}{x} \right) \ln x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{2e^3}{9} + \frac{11}{18}$$

Bài 43.  $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{2+x^3} \, dx \quad \text{KQ: } \frac{2}{9}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

Bài 44.  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos^2 x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} + 1 \right)$

Bài 45.  $I = \int_0^1 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x-1}) \, dx \quad \text{KQ: } \frac{e^2}{4} - \frac{1}{14}$

Bài 46. CĐ KT-KT Công Nghiệp I – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{2 \cos 3x + 1} dx \quad \text{KQ: Không tồn tại}$$

Bài 47. CD KT-KT Công Nghiệp II – 2006

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx \quad \text{KQ: } \ln 2 - \frac{1}{2}$$

Bài 48. CD Xây dựng số 2 – 2006

$$I = \int_1^2 \frac{x\sqrt{x-1}}{x-5} dx \quad \text{KQ: } \frac{32}{3} - 10 \ln 3$$

Bài 49. CD Xây dựng số 3 – 2006

$$I = \int_0^1 (x + \cos^3 x) \sin x dx \quad \text{KQ: } \frac{5}{4}$$

Bài 50. CD GTVT III – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5-2 \sin x} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$$

$$J = \int_0^2 (2x+7) \ln(x+1) dx \quad \text{KQ: } 24 \ln 3 - 14$$

Bài 51. CD Kinh tế đối ngoại – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \tan^8 x) dx \quad \text{KQ: } \frac{76}{105}$$

Bài 52. CDSP Hưng Yên - Khối A – 2006

$$I = \int_3^4 \frac{4x+3}{x^2-3x+2} dx \quad \text{KQ: } 18 \ln 2 - 7 \ln 3$$

Bài 53. CDSP Hưng Yên - Khối B – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x - \sin^3 3x}{1 + \cos 3x} dx \quad \text{KQ: } -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \ln 2$$

Bài 54. CDSP Hưng Yên - Khối D<sub>1</sub>, M – 2006

$$I = \int_1^e \frac{\ln x \sqrt[3]{2 + \ln^2 x}}{x} dx \quad \text{KQ: } \frac{3}{8} (3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2})$$

Bài 55. CD Bán công Hoa Sen – Khối A – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{2}$$

Bài 56. CD Bán công Hoa Sen – Khối D – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2 \sin 2x} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{4} \ln 3$$

Bài 57. CDSP Trung Ương – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx \quad \text{KQ: } \frac{2}{3}$$

Bài 58. CDSP Hà Nam – Khối A – 2006

$$I = \int_0^1 \frac{x}{(x+3)^2} dx \quad \text{KQ: } \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4}$$

Bài 59. CDSP Hà Nam – Khối M – 2006

$$I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Bài 60. CDSP Hà Nam – Khối A (DB) – 2006

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4}$$

Bài 61. CDKT Y Tế I – 2006

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx \quad \text{KQ: } \ln \sqrt{2}$$

Bài 62. CD Tài Chính Hải Quan – 2006

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin 2x} dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{16} \ln^2 3$$

Bài 63. CD Kỹ thuật Cao Thắng – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (1 + \sin^2 x)^3 dx \quad \text{KQ: } \frac{15}{4}$$

Bài 64. CDKT Tp.HCM Khóa II - 2006

$$I = \int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{KQ: } 4 - 2\sqrt{e}$$

Bài 65. CD CN Thực phẩm Tp.HCM – 2006

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4}$$

Bài 66. CD Điện lực Tp.HCM – 2006

$$I = \int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+2}{\sqrt[3]{3x+1}} dx \quad \text{KQ: } \frac{46}{15}$$

Bài 67. CD Kinh tế công nghệ Tp.HCM Khối A – 2006

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 68. CD Kinh tế công nghệ Tp.HCM Khối D<sub>1</sub> – 2006

**KỸ THUẬT GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN**

*Biên soạn: Thạc sĩ. Trương Nhật Lý*

$$I = \int_1^2 (4x-1) \ln x \, dx \quad \text{KQ: } 6 \ln 2 - 2$$

Bài 69. CĐSP Hà Nội Khối D<sub>1</sub> – 2006

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \quad \text{KQ: } \frac{2}{\sqrt{3}} \ln 2.$$

