

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm thuộc $[0; \pi]$

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 1 - 2\cos 2x \quad (\text{Với } m \text{ là tham số})$$

2. Chứng minh tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \cos A + \cos B + \cos C \text{ thì tam giác } ABC \text{ vuông.}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Tính giá trị biểu thức:

$$A = \left(C_{2018}^0\right)^2 - \left(C_{2018}^1\right)^2 + \left(C_{2018}^2\right)^2 - \left(C_{2018}^3\right)^2 + \dots - \left(C_{2018}^{2015}\right)^2 + \left(C_{2018}^{2016}\right)^2 - \left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \left(C_{2018}^{2018}\right)^2$$

Câu 3. (4,0 điểm) Chứng minh rằng dãy số sau tăng và bị chặn trên

$$u_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{3}}} \quad (n \text{ dấu căn})$$

Câu 4. (4,0 điểm)

$$\text{Tìm giới hạn dãy số } (u_n) \text{ xác định như sau: } \begin{cases} u_1 = 2018 \\ u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2018^n}, (n \geq 1) \end{cases}$$

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (α) song song với AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện là tứ giác $PQRS$.

- 1) Chứng minh rằng $PQRS$ là hình bình hành.
- 2) Xác định mặt phẳng (α) để $PQRS$ là hình thoi.
- 3) Xác định mặt phẳng (α) để $PQRS$ có diện tích lớn nhất.

----- Hết -----

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

ĐÁP ÁN BIỂU ĐIỂM

Câu	Yêu cầu	Điểm
1 (4,0)	1. (2,0 điểm)	
	Phương trình đã cho tương đương với: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0$	0,5
	Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$	0,5
	Để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $[0; \pi]$ thì phương trình : $\cos 2x = \frac{1-m}{2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$.	0,5
	Từ đó ta được $m < -1 \vee m > 3 \vee m = 0$.	0,5
	2. (2,0 điểm)	
	$\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \cos A + \cos B + \cos C$ $\Leftrightarrow 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 1 + 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1$ $\Leftrightarrow 2\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2\cos^2 \frac{C}{2}$ $\Leftrightarrow (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2})(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2}) = 0$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-B=C \\ A-B=-C \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{C}{2} - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B+C \\ B=A+C \\ C=\frac{\pi}{2} \end{cases}$	1,0
	Vậy tam giác ABC vuông tại A , tại B hoặc tại C	
2 (2,0)	Xét đẳng thức $(1-x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = (1-x^2)^{2018}$	0,5
	+) Ta có $(1-x^2)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (-x^2)^k$ suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2018} là $-C_{2018}^{1009}$	0,5
	+) Ta có $(1-x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = \left(\sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (-x)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \right)$	1,0

	Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2018} là $C_{2018}^0 C_{2018}^{2018} - C_{2018}^1 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^2 C_{2018}^{2016} - C_{2018}^3 C_{2018}^{2015} + \dots + C_{2018}^{2018} C_{2018}^0$ $= (C_{2018}^0)^2 - (C_{2018}^1)^2 + (C_{2018}^2)^2 - (C_{2018}^3)^2 + \dots - (C_{2018}^{2017})^2 + (C_{2018}^{2018})^2$ Vậy $A = -C_{2018}^{1009}$	
3 (4,0)	Dãy số (u_n) được viết dưới dạng công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}, n \geq 1 \end{cases}$	1,0
	- Chứng minh (u_n) tăng tức $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$ (1) bằng phương pháp qui nạp	0,5
	Với $n=1$ thì $u_2 = \sqrt{3 + u_1} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3} = u_1$ (luôn đúng) Giả sử bất (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$) tức $u_{k+1} > u_k$	
	Cần chứng minh bất (1) đúng với $n = k + 1$ tức $u_{k+2} > u_{k+1}$	
	Thật vậy $u_{k+2} = \sqrt{3 + u_{k+1}} > \sqrt{3 + u_k} = u_{k+1}$ Từ đó bất (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$	
	- Chứng minh (u_n) bị chặn trên bởi 3 tức $u_n < 3, \forall n \geq 1$ (2) bằng phương pháp qui nạp.	0,5
	Với $n = 1$ thì $u_1 = \sqrt{3} < 3$ (luôn đúng) Giả sử bất (2) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$) tức $u_k < 3$	
	Cần chứng minh bất (2) đúng với $n = k + 1$ tức $u_{k+1} < 3$	
	Thật vậy $u_{k+1} = \sqrt{3 + u_k} < \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6} < 3$ Từ đó bất (2) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$	
4 (4,0)	$u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2018^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2018^n}$	0,5

	Do đó: $u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2018^1}$ $u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2018^2}$... $u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2018^{n-1}}$	0,5
	Suy ra: $u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2018^1} + \frac{1}{2018^2} + \dots + \frac{1}{2018^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2018}\right)^{n-1}}{2017}$ $u_n^n = 2018 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2018}\right)^{n-1}}{2017}$	1,0
	$1 < u_n^n = 2018 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2018}\right)^{n-1}}{2017} < 2019^n < \frac{1+1+\dots+1+2019}{n} = 1 + \frac{2018}{n}$ (Cô si)	1,0
	Mặt khác $\lim\left(1 + \frac{2018}{n}\right) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$	1,0
5 (6,0)		

	1) Giả sử $mp(\alpha)$ cắt AB,AD,CD,CB lần lượt tại P,Q,R,S Vì: $\begin{cases} BD // (\alpha) \\ (CBD) \cap (\alpha) = RS \Rightarrow RS // PQ // BD (1) \\ (ABD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases}$ Tương tự $PS // RQ // AC (2)$ Từ (1),(2) suy ra PQRS là hình bình hành.	2,0
	2) Dựng đường thẳng d qua A và song song với BD $\Rightarrow d \subset (ABD)$ Xét (ABD) giả sử DP cắt d tại I Ta có: $\frac{DQ}{DA} = \frac{PQ}{AI} = \frac{QR}{AC}$ (talet) PQRS là hình thoi $\Leftrightarrow PQ = RQ$ $\Rightarrow AI = AC$ Vậy ta có cách dựng $mp(\alpha)$ để PQRS là hình thoi như sau: Dựng đường thẳng d qua A và song song BD, trên d lấy I sao cho AI=AC, nối ID cắt AB tại P thì $mp(\alpha)$ là mp qua P và song song với AC và BD.	2,0
	3) Gọi β là góc giữa AC và BD. Vì $BD // PQ, AC // QR$ nên β là góc giữa PQ và QR không đổi. Do PQRS là hình bình hành nên $dtPQRS = QR.PQ.\sin \beta$ Vậy $dtPQRS$ lớn nhất $\Leftrightarrow QR.PQ$ lớn nhất. Ta có: $\begin{cases} \frac{QR}{AC} = \frac{QD}{AD} \\ \frac{PQ}{BD} = \frac{AQ}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{QR}{AC} + \frac{PQ}{BD} = 1$ Áp dụng bất côsi ta có: $1 = \frac{QR}{AC} + \frac{PQ}{BD} \geq 2\sqrt{\frac{QR.PQ}{AC.BD}}$ $\Rightarrow QR.PQ \leq \frac{AC.BD}{4}$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} QR = \frac{AC}{2} \\ PQ = \frac{BD}{2} \end{cases}$ Vậy dt PQRS lớn nhất khi $mp(\alpha)$ qua trung điểm của AB, AD, CD, CB.	2,0