

SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT ĐAN PHƯỢNG

Đề chính thức
(Đề thi có 1 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN: TOÁN

Năm học: 2018-2019
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I (6 điểm)

1) Cho parabol $(P): y = 2x^2 + 6x - 1$;

Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = (k+6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng $d: y = -2x + \frac{3}{2}$

2) Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(3x_1 + 3x_2 + 8)$$

Câu II (5 điểm):

1) Giải bất phương trình: $(x+1)(x+4) \leq 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \quad (x \in \mathbb{R})$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$$

Câu III (2 điểm). Cho $x > 0, y > 0$ là những số thay đổi thỏa mãn $\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$

Câu IV (4 điểm)

1) Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b$ diện tích bằng S .

Tính số đo các góc của tam giác này biết $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

2) Cho tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh bằng a . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = \frac{a}{3}, CM = \frac{2a}{3}, AP = x (0 < x < a)$.

Tìm giá trị của x theo a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM

Câu IV (3 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD . Biết diện tích hình thang bằng 14 (đơn vị diện tích), đỉnh $A(1;1)$ và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN

Câu I:

Câu I 6 điểm	Nội dung	Điểm
	Tìm m... với parabol $y = 2x^2 + 6x - 1$	
	Để đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình $2x^2 + 6x - 1 = 4x + 6x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ hay phương trình : $2x^2 - kx - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ có $\Delta = k^2 + 16 > 0$	0.75
	Khi đó giao điểm $M(x_1; (k+6)x_1 + 1), N(x_2; (k+6)x_2 + 1)$ nên trung điểm của đoạn thẳng MN là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{(k+6)x_1 + 1 + (k+6)x_2 + 1}{2}\right)$	0.75
	Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$ nên $I\left(\frac{k}{4}; \frac{2 + 3k + \frac{1}{2}k^2}{2}\right)$	0.75
	Do I thuộc đường thẳng $y = -2x + \frac{3}{2}$ nên $k^2 + 8k - 2 = 0$ hay $k = -4 \pm 3\sqrt{2}$ thì thỏa mãn bài toán.	0.75
2. 3 điểm	Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số); $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(3x_1 + 3x_2 + 8)$	
	Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \leq 4$ khi $\begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + m^3 - (m+1)^2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = 2(m-1) \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 4m \geq 0 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ 2 \leq m \leq 3 \end{cases} (*)$	0.75
	Với m thỏa mãn điều kiện (*), áp dụng Viet ta có :	0.75

	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = -m^3 + (m+1)^2 \end{cases}$ Nên $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2(3x_1 + 3x_2 + 8) = (x_1 + x_2)^3 + 8x_1x_2$ $= 8(m-1)^3 + 8(-m^3 + (m+1)^2)$ $= 8[-3m^2 + 3m - 1 + m^2 + 2m + 1] = 8[-2m^2 + 5m] = -16m^2 + 40m$ Ta có bảng biến thiên hàm số trên miền điều kiện Ta có giá trị lớn nhất của P là 16 khi $m = 2$ Giá trị nhỏ nhất của P là -144 khi $m = -2$	0.75 0.75
--	--	-------------------------

Câu II

Câu II	Nội dung	Điểm
1. 2 điểm	Đk: $x \in \mathbb{R}$	0.5
	Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 28 - 24 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \leq 0$	
	Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28} (t > 0)$	0.5
	Bất phương trình trở thành $t^2 - 5t - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 8$	
	So sánh điều kiện ta được $0 < t \leq 8$	0.5
	Với $0 < t \leq 8 \Rightarrow x^2 + 5x + 28 \leq 64 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 4$	0.5
	KL đúng	
2. (3 điểm)		
	ĐKXD: $y \geq -1,5$	
	$(2) \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3(x^2 + y^2) + 2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3$	0.5
	$\Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$	0.5

	Thay vào phương trình thứ nhất ta được; $x^2 - 3x + 1 = -\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = 1-x \\ \sqrt{2x-1} = x \end{cases} \text{ (Có thể bình phương được phương trình: } (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0)$	1.0
	Giải hai pt này ta được $x=1, x=2-\sqrt{2}$. Thử lại nghiệm... KL: Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x; y) = (1; -1), (2-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	1.0

Câu III

Câu III	Nội dung	Điểm
1. 2 điểm	$P = (x+y) \left(\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} \right)$ Có $= 2018 + \frac{2018y}{x} + \frac{2019x}{y} + 2019$	0.5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương $\frac{2018y}{x}$ và $\frac{2019x}{y}$ ta được $\frac{2018y}{x} + \frac{2019x}{y} \geq 2\sqrt{2018 \cdot 2019}$ Suy ra $P \geq (\sqrt{2018} + \sqrt{2019})^2$	0.5
	GTNN của P là $(\sqrt{2018} + \sqrt{2019})^2$ khi $\begin{cases} x > 0; y > 0 \\ \frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 10.5 \\ \frac{2018y}{x} = \frac{2019x}{y} \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2018}(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}) \\ y = \sqrt{2019}(\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \end{cases}$	0,5

Câu IV

Câu IV	Nội dung	Điểm
1. 2 điểm	Ta có $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}ab \sin C$	0,5
	$\Leftrightarrow (a^2 + b^2) = 2ab \sin C$ $\Leftrightarrow (a - b)^2 + 2ab(1 - \sin C) = 0 \quad (1)$	0,5
	Hai số hạng của tổng (1) đều không âm nên $\begin{cases} a - b = 0 \\ 1 - \sin C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ \sin C = 1 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} A = B = 45^\circ \\ C = 90^\circ \end{cases}$ KL đúng	0,5
1. 2 điểm	Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	0,5
	Ta lại có $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB}$	0,5
	$AN \perp PM \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2x}{3a}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{5x}{6a} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4a}{15} \text{ . KL đúng}$	0,5

Câu V

Câu V	Nội dung	Điểm
3 điểm	Gọi $E = AH \cap DC$ Dễ thấy $\Delta HAB = \Delta HEC \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABCD} = 14$	0.5
	$AH = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $AE = 2AH = \sqrt{13}$, phương trình tổng quát của đường thẳng AE: $2x - 3y + 1 = 0$	0.5
	$D \in d \Rightarrow D(d; 5d + 1), d > 0$ $S_{ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot d(D, AE) = 14 \Leftrightarrow d(D, AE) = \frac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ d = -\frac{30}{13} (L) \end{cases}$	0.5
	Suy ra $D(2; 11)$ + H là trung điểm AE $\Rightarrow E(-2; -1)$	0.5
	Phương trình tổng quát của CD: $3x - y + 5 = 0$	0.5
	Đường thẳng AB đi qua A và song song với CD PT tổng quát của AB : $3x - y - 2 = 0$	0.5