Bài 70. Tham khảo khối A – 2007

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} \, dx \quad \text{KQ: } 2 + \ln 2$$

Bài 71. Tham khảo khối B – 2007

$$\text{Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường } y=0 \text{ và } y=\frac{x(1-x)}{x^2+1}. \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 - 1$$

Bài 72. Tham khảo khối B – 2007

$$\text{Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường } y=x^2 \text{ và } y=\sqrt{2-x^2}. \quad \text{KQ: } \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

Bài 73. Tham khảo khối D – 2007

$$\int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} \, dx \quad \text{KQ: } 1 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$$

Bài 74. Tham khảo khối D – 2007

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Bài 75. CĐSPTW – 2007. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình  $y = x^2 - 2$  ;

$$y = x; \quad x = -1; \quad x = 0. \quad \text{KQ: } \frac{7}{6}$$

Bài 76. CĐ GTVT – 2007

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos^3 x}{1 + \sin x} \, dx \quad \text{KQ: } 2$$

Bài 77. CDDL Công nghệ thông tin Tp.HCM – 2007

$$\int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} \, dx \quad \text{KQ: } \frac{231}{10}$$

Bài 78. CĐ Khối A – 2007

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2007} \, dx \quad \text{KQ: } \frac{3^{2008} - 2^{2008}}{2008}$$

Bài 79. CĐ Cơ khí luyện kim – 2007

$$\int_1^e (x \ln x)^2 \, dx \quad \text{KQ: } \frac{1}{27} (5e^3 - 2)$$

Bài 80. CĐSP Vĩnh Phúc – 2007

$$\int_1^{\frac{\pi}{4}} (x \sin x)^2 dx \quad \text{KQ: } \frac{\pi^3}{384} - \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$$

Bài 81. CD Khối B – 2007

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x$ ,  $y = x + \cos^2 x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .

$$\text{KQ: } \frac{\pi}{2}$$

Bài 82. CD Khối D – 2007

$$\int_{-2}^0 |x + 1| dx \quad \text{KQ: } 1$$

Bài 83. CD Dệt may thời trang Tp.HCM – 2007

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)} \quad \text{KQ: } 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{12}$$

Bài 84. CD Hàng hải – 2007

$$\int_1^3 x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx \quad \text{KQ: } \frac{14\sqrt{3}}{5}$$

Bài 85. CD Kinh tế kỹ thuật Thái Bình – 2007

$$\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt{x+1}) dx \quad \text{KQ: } \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{31}{60}$$

Bài 86. CD Công nghiệp Phúc Yên – 2007

$$\int_0^1 xe^x dx \quad \text{KQ: } 1$$

Bài 87. CD Khối A, B, D – 2008

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol  $(P): y = -x^2 + 4x$  và đường thẳng  $d: y = x$ .

$$\text{KQ: } \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}$$

## 100 BÀI TẬP TÍCH PHÂN THAM KHẢO

$$1. \quad A = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \quad \text{đs: } \frac{1}{3}(\sqrt{27} - \sqrt{8} - 1)$$

$$2. \quad B = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} dx \quad \text{đs: } 2\sqrt{2} - 1$$

$$3. \quad C = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x} dx \quad \text{đs: } -\frac{1}{2} + 3 \ln 2$$

$$4. \quad D = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \cos 4x dx \quad \text{đs: } -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$5. E = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad \text{đs: } -\frac{7\sqrt{3}}{32}$$

$$6. F = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \quad \text{đs: } 4\sqrt{2}$$

$$7. G = \int_0^{\pi/2} \frac{4\sin^3 x dx}{1 + \cos x} \quad \text{đs: } 2$$

$$8. H = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3| dx \quad \text{đs: } 4$$

$$9. I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx \quad \text{đs: } 8$$

$$10. K = \int_{-1}^1 (|2x-1| - |x|)^2 dx \quad \text{đs: } 5/2$$

11. Cho hai hàm số  $f(x) = 4\cos x + 3\sin x$ ,  $g(x) = \cos x + 2\sin x$

a) Tìm các số A, B sao cho  $g(x) = A.f(x) + B.f'(x)$

b) Tính  $\int_0^{\pi/4} \frac{g(x)}{f(x)} dx$  đs:  $A = 2/5, B = -1/5, \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5} \ln \frac{7}{4\sqrt{2}}$

