

CHỦ ĐỀ : RÚT GỌN BIỂU THỨC

BÀI TOÁN PHỤ

A. LÝ THUYẾT

1. CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$.
2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$).
3. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (với $A \geq 0; B > 0$).
4. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$ (với $B \geq 0$).
5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0$).
6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ (với $A < 0; B \geq 0$).
7. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB}$ (với $A.B \geq 0; B \neq 0$).
8. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B > 0$).
9. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ (với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$).
10. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ (với $A \geq 0; B \geq 0; A \neq B$).
11. $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$.

2. XÁC ĐỊNH NHANH ĐIỀU KIỆN CỦA BIỂU THỨC

- $\sqrt{A} \Rightarrow \text{ĐKXD: } A \geq 0$. Ví dụ: $\sqrt{x - 2018} \Rightarrow \text{ĐKXD: } x \geq 2018$.
- $\frac{A}{B} \Rightarrow \text{ĐKXD: } B \neq 0$. Ví dụ: $\frac{x + 2}{x - 3} \Rightarrow \text{ĐKXD: } x \neq 3$.
- $\frac{A}{\sqrt{B}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } B > 0$. Ví dụ: $\frac{x + 2}{\sqrt{x - 3}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } x > 3$.
- $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } A \geq 0; B > 0$. Ví dụ: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - 3}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.
- $\sqrt{\frac{A}{B}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \\ A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$. Ví dụ: $\sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}} \Rightarrow \text{ĐKXD: } \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x + 2 < 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq 1 \end{cases}$.
- Cho $a > 0$ ta có $x^2 > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{cases}$. Ví dụ: $x^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

- Cho $a > 0$ ta có $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$. **Ví dụ:** $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Chú ý 1: Giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Dạng tổng quát 1: $|A(x)| = k \Leftrightarrow A(x) = \pm k$ với k là hằng số.
- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$.
- Dạng tổng quát 3: $|A(x)| = B(x)$

Trường hợp 1: Nếu $A(x) \geq 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = B(x)$.

Trường hợp 2: Nếu $A(x) < 0$ thì phương trình trở thành $A(x) = -B(x)$.

Chú ý 2: Giải bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

- Dạng tổng quát 1: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| < k \Leftrightarrow -k < f(x) < k$.

- Dạng tổng quát 2: $|A(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$.

Đặc biệt với hằng số $k > 0$ thì $|f(x)| > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > k \\ f(x) < -k \end{cases}$.

- Dạng tổng quát 3:

$$+) |f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2.$$

$$+) |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2.$$

Chú ý 3: Bất đẳng thức Cô - si cho hai số a, b không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Chú ý: Với hai số a, b bất kỳ ta luôn có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ: Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Vì $x \geq 1 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có $A = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ: Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = x + \frac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Cách giải sai: Vì $x \geq 2 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có $B = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn vì $x \geq 2$).

Vậy $B_{\min} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Gợi ý cách giải đúng:

Dự đoán $B_{\min}$ đạt được tại $x = 2$. Ta có $B = nx + \frac{1}{x} + x - nx$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} nx = \frac{1}{x} \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó ta có $A = \frac{3x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô - si $\frac{4}{x} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \geq 2$).

Vậy $B_{\min} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ: Cho $x \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = x + \frac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Tương tự ta có $C = x + \frac{1}{x} = \frac{8x}{9} + \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{10}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 3$.

Ví dụ: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$. Với $x \geq 0$.

Hướng dẫn

Gợi ý: $D = (\sqrt{x} + 2) + \frac{16}{\sqrt{x} + 2} - 4 \geq 4$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 4$.

3. Các bước rút gọn một biểu thức

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân số tối giản thì ta đã hoàn thành việc rút gọn.

Ví dụ: Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}+1\right)$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \left[\frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right] \\ A &= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \left(\frac{x+1+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}} \right) \\ A &= \left[\frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

$$A = \left[\frac{x + \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$A = \left[\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 1)} \right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$A = \frac{2}{x - 1}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Các bài toán rút gọn, tính giá trị của biểu thức chứa số

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt{4 - \sqrt{12}}$

c) $C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$

d) $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{4 + \sqrt{12}}$

Hướng dẫn

a) $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\sqrt{5} - 1| = \sqrt{5} - 1.$

b) $B = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1.$

c) $C = \sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} = |\sqrt{3} - 4| = 4 - \sqrt{3}.$

d) $D = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| - |\sqrt{3} + 1|$
 $= \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 = -1 - \sqrt{2}.$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) $B = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

c) $C = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

d) $D = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

b) $B = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

c) $C = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$

d) $D = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

b) $B = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

c) $C = (\sqrt{14} + \sqrt{6})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$

d) $D = \frac{3 + 3\sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{10}}{6 + 2\sqrt{5}}.$

