

Bài 1 (1,0 điểm). Biết a và b là các số dương, $a \neq b$ và

$$\left(\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} \right) : \left(\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab \right) = 3. \text{ Tính } S = \frac{1+2ab}{a^2+b^2}.$$

Bài 2 (2,0 điểm). a) Giải phương trình $(x^2 - 6x + 5)(\sqrt{x-2} - x + 4) = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x+2y} - 3) = 0 \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6. \end{cases}$$

Bài 3 (2,0 điểm). Cho phương trình $(x+m)^2 - 5(x+m) + 6 = 0$ (1).

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi số thực m .

Tính $S = (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 + 5(x_1 + x_2 + 2m)$.

b) Biết $x_1 < x_2$, tìm m sao cho $x_2 < 1$ và $x_1^2 + 2x_2 = 2(m-1)$.

Bài 4 (2,0 điểm). a) Nam kể với Bình rằng ông của Nam có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ được chia thành bốn phần; hai phần (gồm các hình vuông $AMIQ$ và $INCP$ với M, N, P, Q lần lượt thuộc AB, BC, CD, DA) để trồng các loại rau sạch, các phần còn lại trồng hoa. Diện tích phần trồng rau sạch là $1200m^2$ và phần để trồng hoa là $1300m^2$. Bình nói: "Chắc chắn bạn bị nhầm rồi!". Nam: "Bạn nhanh thật! Mình đã nói nhầm phần diện tích. Chính xác là phần trồng rau sạch có diện tích $1300m^2$, còn lại $1200m^2$ trồng hoa". Hãy tính cạnh hình vuông $AMIQ$ (biết $AM < MB$) và giải thích vì sao Bình lại biết Nam bị nhầm?

b) Lớp 9T có 30 bạn, mỗi bạn dự định đóng góp mỗi tháng 70000 đồng và sau 3 tháng sẽ đủ tiền mua tặng cho mỗi em ở "Mái ấm tình thương X" ba gói quà (giá tiền các món quà đều như nhau). Khi các bạn đóng đủ số tiền như dự trù thì "Mái ấm tình thương X" đã nhận chăm sóc thêm 9 em và giá tiền của mỗi món quà lại tăng thêm 5% nên chỉ tặng được mỗi em hai gói quà. Hỏi có bao nhiêu em của "Mái ấm tình thương X" được nhận quà?

Bài 5 (3,0 điểm). Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) tâm O , bán kính R ; $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, H là trực tâm. AH, BH, CH lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P .

a) Tính AC theo R . Tính số đo góc $\widehat{HPN}$ và $\frac{MP}{MN}$.

b) Vẽ đường kính AD ; HD cắt (T) tại E ($E \neq D$) và cắt BC tại F . Chứng minh các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc một đường tròn và F là trung điểm của HD .

c) Chứng minh $AD \perp NP$. Tia OF cắt (T) tại I , chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và AI qua trung điểm của MP .

— HẾT —

Đề thi PTNK/2017-2018 ———Lời giải Bài 1

Ta có $\frac{(a+2b)^2 - (b+2a)^2}{a+b} = \frac{(3a+3b)(b-a)}{a+b} = 3(b-a);$
 $\frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{a-b} - 3ab = \frac{a^3 - b^3}{a-b} - 3ab = a^2 - 2ab + b^2 =$
 $(a-b)^2.$

Từ giả thiết suy ra $b-a=1$.

Do đó $1 = (b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, nên $a^2 + b^2 = 1 + 2ab$. Suy ra $S = 1$.

Đề thi PTNK-2017 ———Lời giải Bài 2a

Điều kiện: $x \geq 2$.

• $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 5 \text{ (nhận)} \end{cases}$

• $\sqrt{x-2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x = 5$ hoặc $x = 6$.

Đề thi PTNK-2017 ———Lời giải Bài 3

a) Đặt $t = x + m$, (1) trở thành

$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - m \\ x = 3 - m \end{cases}$

Rõ ràng $2 - m \neq 3 - m$, nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

$S = t_1^2 + t_2^2 + 5(t_1 + t_2) = 2^2 + 3^2 + 5(2 + 3) = 38.$

b) Ta có $x_1 < x_2$ suy ra $x_1 = 2 - m, x_2 = 3 - m$. Từ $x_2 < 1$ suy ra $3 - m < 1 \Leftrightarrow m > 2$.

$x_1^2 + 2x_2 = 2(m-1) \Leftrightarrow (2-m)^2 + 2(3-m) = 2(m-1)$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta được giá trị m cần tìm là $m = 6$.

Đề thi PTNK-2017 ———Lời giải Bài 4a

Đặt $AM = x$ (m), $CP = y$ (m). Từ giả thiết ta được: $x^2 + y^2 = 130$ và $2xy = 120$.

Áp dụng Định lý Viete đảo ta được $\begin{cases} x = 20, y = 30 \\ x = 30, y = 20. \end{cases}$

Do $AM < MB$ nên $x = 20$, nghĩa là $AM = 20$ m.

