

Chương IV: GIỚI HẠN (GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ - GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ - HÀM SỐ LIÊN TỤC)

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết:

1. Giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực:

a). Giới hạn hữu hạn

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$$

b). Giới hạn vô cực:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

↳ Chú ý: Thay vì viết: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm \infty$, ta viết tắt: $\lim u_n = a$;

$$\lim u_n = \pm \infty$$

2. Các giới hạn đặc biệt:

$$a). \lim \frac{1}{n} = 0; \lim \frac{1}{n^k} = 0; \lim n^k = +\infty$$

(với k nguyên dương)

$$b). \lim q^n = \begin{cases} 0; \text{..neu...: } |q| < 1 \\ +\infty; \text{..neu...: } q > 1 \end{cases}$$

$$c). \lim c = c \text{ (với } c \text{ là hằng số)}$$

3. Định lý về giới hạn hữu hạn:

a). Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$, thì:

$$\bullet \lim(u_n + v_n) = a + b$$

$$\bullet \lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$\bullet \lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$\bullet \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0)$$

b). Nếu $u_n \geq 0; \forall n \in N^*$, và $\lim u_n = a$, thì
 $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

4. Định lý liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực:

a). Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm \infty$

$$\text{thì } \lim \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

b). Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$

$$\forall n \text{ thì } \lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$$

c). Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì
 $\lim(u_n \cdot v_n) = +\infty$.

5. Cấp số nhân lùi vô hạn:

a). Định nghĩa: CSN lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$.

b). Công thức tính tổng của CSNLVH:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

II. Các dạng bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm giới hạn sau:

$$a). \lim(2n^2 + 3n - 1) \quad b). \lim(-n^2 - n + 3) \quad c). \lim(3n^3 - n^2 + n + 5)$$

Bài 2 Tìm giới hạn sau:

$$a). \lim \frac{3n+2}{2n+3} \quad b). \lim \frac{3-2n}{2n+3} \quad c). \lim \frac{5-7n}{3-6n} \quad d). \lim \frac{4n^2-5}{2n^2+3n} \quad e). \lim \frac{n^2+n+1}{2n^2-n} \quad f). \lim \frac{5n^2+3n+1}{7n^2+6n-3}$$

$$g). \lim \frac{(2n-1)(n+2)}{2n^2-3n+1} \quad h). \lim \frac{5n^2-3n+1}{(25n+2)(n-1)} \quad i). \lim \frac{(n^2+n)(2n-1)}{n^3+3n-1} \quad j). \lim \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+n+3}$$

$$k). \lim \frac{2\sqrt{n^3+3n+5}}{7n^2+6n+9} \quad l). \lim \frac{1+\sqrt[3]{n^3+n^2-1}}{2n+3} \quad m). \lim \frac{3n\sqrt{n^2-n}+2}{n^2-n+1} \quad n). \lim \frac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt[3]{27n^3-n}+3}$$

o). $\lim \frac{2n^2 + \sqrt{n^3 + 3n} - 1}{3n^2 - 3n + 2}$

Bài 3: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim \frac{2^n + 3^n}{2.3^n + 5.2^n}$ b). $\lim \frac{3.5^n - 2.3^n}{5^n + 5.3^n}$ c). $\lim \frac{7.5^n - 2.7^n}{5^n - 5.7^n}$ d). $\lim \frac{7.3^n + 2.6^n}{5.3^n - 5.6^n}$ e). $\lim \frac{(-2)^n - 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$
 f). $\lim \frac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$ g). $\lim \frac{(-3)^n - 5^n}{(-3)^{n+1} + 5^n + 1}$ h). $\lim \frac{2^2 + 3^n - 4^n}{2^n + 3^{n+1} + 4^{n+1}}$ i). $\lim \frac{(-3)^{n+1} + 5^{n+2}}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$ j).
 $\lim \frac{5^{n+1} + 7^{n+1} + 1}{3^{n+1} + 7^{n+1} + 3.2^n}$

Bài 4: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ b). $\lim(\sqrt{3n+5} - \sqrt{n-1})$ c). $\lim(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n + 1)$
 d). $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$ e). $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n + 3}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$ f). $\lim \frac{n - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 + 1} - n}$ g). $\lim \frac{n - 2 - \sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{\sqrt{n^2 + 2} - 2n}$
 h). $\lim(\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 - 1} + 1 - 2n)$ i). $\lim(\sqrt[3]{27n^3 - n^2} - 1 - 2n)$ j). $\lim \frac{\sqrt[3]{2 - n^3} + n}{\sqrt{n^2 + n} - n}$
 k). $\lim \frac{\sqrt[3]{2n + 3n^3} - n + 1}{\sqrt{n^2 - 1} - n}$

