

SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH TRƯỜNG THPT HỒNG LĨNH ĐỀ CHÍNH THỨC	KÌ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG LỚP 12 NĂM HỌC 2016 - 2017 MÔN: TOÁN <i>Thời gian làm bài: 120 phút</i>
--	---

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Tìm điều kiện của tham số a để hàm số $y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3(2a+1)x + 1$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2\sqrt{5}$

b) Giải bất phương trình $2x^3 + x + (2x-3)\sqrt{1-x} > 0$

Câu 2. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:

$$x + \sqrt{4-x^2} = m + x\sqrt{4-x^2}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng SD. Tính theo a khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD) và góc giữa đường thẳng SC với (ABCD).

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - (a^2 + b^2)$$

_____ Hết _____

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN LỚP 12

Câu	Đáp án	Điểm
1.a	Ta có $y' = 3x^2 - 6(a-1)x + 3(2a+1)$ Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4 \\ a < 0 \end{cases} (*)$	1,0
	$x_1 - x_2 \leq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 20 \Leftrightarrow 4(a-1)^2 - 4(2a+1) \leq 20$ $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 5$. Kết hợp điều kiện (*) ta được: $\begin{cases} 4 < a \leq 5 \\ -1 \leq a < 0 \end{cases}$	1,0
1.b	ĐK: $x \leq 1$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow 2x^3 + x > 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x}$ (2) Xét hàm số $y = f(t) = 2t^3 + t$, ta có: $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.	1,0
	(2) $\Leftrightarrow f(x) > f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Kết hợp với điều kiện $x \leq 1$, suy ra BPT có nghiệm là: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 1$	1,0
2	Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$. Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$. Xem t là hàm số của x, xét hàm số t trên $[-2;2]$: $t' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Bảng biến thiên của t trên $[-2;2]$: Điều kiện của ẩn t là: $-2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ (Thí sinh phải trình bày được cách	1,0

	tìm điều kiện của t, nếu điều kiện sai thì không tính điểm) $t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}. \text{ PT trở thành } -\frac{1}{2}t^2 + t + 2 = m$ Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 2$ trên tập $[-2; 2\sqrt{2}]$. $f'(t) = -t + 1$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Bảng biến thiên: Từ bảng biến thiên của $f(t)$, phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in [-2; 2\sqrt{2}] \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{5}{2}$.	1,0
3	H là trung điểm AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$, $SH = a\sqrt{3}$ $d(C, (SAD)) = d(B, (SAD)) = a\sqrt{3}$	1,0
	$AC \perp (SHD)$, $AC \perp HD \Rightarrow \angle AHD = \angle DAC \Rightarrow$ Hai tam giác ADH và DCA đồng dạng $\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow AD = a\sqrt{2} \Rightarrow CH = a\sqrt{3}$ (Thí sinh phải trình bày được cách tính CH) Gọi α là góc giữa SC và (ABCD) $\Rightarrow \alpha = 45^\circ$	1,0
4	$P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - (a^2 + b^2) = 3 \frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{(a+b) + ab + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$ Đặt $t = a + b \Rightarrow ab = 3 - t \Rightarrow t < 3$ và $P = 3 \cdot \frac{t^2 - 2(3-t) + t}{(3-t) + t + 1} + \frac{3-t}{t} - t^2 + 2(3-t)$ $= \frac{1}{4} \left[-t^2 + t + \frac{12}{t} + 2 \right].$ Ta có: $3-t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{t^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 + 4t - 12 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow t \geq 2$	1,0

	Do đó: $2 \leq t < 3$	
	Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + \frac{12}{t} + 2$ với $2 \leq t < 3 \Rightarrow f'(t) = -2t + 1 - \frac{12}{t^2} < 0$ Hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $[2;3)$ $f(t) \leq f(2) = 6, \forall t \in [2,3)$ $\Rightarrow P \leq \frac{3}{2}$ Vậy $\text{Max}P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = 1$.	1,0

Chú ý: Mọi cách giải đúng khác đều cho điểm tương ứng.