Bình biết Nam nói nhầm là do $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Đề thi PTNK-2017 ———Lời giải Bài 4b

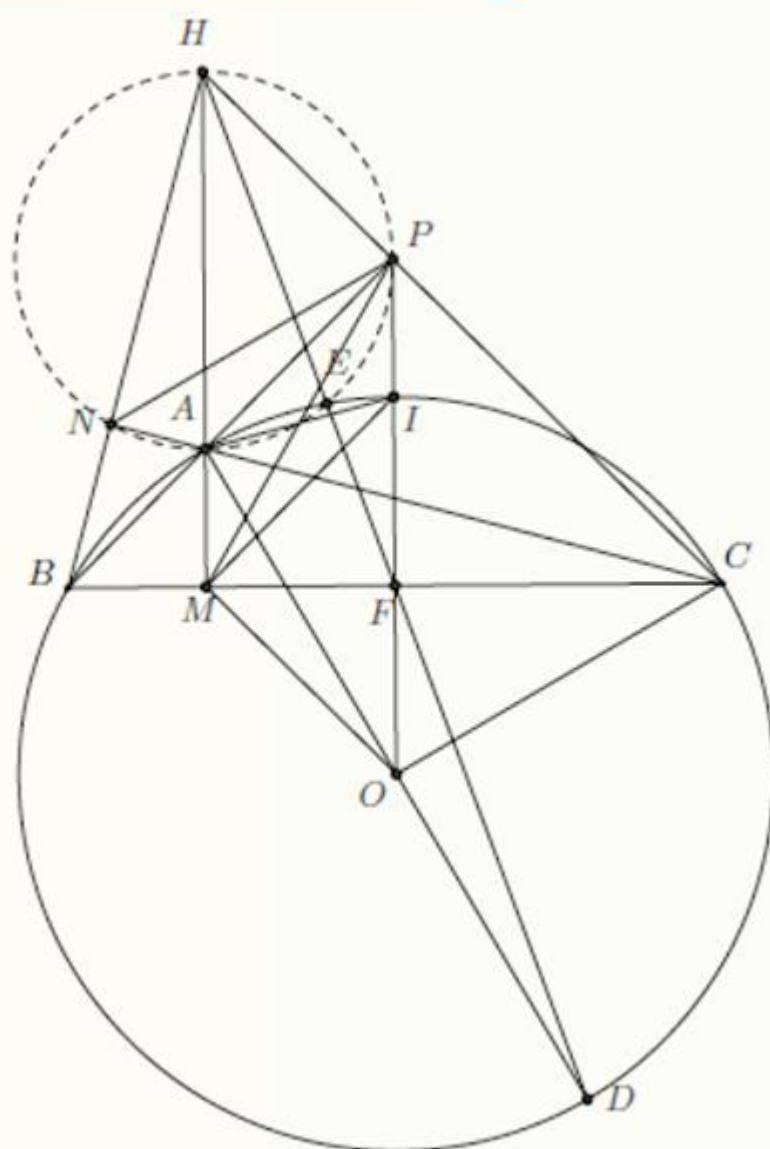
Gọi x (em) là số thành viên ban đầu của “Mái ấm tình thương X”.

Tổng số tiền lớp 9T dự định góp là $30.3.70000 = 6300000$ (đồng)

Từ giả thiết ta có phương trình: $\frac{6300000}{3x}(1 + 0,05) = \frac{6300000}{2(x + 9)}$

$\Leftrightarrow x = 21$.

Vậy số em của “Mái ấm tình thương X” được nhận quà là $21 + 9 = 30$ em.



a) Ta có $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 90^\circ$, nên $\triangle AOC$ vuông cân tại O . Do đó $AC = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$. Ta có $\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 15^\circ$. Tứ giác $BCPN$ nội tiếp đường tròn đường kính BC , suy ra $\widehat{HPN} = 90^\circ - \widehat{PNB} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Ta có $\widehat{NPA} = \widehat{ACB} = \widehat{APM}$, nên $\widehat{NPM} = 2\widehat{ACB} = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. Tương tự, $\widehat{MNP} = 2\widehat{CBA} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Do đó $\frac{MN}{MP} = \sin \widehat{NPM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

b) Ta có AD là đường kính nên $\widehat{AED} = 90^\circ$. Do đó các điểm A, N, H, P, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp CD$ nên $BH \parallel CD$.

Tương tự, $CH \parallel BD$, nên $BHCD$ là hình bình hành. Suy ra F là trung điểm của HD .

c) Ta có $\widehat{CNP} = \widehat{CBP} = 45^\circ = \widehat{NCO}$, nên $NP \parallel CO$. Mà $CO \perp AD$, nên $NP \perp AD$. Từ câu b) suy ra F là trung điểm cạnh BC , nên OF là trung trực của BC . Mà I thuộc OF , suy ra $\widehat{BIO} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^\circ$. Do đó tam giác BIO đều. Suy ra $IB = IO = R$. Tương tự $IC = R$. Hơn nữa, ta được F là trung điểm IO , do đó $OHID$ là hình bình hành. Suy ra $IH = OD = R$. Vậy $IH = IB = IC$, nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC . Ta có $\triangle ABM$ vuông cân tại M , nên $MA = MB$, mà $OA = OB$, suy ra $OM \perp AB$. Do đó $OM \parallel HP$. Mà $MH \parallel OP$, nên $MHPO$ là hình bình hành. Suy ra $MH = OP$. Mà $AH = OI$, nên $AM = IP$. Do đó $AMIP$ là hình bình hành. Suy ra AI đi qua trung điểm của MP .