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

b) $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

c) $C = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$

d) $D = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức.

a) $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

b) $B = \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$

c) $C = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

d) $D = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}.$

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức.

$$a) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$b) \sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}.$$

$$c) \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}.$$

Các bài toán rút gọn chứa ẩn và bài toán phụ

Dạng 1: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC A KHI $x = x_0$

Phương pháp: Rút gọn giá trị của biến (nếu cần) sau đó thay vào biểu thức đã cho rồi thay vào biểu thức đã cho rồi tính kết quả.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = 2x + |x - 4|$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá của A khi $x = 3$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A = 2x + |x - 4| &= \begin{cases} 2x + x - 4 & \text{nếu } x \geq 4 \\ 2x - (x - 4) & \text{nếu } x < 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3x - 4 & \text{nếu } x \geq 4 \\ x + 4 & \text{nếu } x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi $x = 3 < 4$ thì giá trị của A là: $A = 3 + 4 = 7$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2 - 5\sqrt{x}}{4 - x}$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A biết $x = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{4x}{(x - 1)^2}$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A biết $|x - 5| = 4$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x - y} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} + \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A biết $x = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 9} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$.

a) Rút gọn A .

b) Tính giá trị của A biết $x = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

c) Tính giá trị của A biết $x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$.

d) Tính giá trị của A biết $x = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3} + 1}} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3} - 1}} \right)$.

Dạng 2: TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

• Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A = k$ thì ta biến đổi $A - k = 0$ tính kết quả, kết hợp với điều kiện để kết luận.

• Nếu bài toán yêu cầu tìm x để $A > k$ ($\geq, \leq, < k$). Ta đi đánh giá dựa vào điều kiện hoặc đi xét hiệu $A - k > 0$ với điều kiện của đề bài để tìm x .

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Tìm x để $A = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Ta có $A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36$ (thỏa mãn điều kiện).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{x + 4\sqrt{x} + 4} \right) : \left(\frac{2}{x - 4} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right)$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm x để $A = 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm x sao cho $P = 2$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Tìm x để $A > 1$.

Hướng dẫn

Ta có $A > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - 3} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} - 3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 3} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 4 > 0 \\ \sqrt{x} - 3 < 0 \\ \sqrt{x} - 4 < 0 \\ \sqrt{x} - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 16 \\ x < 9 \\ x < 16 \\ x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow 9 < x < 16 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$. Tìm x để $A < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Cách 1: Ta có $A < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{-13}{2(2\sqrt{x} + 1)} < 0$ luôn đúng với $x \geq 0$.

Vậy $A < \frac{3}{2}$ với $x \geq 0$.

Cách 2: Xét hiệu $A - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{3}{2} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x} + 1)} < 0$

Vậy $A < \frac{3}{2}$ với $x \geq 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{3}{x\sqrt{x}-9\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{3\sqrt{x}-3}{x+3\sqrt{x}} \right)$.

- a) Rút gọn A .
b) Tìm x để $A > 1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2-2x}{2x^2+8} + \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

- a) Rút gọn A .
b) Giải bất phương trình $A > \frac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

- a) Rút gọn P .
b) Biết $M = P : Q$. Tìm giá trị của x để $M^2 < \frac{1}{4}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{18+8\sqrt{2}} + 8$.
b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.
c) Tìm giá trị nguyên của x để $P\sqrt{x} \geq -\frac{3}{2}$.

Dạng 3: SO SÁNH BIỂU THỨC A VỚI k HOẶC BIỂU THỨC B (k LÀ HẰNG SỐ)

Phương pháp: Nếu đề bài yêu cầu so sánh biểu thức A với hằng số k hay biểu thức khác là B thì ta đi xét hiệu $A - k, A - B$ và xét dấu biểu thức này rồi kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 9$ và $x \neq 25$.

- a) Rút gọn A .
b) Hãy so sánh $P = \frac{A}{B}$ với 1.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.

b) Ta có: $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} : \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

Xét hiệu: $P - 1 = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - 1 = \frac{-8}{\sqrt{x}+3} < 0$ với $x \geq 0, x \neq 9$ và $x \neq 25$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

- a) Rút gọn A .
b) Hãy so sánh A với 1.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn A .
b) Hãy so sánh A với $\frac{1}{2}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1} \right)$

với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Hãy so sánh A với $\frac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3}\right) : \left[\frac{6\sqrt{x}+1}{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right]$.

a) Rút gọn A .

b) Hãy so sánh A với $\frac{3}{2}$.

