

Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 môn Toán Phòng GD&ĐT huyện Thăng Bình năm học 2018 - 2019

UBND HUYỆN THĂNG BÌNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học: 2018 - 2019
Ngày thi: 24/10/2018
Môn: TOÁN
 Thời gian làm bài: 150 phút (không tính thời gian giao đề)

Câu 1. (3,0 điểm)
 Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2}$ (với $0 < x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = P - 9\sqrt{x} + 2019$.

Câu 2. (4,0 điểm)
 a) Giải phương trình $x-1+4\sqrt{7-x}=4\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}$.
 b) Cho các số thực dương a, b với $a \neq b$. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} = \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a} = 0.$$

Câu 3. (3,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a(a^2+8bc)} + \frac{1}{b(b^2+8ac)} + \frac{1}{c(c^2+8ab)} \leq \frac{1}{3abc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4. (4,0 điểm)
 a) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n-50$ và $n+50$ đều là số chính phương.
 b) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 = 8q + 1$.

Câu 5. (2,5 điểm). Trong tam giác ABC lấy điểm O sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và AC .

a) Chứng minh rằng $OB \cdot \sin \widehat{OAC} = OC \cdot \sin \widehat{OAB}$.
 b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và HK . Chứng minh rằng MN vuông góc với HK .

Câu 6. (3,5 điểm). Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Đường thẳng d là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C và gọi D là hình chiếu của C trên AB . Từ A và B kẻ AH và BK vuông góc với đường thẳng d . Chứng minh rằng:

a) $AH + BK$ không đổi khi tiếp tuyến d thay đổi trên đường tròn (O).
 b) Đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AH, BK và AB .
 c) Xác định vị trí điểm C để tứ giác $AHKB$ có diện tích lớn nhất.

==Hết==

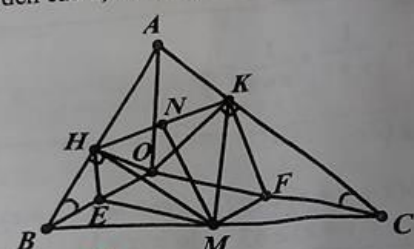
Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.
 Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

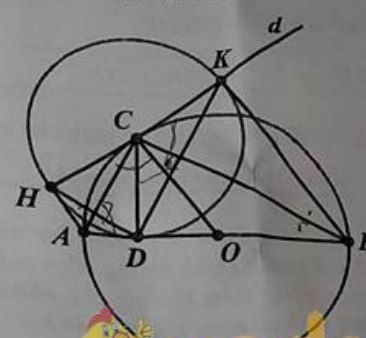
**Đáp án đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 môn Toán Phòng GD&ĐT huyện
Thăng Bình năm học 2018 - 2019**

UBND HUYỆN THĂNG BÌNH PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO		
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2018 - 2019 NGÀY THI: 24/10/2018		
Câu	Đáp án	Điểm
1	a) 1,5 điểm Ta có $P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$	0,5
	$= \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right] : \frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$	0,5
	$= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$	0,5
	b) 1,5 điểm Ta có $Q = P - 9\sqrt{x} + 2019$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} - 9\sqrt{x} + 2019$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x} - 1 - 9x}{\sqrt{x}} + 2019$	0,5
	$= \frac{-(9x - 6\sqrt{x} + 1) - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 2019$	0,5
	$= \frac{-(3\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} - 5 + 2019 = 2014 - \frac{(3\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \leq 2014 \quad (\forall x > 0).$	0,5
	Vậy $\max Q = 2014 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$	0,5

	a) 2,0 điểm Điều kiện: $\begin{cases} 7-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7.$	0,25
2	Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{x-1})^2 - \sqrt{(7-x)(x-1)} + 4(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) + 4(\sqrt{7-x} - \sqrt{x-1}) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x})(\sqrt{x-1} - 4) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \\ \sqrt{x-1} = 4 \end{cases}$	0,5
	$\sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \Leftrightarrow x-1 = 7-x \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa điều kiện). $\sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$ (không thỏa điều kiện). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.	0,25
2	b) 2,0 điểm Biến đổi vế trái của đẳng thức, ta có	
(4c)	$VT = \frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a} + \frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$ $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3 - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$	0,5
	$= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	0,5
	$= \frac{3\sqrt{a}(a+\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	0,5
	$= \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = 0.$	0,5

	Do $abc > 0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{abc}{a^3 + 8abc} + \frac{abc}{b^3 + 8abc} + \frac{abc}{c^3 + 8abc} \leq \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a^2}{bc} + 8} + \frac{1}{\frac{b^2}{ca} + 8} + \frac{1}{\frac{c^2}{ab} + 8} \leq \frac{1}{3}$	0,5
3	Đặt $x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}$ với $xyz = 1$ (1)	0,5
(2,5)	Bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{1}{x+8} + \frac{1}{y+8} + \frac{1}{z+8} \leq \frac{1}{3}$	0,5
	Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2). Ta có (2) $\Leftrightarrow 3[(xy + yz + zx) + 16(x + y + z) + 192] \leq xyz + 8(x + y + z) + 512$ $\Leftrightarrow 5(xy + yz + zx) + 16(x + y + z) \geq 63$ (do $xyz = 1$). (3)	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $xy + yz + zx \geq 3\sqrt{(xyz)^2} = 3$ và $x + y + z \geq 3\sqrt{xyz} = 3$.	0,5
	Do đó ta chứng minh xong bất đẳng thức (3). Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.	0,5
	a) 2,0 điểm Giả sử $\begin{cases} n-50 = a^2 \\ n+50 = b^2 \end{cases}$ với a, b nguyên dương và $a < b$. (0,5)	0,5
	Suy ra $b^2 - a^2 = 100 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) = 2^2 \cdot 5^2$.	0,5
2	Do $b-a < b+a$ và chúng có cùng tính chẵn lẻ nên $a+b$ và $b-a$ phải là các số chẵn.	0,5
	Do đó $\begin{cases} b-a = 2 \\ b+a = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 26 \end{cases}$ Vậy $n = 626$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (0,5)	0,5
4	b) 2,0 điểm Ta có $p^2 = 8q + 1 \Rightarrow 8q = p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$ (1) Do $p^2 = 8q + 1$ nên p^2 lẻ, suy p lẻ, tức là $p = 2k + 1$.	0,5

	Thay vào (1) ta được: $8q = 2k(2k+2) \Rightarrow 2q = k(k+1)$ (2)	0,5
	Nếu $q=2$ thì $k(k+1)=4$, không thể tìm được $k \in \mathbb{N}$. Do đó $q > 2$.	0,5
	Vì q là số nguyên tố nên $(2, q) = 1$. Từ (2) ta có: $k=2$ và $q=k+1$ ta suy ra $k=2, q=3$. Thay vào (1) được $p=5$. $k=q$ và $k+1=2$ nên $q=1$ (loại).	0,5
	Vậy $(p; q) = (5; 3)$ là cặp số cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Hình vẽ đúng đến câu a) được 0,25 điểm.	0,25
		0,25
5	a) 1,0 điểm Ta có	0,25
	$\frac{OB}{OC} = \frac{OH : \sin \widehat{OBH}}{OK : \sin \widehat{OCK}} \quad (\text{do } \triangle OBH, \triangle OCK \text{ lần lượt vuông tại } H, K)$	0,25
	$= \frac{OH}{OK} \quad (\text{do } \widehat{ABO} = \widehat{ACO})$	0,25
	$= \frac{OA \cdot \sin \widehat{OAH}}{OA \cdot \sin \widehat{OAK}} \quad (\text{do } \triangle OAH, \triangle OAK \text{ lần lượt vuông tại } H, K)$	0,25
	$= \frac{\sin \widehat{OAB}}{\sin \widehat{OAC}} \quad \text{hay } OB \cdot \sin \widehat{OAC} = OC \cdot \sin \widehat{OAB}.$	0,25
	b) 1,25 điểm Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OB, OC.	0,25
	Do MEOF là hình bình hành nên $\widehat{MEO} = \widehat{MFO}$ (1)	0,25
	Ta có $\widehat{OEH} = 2\widehat{ABO} = 2\widehat{ACO} = \widehat{OFK} \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MEH} = \widehat{MFK}$.	0,25
	Lại có $ME = OF = FK; EH = EO = MF$ nên $\triangle MEH = \triangle MFK$ (c.g.c).	0,25
	Suy ra $MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M $\Rightarrow MN \perp HK$.	0,25

Hình vẽ đúng đến câu a) được 0,25 điểm 		0,25
6	a) 1,25 điểm Do C nằm trên đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Do d là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C nên $\widehat{OCK} = 90^\circ$. Khi đó $\widehat{ACO} + \widehat{OCB} = \widehat{OCB} + \widehat{BCK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{BCK} \quad (1)$ Mặt khác $\triangle OAC$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{CAO}$; (2) $\triangle ACB$ vuông và $CD \perp AB \Rightarrow \widehat{CAO} = \widehat{DCB}$. (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{DCB} = \widehat{BCK}$. Điều này dẫn đến $\triangle BCD = \triangle BCK \Rightarrow BK = BD$. Tương tự $AH = AD$. Suy ra $AH + BK = AD + DB \Rightarrow AH + BK = AB$. Vậy $AH + BK$ không đổi khi tiếp tuyến d thay đổi trên đường tròn (O).	0,25
	b) 1,0 điểm $\triangle BCD = \triangle BCK$ (chứng minh ở câu a)) $\Rightarrow CD = CK$. Tương tự $\triangle CHA = \triangle CDA \Rightarrow CD = CH$. Suy ra $CH = CK$ hay C là trung điểm HK.	0,25
	Đường tròn đường kính HK có $AH \perp HK, BK \perp HK, AB \perp CD$ nên đường tròn đó luôn tiếp xúc với AH, BK và AB.	0,25
	c) 1,0 điểm Do tứ giác AHKB có $AH \perp HK, BK \perp HK$ nên nó là hình thang vuông.	0,25

Do $AH + BK = AB$ nên $S_{AHKB} = \frac{1}{2}(AH + BK)HK = \frac{1}{2}AB.HK = OC.HK$	0,25
Do $HK \leq AB$ nên $S_{AHKB} \leq OC.AB = OC.2OC = 2OC^2$.	0,25
Khi đó S_{AHKB} lớn nhất $\Leftrightarrow HK = AB \Leftrightarrow$ tứ giác $AHKB$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa $\widehat{AB}$.	0,25

Xem tiếp tài liệu tại: <https://vndoc.com/tai-lieu-hoc-tap-lop-9>