Bài 5: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)})$ b). $\lim(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)})$
 c). $\lim(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$. (ĐS: $\frac{1}{2}$)

Bài 6: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

a). $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$;
 b). $S = \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \dots$;
 c). $S = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$;

Bài 7: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}$; b). $\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$; c). $\lim \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{2n+1}$;
 d). $\lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, ($|a| < 1, |b| < 1$);

Bài 8*: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2})$; b). $\lim \sqrt[n]{a}$; ($a > 0$); c). $\lim \frac{2^n}{n!}$; d). $\lim \frac{\log_a n}{n}$; ($a > 0$)
 e). $\lim \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n}\right)$; f). $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Tóm tắt lý thuyết:

1). **Giới hạn hữu hạn:** } Xem SGK
2). **Giới hạn vô cực:** }

3). **Các giới hạn đặc biệt:**

↳ **Định lý 1:**

a). $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ b). $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ c). $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$

d). $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0$ e). $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

f). $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty; \text{neu..k...chan} \\ -\infty; \text{neu..k...le} \end{cases}$

4). **Định lý về giới hạn hữu hạn:**

a). Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, thì:

• $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$;

• $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

• $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = LM$;

• $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$;

b). Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, L \geq 0$ thì:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

(**Chú ý:** Định lý 1 vẫn đúng khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$)

↳ **Định lý 2:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

5). **Quy tắc về giới hạn vô cực:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

a). **Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b). **Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

II. Các dạng bài tập áp dụng:

Bài 1: Tính giới hạn :

a). $\lim_{x \rightarrow 1} x^2$ b). $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ c). $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + 1)$ d). $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2\sqrt{x} + 1)$ e). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x-1}$

Bài 2: Tính các giới hạn sau :

a). $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ b). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ c). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3x^2 + 3x + 6}{x + 2}$ d). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{4x - 4}$ e). $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

Bài 3: Tìm các giới hạn sau (khi $x \rightarrow \infty$):

a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3x + 5)$ b). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 1}$; c). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$; d). $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

e). $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)$ f). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$; g). $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$

h). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$; i). $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt{x^2 + 1})$; j). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$;

k). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$; l). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2+x}}{x+10}$; m). $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$.

Bài 4: Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau:

a). $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$; b). $\lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x)$; c). $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$; d). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$ e). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$
 f). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$; g). $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$; h). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ i). $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$; j). $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$;
 k). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$ l). $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$; m). $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$; n). $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$
 o). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2}$; p). $\lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$; q). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$; r). $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$

Bài 5: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ b). $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$ d). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
 e). $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ f). $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3-\sqrt{x+2}}{x^2-2x-35}$ g). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2+7x-18}$

Bài 6: a). Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{neu } x \leq -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{neu } x > -2 \end{cases}$

Tìm $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (nếu có).

b). Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{neu } x \leq 2 \\ 4x-3 & \text{neu } x > 2 \end{cases}$

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (nếu có).

C. HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. Tóm tắt lý thuyết:

1). Hàm số liên tục:

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

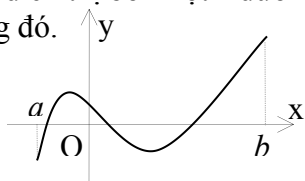
$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

• $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

• $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

•). Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một đoạn được biểu diễn thị bởi một “đường liền nét” trên khoảng đó.



2). Các định lý:

•). Định lý 1:

a. Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực.

b. Hàm phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

•). Định lý 2:

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 khi đó:

a). Các hàm số $f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .

b). Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

•). Định lý 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Suy ra: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$

II. Các dạng bài tập áp dụng:

Bài 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại một điểm (đoạn) cho trước.

a). $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = -1$

b). $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$

c). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ -1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x = 2$

d). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$

e). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ tại điểm $x = -2$

f). $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ tại điểm $x = 2$

g). $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$

h). $f(x) = \begin{cases} 4 - 3x^2 & \text{khi } x \leq -2 \\ x^3 & \text{khi } x > -2 \end{cases}$ tại điểm $x = -2$

$= -1$

i). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 5 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x = 3$

Bài 2: Chứng minh rằng:

- a). Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.
- b). Hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$ liên tục trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$.
- c). Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$
- d). Hàm số $f(x) = \sqrt{8-2x^2}$ liên tục trên nửa khoảng $[-2;2]$.
- e). Hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ liên tục trên nửa khoảng $[\frac{1}{2};+\infty)$.
- f). Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x = 0$

Bài 3: Tìm số thực a sao cho hàm số:

- a). $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2ax - 3 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbf{R}$
- b). $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-a)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbf{R}$.
- c). $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{khi } x \geq 0 \\ 2^x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbf{R}$

Bài 4: Chứng minh rằng phương trình:

- a). $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$
- b). $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .