

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN



ĐỀ THI THỬ - KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2016

Môn thi : TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2} + 2x$.

Câu 3. (1,0 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_0^7 \frac{x dx}{(x+1)^3 \sqrt{x+1}}$.

2) Có 10 mẫu cá biển lấy từ 10 địa điểm khác nhau cần được kiểm tra, trong đó có 6 mẫu không an toàn và 4 mẫu an toàn. Lấy ngẫu nhiên 5 mẫu từ 10 mẫu này để kiểm tra. Tính xác suất để trong 5 mẫu được lấy có ít nhất 3 mẫu an toàn.

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các căn bậc hai của số phức $z = -i$.

Câu 5. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 6. (1,0 điểm) Giải phương trình :

$$3\sin x + \sin 2x = 6\sin^2 \frac{x}{2}$$

Câu 7. (1,0 điểm) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$, mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SC và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Câu 8. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB , N là giao điểm của CM với AD . Đường thẳng vuông góc với CM tại C cắt đường thẳng AB tại P . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên NP . Biết $M(3;6)$ và phương trình đường thẳng AH là $x - y + 6 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$.

Câu 9. (1,0 điểm) Tìm nghiệm thực của hệ phương trình:

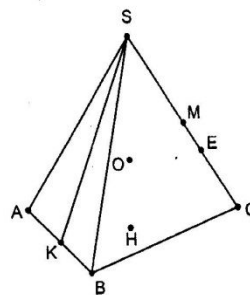
$$\begin{cases} y(x^2 - 5x + 1) = 6(x - 1)^2 \\ x^4 - x^2y - 3x^2 - y = 4 \end{cases}$$

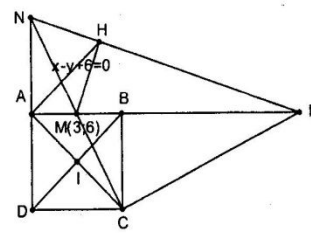
Câu 10. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
THI THỬ - KÌ THI THPT QUỐC GIA 2016

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm
1 (1,0đ)	Học sinh tự giải	1,00
2 (1,0đ)	Tập xác định của hàm số $D = [-1; 1]$. Ta có $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + 2$, với $x \in (-1; 1)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} = x$	0,50
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4(1-x^2) = x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} \in (0; 1). \end{cases}$ Ta có $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $f(\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$. Suy ra $\max f(x) = \sqrt{5}$, $\min f(x) = -2$.	0,50
3 (1,0đ)	1) Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow x = t^3 - 1 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$. Với $x = 0$ thì $t = 1$, $x = 7$ thì $t = 2$. Khi đó $I = 3 \int_1^2 \frac{(t^3-1)t^2 dt}{t^4}$	0,25
	$I = 3 \int_1^2 \left(t - \frac{1}{t^2}\right) dt = 3 \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t}\right) \Big _1^2 = 3 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) = 3$.	0,25
	2) Số phần tử của không gian mẫu là $N(\Omega) = C_{10}^5$.	0,25
	Gọi A là biến cố mà trong 5 mẫu được lấy để kiểm tra có ít nhất 3 mẫu an toàn, thì số khả năng thuận lợi cho A là: $N(A) = C_4^3 \cdot C_6^2 + C_4^4 \cdot C_6^1$. Xác suất để trong 5 mẫu được lấy có ít nhất 3 mẫu an toàn là: $P(A) = \frac{C_4^3 \cdot C_6^2 + C_4^4 \cdot C_6^1}{C_{10}^5} = \frac{11}{42}$.	0,25
4 (1,0đ)	Giả sử $z = x + yi$ là căn bậc hai của $-i$. Ta có: $(x + yi)^2 = -i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i$. Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2xy = -1 \end{cases}$	0,50
	Giải hệ phương trình trên ta có hai nghiệm $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $(x; y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Các căn bậc hai của $-i$ là: $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ và $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.	0,50
5 (1,0đ)	+) Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d(4; 7; 2)$, vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P(1; -2; 1)$.	0,50
	+) Vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 12 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (11; -2; -15)$.	0,50
	+) Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d nên chứa điểm $M(2; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (α) : $11(x-2) - 2(y-2) - 15(z-1) = 0 \Leftrightarrow 11x - 2y - 15z - 3 = 0$.	0,25
6 (1,0đ)	Phương trình đã cho tương đương với: $3\sin x + \sin 2x = 3(1 - \cos x) \Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cdot \cos x - 3 = 0$ (*)	0,25
	Đặt $t = \sin x + \cos x$, $ t \leq \sqrt{2} \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x = t^2 - 1$. Khi đó (*) trở thành: $t^2 + 3t - 4 = 0$ với $ t \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow t = 1$. Với $t = 1$ ta có: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.	0,50
7 (1,0đ)	+) Gọi H là tâm của tam giác đều ABC . Vì hình chóp $S.ABC$ đều nên $SH \perp (ABC)$ và $SA = SB = SC$. Gọi K là trung điểm của AB , ta có $CK \perp AB$, $SK \perp AB$. Do $((SAB), (ABC)) = 60^\circ$ nên $\widehat{SKC} = 60^\circ$. Xét tam giác đều ABC , ta có $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $KH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Xét $\triangle SHK$: $SH = KH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$. Suy ra $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$ Ta có: $AB \perp (SKC)$. Trong $\triangle SKC$ kẻ đường cao KE . Khoảng cách giữa AB và SC là $d(AB; SC) = KE$ Ta có $2S_{SKC} = SH \cdot CK = KE \cdot SC \Rightarrow d(AB; SC) = KE = \frac{SH \cdot CK}{SC} = \frac{3a}{2\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.	0,50



