

SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM  
TRƯỜNG THPT THÁI PHIÊN

KỲ THI OLYMPIC LỚP 11

MÔN: TOÁN

Năm học: 2016- 2017

Đề tham khảo

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

**Câu 1.**(3 điểm) Giải phương trình sau:

a.  $\cos^2 2x + 3\sin 2x - \sin^2 2x + 1 = 0$

b.  $(\tan 2x \cdot \cot x - 1)\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$

**Câu 2** .(4 điểm) Cho dãy số  $(u_n)$ : 
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng:  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$ .

B. Xác định công thức  $u_n$ . Tính  $\lim u_n$

**Câu 3.**(4 điểm)

a/ Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, gồm 5 cuốn sách Toán, 4 cuốn Văn và 3 cuốn Tiếng Anh. Thầy lấy 6 cuốn tặng đều cho 6 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách tặng mà sau khi tặng xong thì mỗi loại sách còn ít nhất 1 cuốn.

a/Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ A. Tính xác suất để số lấy ra có tổng các chữ số của nó là một số chẵn và số đó phải không nhỏ hơn 50000.

c/Cho một lục giác đều có  $2n$  cạnh ( $n > 2$ ), Biết số hình chữ nhật tạo bởi 4 đỉnh trong  $2n$  đỉnh của đa giác bằng  $\frac{7}{52}$  số tam giác tạo bởi 3 đỉnh của đa giác và có một cạnh là cạnh của đa giác đó. Tìm  $n$ ?

**Câu 4.**(2 điểm) Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} + 1\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ m^2 - m + \frac{4}{3} & \text{khi } x = 0 \\ x^{2017} \cos \frac{1}{x} + \frac{4}{3} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ .

Tìm m để hàm số liên tục tại  $x = 0$

**Câu 5.**(3 điểm) Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  với  $R \neq R'$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Một đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  lần lượt tại P và P'. Gọi Q và Q' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P và P' xuống  $OO'$ . Các đường thẳng AQ và AQ' cắt các đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tại M và M'. Chứng minh rằng M, M', B thẳng hàng

**Câu 6.**(3 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc BAD bằng  $120^\circ$ . Hình chiếu vuông góc của S lên đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC, cạnh bên SD tạo với đáy (ABCD) góc  $60^\circ$ .

- Chứng minh tam giác SCD vuông.
- Gọi M là trung điểm SD. Chứng minh  $AM \perp CD$ .
- Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Hết

SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM  
TRƯỜNG THPT THÁI PHIÊN

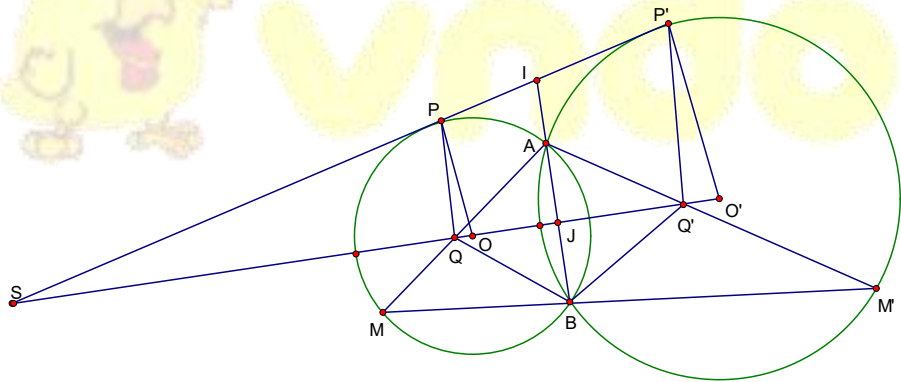
KỲ THI OLYMPIC LỚP 11  
MÔN : TOÁN  
Năm học : 2016- 2017

HƯỚNG DẪN CHẤM

| Câu  | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm                                                |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1a   | $\cos^2 2x + 3\sin 2x - \sin^2 2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \vee \sin 2x = 2(VN)$ $\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ | <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> |
| 1b   | <p>b.</p> $(\tan 2x \cdot \cot x - 1) \sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \quad (*)$                                                                                                                                                                                              | 0.25đ                                               |
| 2    | Điều kiện: $\sin x \neq 0; \cos 2x \neq 0$ ; khi đó phương trình (*) tương đương                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.25đ                                               |
| Điểm |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.25đ                                               |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5đ                                                |
|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.25đ                                               |

|                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                        |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
|                | $\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \sin x}{\cos 2x \sin x} \cdot \sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$ $\Leftrightarrow 2 \sin 2x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin 2x - \sin x$ $\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + x + k2\pi$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ <p>Kết hợp với điều kiện, nghiệm phương trình là:</p> $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$                                                                                                                                                                    | 0.25đ<br><br>0.25đ                                     |
|                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                        |
| Câu 2<br>4điểm | <p>a.(1,5điểm) Chứng minh bằng phương pháp qui nạp</p> <p>Ta có : <math>u_2 = 1 = -\frac{1}{2}u_1 + 1; u_3 = \frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}u_2 + 1</math>. Công thức đúng với <math>n=1, n=2</math></p> <p>Giả sử công thức đúng với <math>n = k, (k \geq 2)</math>, tức là : <math>u_{k+1} = -\frac{1}{2}u_k + 1</math>.</p> <p>Ta chứng minh công thức đúng với <math>n=k+1</math>.</p> <p>Ta có : <math>u_{k+2} = \frac{u_{k+1} + u_k}{2} = \frac{1}{2}u_{k+1} + 1 - u_{k+1} = -\frac{1}{2}u_{k+1} + 1</math></p> <p>Vậy công thức đúng <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math></p> <p>b. (2,5điểm)</p> <p>Ta có: <math>u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)</math>.</p> <p>Đặt : <math>v_n = u_n - \frac{2}{3} \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n \Rightarrow (v_n)</math> là cấp số nhân với <math>q = -\frac{1}{2}</math></p> | 0.5đ<br><br>0.25đ<br><br>0.75đ<br><br>0.5đ<br><br>0.5đ |