12. Tìm các hằng số A, B để hàm số  $f(x) = A\sin \pi x + B$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện  $f'(1) = 2$

và  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  đs:  $A = -2/\pi, B = 2$

$$13. M = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \quad \text{đs: } \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 2$$

$$14. N = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \quad \text{đs: } \frac{\pi}{6}$$

$$15. O = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{đs: } \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$16. P = \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx \quad \text{đs: } \frac{\pi}{16}$$

$$17. Q = \int_0^3 \frac{x^4 - 1}{x^2 + 9} dx \quad \text{đs: } \frac{20\pi}{3} - 18$$

$$18. R = \int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^3} dx \quad \text{đs: } \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$19. R = \int_{\sqrt{2}}^{2/\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{đs: } -\frac{\pi}{12}$$

$$20. S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{đs: } -\ln(\sqrt{2} - 1)$$

21.  $T = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$  đs:  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1)$
22.  $U = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$  đs:  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
23.  $V = \int_0^1 \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$  đs:  $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$
24.  $X = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$  đs:  $\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
25.  $Y = \int_0^2 (x-2) \sqrt{\frac{x}{4-x}} dx$  đs:  $\pi - 4$
26.  $A = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+4}$  đs:  $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$
27.  $B = \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$  đs:  $\frac{3\pi}{16}$
28.  $C = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{3-x}} dx$  đs:  $\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - 2$
29.  $D = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\sin x} dx$  đs:  $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$
30.  $E = \int_1^{\sqrt{6}+\sqrt{10}} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$  đs:  $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$
31.  $F = \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$  đs:  $\frac{\pi}{3}$
32.  $A = \int_1^2 x\sqrt{x+2} dx$  đs:  $\frac{32}{15} + \frac{2\sqrt{3}}{5}$
33.  $B = \int_0^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}} dx$  đs:  $\frac{106}{15}$
34.  $C = \int_{-4}^3 \frac{3x-4}{\sqrt[3]{4-x}} dx$  đs:  $-\frac{99}{5}$
35.  $D = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$  đs:  $141/20$
36.  $E = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$  đs:  $2(1-\ln 2)$
37.  $F = \int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$  đs:  $\ln \frac{9}{4}$

38.  $G = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$  đs:  $\frac{1}{8}$
39.  $H = \int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$  đs:  $46/15$
40.  $I = \int_{-1}^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} dx$  đs:  $6\ln 3 - 8$
41.  $K = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{(\sin x - \cos x + 3)^3} dx$  đs:  $\frac{1}{32}$
42.  $I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$  đs:  $\frac{1}{2} \ln 3$
43.  $L = \int_0^{\pi/3} \tan^3 x dx$  đs:  $\frac{3}{2} - \ln 2$
44.  $M = \int_0^{\pi/4} \tan^4 x dx$  đs:  $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$
45.  $N = \int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$  đs:  $\frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$
46.  $O = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$  đs:  $\frac{34}{27}$
47.  $P = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$  đs:  $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$
48.  $Q = \int_0^{\ln 2} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$  đs:  $\ln \frac{8}{9}$
49.  $R = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$  đs:  $\frac{11}{3} - 4\ln 2$
50.  $S = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx$  đs:  $\frac{10\sqrt{2}-11}{3}$
51.  $T = \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$  đs:  $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$
52.  $U = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$  đs:  $\frac{1}{3} \ln \frac{16}{9}$
53.  $V = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$  đs:  $\frac{1}{6}$
54.  $X = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$  đs:  $\frac{4}{3}$