	+) Trục của tam giác ABC là đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của SC. Trong tam giác SCK kẻ trung trực của cạnh SC cắt SH tại O, khi đó O là tâm và OS là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Ta có: $\Delta SMO \sim \Delta SHC \Rightarrow SO = \frac{SC \cdot SM}{SH} = \frac{SC^2}{2 \cdot SH} = \frac{7a}{12}$. Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{343\pi a^3}{1296}$ (đvtt).	0,50
8 (1,0đ)	+) Tứ giác $ACPN$ nội tiếp nên: $\widehat{CNP} = \widehat{CAP} = 45^\circ$, Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên: $\widehat{MAH} = \widehat{MNH} = 45^\circ$. Gọi vector chỉ phương của AB là $\vec{u} = (a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$). Ta có vector chỉ phương của AH là $\vec{v} = (1; 1)$. Do $(AB; AH) = 45^\circ$ nên: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{ a+b }{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow ab = 0$. 	0,50
	TH1. $a = 0$: Chọn $b = 1$, ta có $\vec{u} = (0; 1)$. Khi đó, $(AB): x - 3 = 0$. Do $A = AH \cap AB$ nên $A(3; 9)$. Do M là trung điểm của AB nên $B(3; 3)$. Do $AH \parallel BD$ và $AH \perp AC$ nên $AC: x + y - 12 = 0, BD: x - y = 0$. Suy ra tâm I của hình vuông $ABCD$ có tọa độ là $I(6; 6)$. Từ đó có $C(9; 3), D(9; 9)$. TH2. $b = 0$: Chọn $a = 1$, ta có $\vec{u} = (1; 0)$. Khi đó, $(AB): y - 6 = 0$. Do $A = AH \cap AB$ nên $A(0; 6)$. Do M là trung điểm của AB nên $B(6; 6)$. Do $AH \parallel BD$ và $AH \perp AC$ nên $AC: x + y - 6 = 0, BD: x - y = 0$. Suy ra tâm I của hình vuông $ABCD$ có tọa độ là $I(3; 3)$. Từ đó có $C(6; 0), D(0; 0)$.	0,50
	Ta có $x^4 - x^2y - 3x^2 - y = 4 \Leftrightarrow x^4 - (y+3)x^2 - y - 4 = 0$. Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành: $t^2 - (y+3)t - y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = y + 4 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - 4 \text{ và } y \geq -4$.	0,25
	Thay $y = x^2 - 4$ vào phương trình còn lại ta được: $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 1) = 6(x - 1)^2$ $\Leftrightarrow (x^2 - 4)[x^2 - 4 - 5(x - 1)] - 6(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 - 5(x^2 - 4)(x - 1) - 6(x - 1)^2 = 0$.	0,25
9 (1,0đ)	Đặt $u = x^2 - 4, v = x - 1$, ta có phương trình: $u^3 - 5uv - 6v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ u = 6v \end{cases}$. $u = -v \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$. +) Với $x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ ta có $y = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ (TM). +) Với $x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ ta có $y = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ (TM). $u = 6v \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$. +) Với $x = 3 + \sqrt{7}$ ta có $y = 12 + 6\sqrt{7}$ (TM). +) Với $x = 3 - \sqrt{7}$ ta có $y = 12 - 6\sqrt{7}$ (TM). Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{3 - \sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right), (3 + \sqrt{7}; 12 + 6\sqrt{7}), (3 - \sqrt{7}; 12 - 6\sqrt{7})$.	0,25
10 (1,0đ)	Giả sử được $z = \min\{x; y; z\}$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{x+1}{y+1} - \frac{x}{y} + \frac{y+1}{z+1} - \frac{y}{z} + \frac{z+1}{x+1} - \frac{z}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leq 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{x-y}{x(x+1)}\right) + \left(\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{y-z}{x(x+1)}\right) \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x+y+1)}{xy(x+1)(y+1)} + \frac{(y-z)(x-z)(x+z+1)}{xz(x+1)(z+1)} \geq 0$: (đúng) Vậy bất đẳng thức được chứng minh.	1,00