Dạng 4: TÌM GIÁ TRỊ NGUYÊN CỦA x ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về dạng phân thức có tử là số nguyên, lí luận chặt chẽ để rồi chỉ ra mẫu phải thuộc ước tự nhiên của tử và kết luận.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+3} + \frac{5}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{9-x}\right) : \frac{6}{\sqrt{x}+2}$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$A = \frac{(\sqrt{x}-3) + 5(\sqrt{x}+3) + 6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{6\sqrt{x}+18}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{6(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{6}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

$$b) \text{ Ta có } A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+5}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-3}.$$

$$A \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x}-3} \text{ có giá trị nguyên} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(5) \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 5\}.$$

Ta biết rằng khi x là số nguyên thì $\sqrt{x}$ hoặc là số nguyên (nếu x là số chính phương) hoặc là số vô tỉ (nếu x không là số chính phương). Để $\frac{5}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên thì $\sqrt{x}$ không thể là số vô tỉ, do đó $\sqrt{x}$ là số nguyên, suy ra $\sqrt{x}-3$ là ước tự nhiên của 5.

Ta có bảng sau.

$\sqrt{x}-3$	1	-1	5	-5
$\sqrt{x}$	4	2	8	-2
x	16	4	64	

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}} + \left(\frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$.

- a) Rút gọn A .
- b) Tìm các giá trị của x để $A \geq 10$.
- c) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn B .
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A(B-2)$ có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn B .
- b) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = A(B-2)$ có giá trị nguyên.

Dạng 5: TÌM GIÁ TRỊ CỦA x ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

Phương pháp:

Cách 1: Dựa vào điều đánh giá biểu thức để tìm ra khoảng biểu thức nằm trong, biện luận biểu thức nguyên nên ta chỉ ra được các giá trị nguyên thuộc khoảng đó, với mỗi giá trị của biểu thức ta sẽ tìm ra được các nghiệm của biến tương ứng.

Cách 2: Đặt biểu thức bằng một tham số nguyên, biến đổi suy ra một vế chỉ còn chứa căn thức bậc hai, dựa vào căn thức để giải bất phương trình để tương ứng, tìm khoảng tham số nằm trong rồi giải với các tham số tương ứng để tìm ra các nghiệm của biến tương ứng.

Ví dụ: $A = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$. Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Cách 1: Với $x \geq 0$ ta có $A > 0$.

$$\bullet A = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{7}{3}.$$

Mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1; 2\}$.

Với $A = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn).

Với $A = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Cách 2: Đặt $A = \frac{7}{\sqrt{x}+3} = n$ với $n \in \mathbb{Z}$.

$$A = \frac{7}{\sqrt{x}+3} = n \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{7-3n}{n}. \text{ Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } \frac{7-3n}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < n \leq \frac{7}{3}.$$

Mà $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{1; 2\}$.

Với $n = 1 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn).

Với $n = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy với $x = 16, x = \frac{1}{4}$ thì biểu thức A có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn B và tìm tất cả các giá trị của x để $A = B$.
- b) Tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

$$a) B = \frac{(\sqrt{x}-3)^2 - (\sqrt{x}+3)^2 - 36}{x-9} = \frac{12\sqrt{x}-36}{x-9} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}.$$

$$\text{Để } A = B \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = \frac{12}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow (7\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) = 12(2\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow 7x - 5\sqrt{x} - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = -\frac{9}{7} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Vậy để $A = B$ thì $x = 4$.

$$b) A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1) - \frac{11}{2}}{2\sqrt{x}+1} < \frac{\frac{7}{2}(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1} = \frac{7}{2}$$

$A < \frac{7}{2}$ mà A nhận giá trị nguyên dương $\Rightarrow 0 < A < \frac{7}{2}$. A nguyên $\Rightarrow A = 1; 2; 3$

$$\text{Với } A = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25}$$

$$\text{Với } A = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{9}$$

$$\text{Với } A = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25.$$

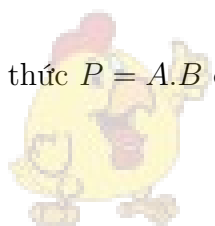
Vậy để A nhận giá trị nguyên dương thì $x = \frac{9}{25}; \frac{16}{9}; x = 25$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ và $B = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 36$.

b) Rút gọn A .

c) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.



Hướng dẫn

$$b) A = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}.$$

$$c) \text{Ta có đánh giá } 0 \leq P \leq \frac{7}{3}.$$

$$\text{Với } P = 1 \Rightarrow x = 16 \text{ (TM).}$$

$$\text{Với } P = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM).}$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Rút gọn B .

b) Tìm các giá trị của x để $P = B - A$ có giá trị nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm x thực để $\frac{7A}{3}$ có giá trị nguyên.