55.  $Y = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} dx$  đs:  $\frac{116}{135}$
56.  $A = \int_0^3 \frac{dx}{x+2\sqrt{x+1}+2}$  đs:  $2\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$
57.  $B = \int_1^5 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}+3}$  đs:  $\ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$
58.  $C = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx$  đs:  $\frac{4}{3}$
59.  $R = \int_1^2 \frac{x^2}{x^2-7x+12} dx$  đs:  $25\ln 2 - 16\ln 3 + 1$
60.  $D = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$  đs:  $11 + 6\ln\frac{2}{3}$
61.  $E = \int_1^e \frac{\ln x \cdot \sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x} dx$  đs:  $\frac{3}{8}(\sqrt[3]{16} - 1)$
62.  $F = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+2}} dx$  đs:  $2\sqrt{3} - \frac{8}{3}$
63.  $G = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$  đs:  $\frac{8}{5} - \frac{19}{10\sqrt{2}}$
64.  $H = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x} dx$  đs:  $1 + \ln\frac{2}{3}$
65.  $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 4x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$  đs:  $\frac{2}{3} \ln 4$
66.  $K = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{1 + \cos x} dx$  đs:  $3\ln 2 - 2$
67.  $L = \int_1^e \frac{\ln(ex)}{3+x\ln x} dx$  đs:  $\ln\frac{e+3}{3}$
68.  $M = \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$  đs:  $4/5$
69.  $N = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{13 - 10\sin x - \cos 2x}$  đs:  $\frac{1}{2} \ln\frac{4}{3}$
70.  $O = \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$  đs:  $\sqrt{2} \ln 2$
71.  $S = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$  đs:  $\frac{\pi + \sqrt{3} \ln 3}{8}$

$$\begin{aligned}
 72. P &= \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} & \text{đs: } \frac{\pi}{6} \\
 73. Q &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \cos x} & \text{đs: } \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \\
 74. R &= \int_1^2 \frac{x \cdot dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} & \text{đs: } \frac{7}{3} - \sqrt{3} \\
 75. S &= \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} dx \quad (\text{A-2008}) & \text{đs: } \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{10\sqrt{3}}{27} \\
 76. T &= \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} & \text{đs: } \ln(\sqrt{5} + 2) \\
 77. U &= \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx & \text{đs: } \frac{\pi}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{8} - 2 \\
 78. V &= \int_0^1 \frac{5x^2 + 4}{x^3 + 1} dx & \text{đs: } \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} + 3\ln 2
 \end{aligned}$$

$$79. \text{ Cho hai tích phân: } I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \cos^2 2x \, dx ; J = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos^2 2x \, dx$$

a) Tính  $I + J$  và  $I - J$

b) Tính  $I, J$       đs:  $\pi/4 ; 0 ; \pi/8$

80. Giả sử  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $[0; \pi]$ . Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

$$\text{Áp dụng : } J = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{đs: } \pi^2/4$$

81. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$  ta đều có :  $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$ . Tính

$$\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx \quad \text{đs: } 6$$

$$82. X = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 - 4)} \quad \text{đs: } -\frac{1}{4} \ln 3$$

$$83. Y = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx \quad \text{đs: } \frac{\pi}{4}$$

$$84. A = \int_0^1 x \cdot \ln(x^2 + x + 1) dx \quad \text{đs: } \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

$$85. B = \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \quad \text{đs: } 3\ln 3 - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{1}{6}$$

$$86. C = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$\text{đs: } \frac{\pi}{3}$$

$$87. D = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) \, dx$$

$$\text{đs: } -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

$$88. E = \int_2^3 \ln(x^2 - x) \, dx$$

$$\text{đs: } 3\ln 3 - 2$$

$$89. F = \int_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$\text{đs: } 1/2$$

$$90. G = \int_0^{\pi/4} x \tan^2 x \, dx$$

$$\text{đs: } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$91. H = \int_0^{\pi/2} e^x \cos^2 x \, dx$$

$$\text{đs: } \frac{1}{5} \left( 2e^{\frac{\pi}{2}} - 3 \right)$$

$$92. I = \int_e^{e^2} \left( \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$$

$$\text{đs: } \frac{e(2-e)}{2}$$

$$93. K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x \, dx$$

$$\text{đs: } e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$94. L = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} \, dx$$

$$\text{đs: } \frac{3-e}{3}$$

$$95. M = \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \cos \sqrt{x} \, dx$$

$$\text{đs: } \pi - 2$$

$$96. N = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \, dx$$

$$\text{đs: } 2\pi^2 - 8$$

$$97. O = \int_1^e x \cdot \ln^2 x \, dx$$

$$\text{đs: } \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

$$98. P = \int_0^1 (x^2 + 2x) \cdot e^x \, dx$$

$$\text{đs: } e$$

$$99. Q = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$$

$$\text{đs: } \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

$$100. R = \int_{-1}^1 \frac{\ln(x^2 + 1)}{e^x + 1} \, dx$$

$$\text{đs: } \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$