Dạng 6: TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC

Phương pháp:

Cách 1: Thêm bớt rồi dùng định lí cô si hoặc đánh giá dựa vào điều kiện.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

Chú ý:

• Biểu thức A có giá trị lớn nhất là a , kí hiệu là $A_{\max} = a$ nếu $A \leq a$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu " $=$ " xảy ra.

• Biểu thức A có giá trị nhỏ nhất là b , kí hiệu là $A_{\min} = b$ nếu $A \geq b$ với mọi giá trị của biến và tồn tại sao cho ít nhất một giá trị của biến dấu " $=$ " xảy ra.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Hướng dẫn

a) $A = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3}$

b) **Cách 1: Thêm bớt rồi dùng Cô - si hoặc đánh giá dựa vào điều kiện xác định.**

$$A = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} = \frac{x - 9 + 25}{\sqrt{x} + 3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x} + 3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x} + 3} - 6 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x} + 3}} - 6$$

$$= 2.5 - 6 = 4. \text{ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\Rightarrow A \geq 4.$$

Suy ra $\min A = 4$ khi $x = 4$.

Cách 2: Dùng phương pháp miền giá trị.

$$A = \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - A\sqrt{x} + 16 - 3A = 0.$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 4 \\ A \leq -16 \end{cases}$. Suy ra $\min A = 4$ dấu " $=$ " xảy ra khi và

chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{A}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1 + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1 + x}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1 + x}$$

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1 + x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$

Xét biểu thức ở mẫu: $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3$ (áp dụng cô si).

Ta có $A \leq \frac{1}{3}$. Do đó $\max A = \frac{1}{3}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-36} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+6\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x\sqrt{x}-36\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-3)(x-2\sqrt{x}+3)}$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Hướng dẫn

a) $A = \frac{6}{x-2\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x > 0; x \neq 9; x \neq 36$.

b) $A = \frac{6}{(\sqrt{x}+1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3$ vì $(\sqrt{x}+1)^2 \geq 0$.

Suy ra $\max A = 3$ khi $x = 1$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn A .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Hướng dẫn

a) $A = \frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$ với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$.

b) $A = \frac{5\sqrt{x}+15-17}{\sqrt{x}+3} = 5 - \frac{17}{\sqrt{x}+3} \geq 5 - \frac{17}{3} \Rightarrow A \geq -\frac{2}{3}$ vì $\sqrt{x} \geq 0$.

Suy ra $\min A = -\frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

b) Tính giá trị của A khi $x + \sqrt{x} + 1 + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{A}{B}$.

Dạng 7: CHỨNG MINH BIỂU THỨC LUÔN LUÔN ÂM HOẶC LUÔN LUÔN DƯƠNG VỚI MỌI GIÁ TRỊ CỦA ẨN

Phương pháp:

- Để chứng minh biểu thức $A > 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 + k$ với (k là hằng số dương).
- Để chứng minh biểu thức $A < 0$ ta chỉ ra $A = A_1^2 - k$ với (k là hằng số dương).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x+2}{x\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn A .

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x > 0$. Khi đó ta có

$$A = \frac{(x-\sqrt{x}+1)-(x+2)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$$A = \frac{-(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$A = \frac{-\sqrt{x}}{2(x - \sqrt{x} + 1)}.$$

b) Ta có: $x > 0$ nên $-\sqrt{x} < 0$.

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Do đó $A < 0$ với mọi $x > 0$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Rút gọn A .

b) Chứng minh rằng biểu thức A luôn luôn không âm với mọi giá trị của x làm A xác định.

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó ta có

$$A = x - 2\sqrt{x-1}.$$

b) Ta có: $A = x - 2\sqrt{x-1} = (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$.

Vậy A luôn luôn không âm với mọi $x \geq 1$.

Dạng 8: CHỨNG MINH BIỂU THỨC THỎA MÃN VỚI ĐIỀU KIỆN NÀO ĐÓ

Phương pháp: Vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (với $x > 0, x \neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Tính giá trị của A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

c) Cho biểu thức $P = \frac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của m để có x thỏa mãn $P = m$.

Hướng dẫn

a) $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}.$

b) $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = 2$ thay vào $A = \frac{\sqrt{2}-2}{2}.$

c) $P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ với điều kiện $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$.

$$P = m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x} = 3 \quad (1)$$

Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{m-1}.$

Do $x > 0, x \neq 4, x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 0, \sqrt{x} \neq 2, \sqrt{x} \neq 3.$

$$\text{Để có } x \text{ thỏa mãn } P = m \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m-1} > 0 \\ \frac{3}{m-1} \neq 2 \\ \frac{3}{m-1} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy $m > 1$, $m \neq 2$, $m \neq \frac{5}{2}$ (Thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ với $x > 0$, $x \neq 9$.

- Rút gọn A .
- Tìm giá trị của A khi $x = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.
- Tìm x để biểu thức $\frac{A}{B} = 1$.
- Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $\frac{A}{B} = m$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

- Rút gọn A .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A .
- Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{A}$ nhận giá trị là số nguyên.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{3}{2-\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}+2}{x-4} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-x} \right)$.

- Rút gọn A .
- Tính giá trị của A khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$.
- Tìm x sao cho $A.(x-1) = 3\sqrt{x}$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ (ĐKXD: $x > 0$, $x \neq 9$).

- Chứng minh rằng $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.
- So sánh A với 3.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (với $x > 0$, $x \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn

a) $A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b) **Cách 1:** Với $x > 0$, $x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

Vậy $0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$.

Vì A nguyên nên $A = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị của A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Ax + (A-1)\sqrt{x} + A-2 = 0$$

Trường hợp 1: $A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$

Trường hợp 2: $A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A - 1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \{1; 2\} \text{ do } A \in \mathbb{Z} \text{ và } A > 0.$$

Với $A = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại).

$$\text{Với } A = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} = 2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Ví dụ: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x - 1} \right) \cdot \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 1}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Tính giá trị của A khi $x = 5 + 2\sqrt{6}$.

c) Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \neq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A.B$.



C. LUYỆN TẬP BÀI TẬP GỒM NHIỀU Ý HỎI

Bài I. Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} + \frac{2-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{x-1} \right) \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

1. Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

2. Tính giá trị của A khi:

a) $x = 6 - 4\sqrt{2}$.

b) $x = \frac{1}{4} \left(\sqrt{9 + \sqrt{80}} - \sqrt{9 - \sqrt{80}} \right)$.

c) $x = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$.

d) $x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.

e) x là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = x - 1$.

f) x là nghiệm của phương trình $|2x - 6| = 3x + 1$.

g) x là giá trị của biểu thức $M = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

3. Tìm x để:

a) $A = \frac{1}{6}$;

b) $|A| = A$;

c) $A^2 + A \leq 0$.

4. So sánh :

a) A với 1.

b) A với biểu thức $N = \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}}$.

5. Tìm x nguyên dương để biểu thức $\frac{2}{A}$ nhận giá trị nguyên.

6. Tìm x thực để A nhận giá trị nguyên.

7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $P = A(x - \sqrt{x} - 2)$.

b) $Q = \frac{A}{-x + 3\sqrt{x} - 2}$ với $0 \leq x < 4$.

c) $R = \frac{\sqrt{x}}{A}$ với $x > 1$.

8. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $B = 2 - A$;

b) $C = \frac{A}{\sqrt{x}+7}$ với $x > 1$.

9. Tìm x thỏa mãn $A(\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{6}-1)\sqrt{x} = 2x - 2\sqrt{x-5} + 1$.

Bài II. Cho biểu thức:

$$B = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) + \frac{2-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1$$

1. Chứng minh $B = \frac{x-3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$.

2. Tính giá trị của B khi:

5. Tìm x để $E = \frac{2C}{\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên.

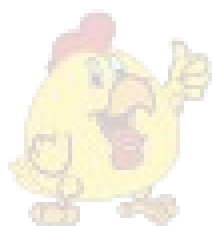
6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) Biểu thức C với $x > 9$.

b) $I = -\frac{C}{x\sqrt{x}}$ với $0 < x < 9, x \neq 4$.

7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $N = \frac{C}{\sqrt{x} - 1 + C}$.

8. Tìm x thỏa mãn $(2\sqrt{2} + C) \sqrt{x} - 3C = 3x - 2\sqrt{x-1} + 2$.



vndoc

D. MỘT SỐ CÂU VỀ RÚT GỌN VÀ CÂU HỎI PHỤ TRONG ĐỀ TUYỂN SINH HÀ NỘI

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2012 - 2013)

- 1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
- 2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.
- 3) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2013 - 2014)

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

- 1) Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 9$.
- 2) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.
 - a) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
 - b) Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 5$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2015 - 2016)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm giá trị của x để biểu thức $P = \frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2016 - 2017)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.
- 3) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2017 - 2018)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
 - 2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.
-

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B|x - 4|$.

Ví dụ : (TS 10 - THPT Hà Nội, năm học 2018 - 2019)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