|                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                           |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
|                              | $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = -\frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ $\Rightarrow u_n = v_n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ <p>Vậy <math>\lim u_n = \frac{2}{3}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5đ<br>0.5đ<br>0.5đ                      |
| <b>Câu 3</b><br>a<br>1,5điểm | <p>a/Do tổng 2 loại sách nào cũng lớn hơn 6 nên khi 6 cuốn thì không thể hết 2 loại sách.</p> <p>Số cách chọn 6 sách bất kì trong 12 cuốn để cho 6 học sinh là <math>A_{12}^6=665280</math>.</p> <p>Các trường hợp cho hết 1 loại là:</p> <p>+Hết sách Toán có : <math>A_6^5.A_7^1=5040</math> cách</p> <p>+ Hết sách Văn có: <math>A_6^4.A_8^2=20160</math> cách</p> <p>+ Hết sách Tiếng anh có: <math>A_6^3.A_9^3=60480</math> cách</p> <p>Vậy số cách cần tặng là: <math>665280-(5040+20160+60480) = 57960</math> ( cách)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ |
| b<br>1,5điểm                 | <p>b/Số có 5 chữ số có <math>9 \cdot 10^4=90000</math> số</p> <p><math>n(\Omega)=90000</math>, Gọi A là biến cố ” số lấy ra thỏa YCBT”</p> <p>Số cần tìm có dạng: <math>a_1a_2a_3a_4a_5</math> ;</p> <p>Trong đó <math>a_1 &gt; 4</math> và <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5</math> là số chẵn.</p> <p>Trước hết ta tìm số có 4 chữ số: <math>a_1a_2a_3a_4</math> có <math>5 \times 10^3</math> số</p> <p>1.Nếu <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4</math> là số lẻ thì <math>a_5</math> phải là số lẻ.vậy có 5 cách chọn <math>a_5</math>.</p> <p>2. Nếu <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4</math> là số chẵn thì <math>a_5</math> phải là số chẵn.Vậy cũng có 5 cách chọn <math>a_5</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> có <math>5 \times 10^3 \cdot 5 = 25000</math> số. <math>\Rightarrow n(A) = 25000</math></p> <p><math>P(A) = 5/18</math></p> | 0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ |
| C<br>1 điểm                  | <p>+ Số hình chữ nhật là : <math>C_n^2</math></p> <p>+ Số tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác: <math>2n(2n-4)</math></p> <p><math>C_n^2 = \frac{52}{7} \cdot 2n(2n-4)</math></p> <p><math>n=15</math> V <math>n=0</math> (loại)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.25đ<br>0.25đ<br>0.25đ<br>0,25đ          |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                             |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| <p>Câu 4<br/>2 điểm</p> | $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{2x+1}-1) + (\sqrt[3]{x+1}-1)}{x} =$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{2x+1}-1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{2017} \cos \frac{1}{x}$ $ \cos \frac{1}{x}  \leq 1; \forall x < 0 \Rightarrow  x^{2017} \cos \frac{1}{x}  \leq  x^{2017} $ $\lim_{x \rightarrow 0^-}  x^{2017}  = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-}  x^{2017} \cos \frac{1}{x}  = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{2017} \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{4}{3}$ <p>Hàm số liên tục tại <math>x=0 \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m=0, m=1</math></p> | <p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p> |
| <p>Câu 5<br/>3 điểm</p> |  <p>Gọi S là giao điểm của d và OO', khi đó S là tâm vị tự ngoài của hai đường Tròn (O) và (O'). Đặt <math>k = \frac{R'}{R}</math>, khi đó ta có.</p> <p><math>V(S, k): (O) \rightarrow (O'), P \rightarrow P', Q \rightarrow Q'</math></p> <p>Gọi I, J là giao điểm của AB với PP' và OO'. Khi đó ta có</p> <p><math>IP^2 = IA \cdot IB = IP'^2 \Rightarrow IP = IP'</math></p> <p>Mà PQ // IJ // P'Q' nên JQ = JQ'</p> <p>Suy ra AB là trung trực của QQ'.</p> <p>Mà OO' là trung trực của AB. Vậy tứ giác AQBQ' là hình thoi</p>                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>                                                     |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                           |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | <p>Do đó <math>Q'B \parallel AQ</math> hay <math>Q'M' \parallel QM</math>.</p> <p>Giả sử <math>V(S, k)</math> biến <math>M</math> thành <math>B'</math> khi đó <math>QM \parallel Q'B'</math></p> <p>Mà <math>M</math> thuộc <math>(O)</math> suy ra <math>B'</math> thuộc <math>(O')</math> do đó <math>B'</math> trùng với <math>B</math>.</p> <p>Vậy <math>V(S, k)</math> biến <math>M</math> thành <math>B</math>.</p> <p>Tương tự ta có <math>V(S, k)</math> biến <math>M'</math> thành <math>B</math>.</p> <p>Suy ra <math>M, B, M'</math> thẳng hàng.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5đ<br>0.5đ<br>0.5đ<br>0.5đ                                                              |
| <p>Câu 6<br/>4 điểm</p> | <p>Hình vẽ</p> <p>a) + Ta có: <math>ABCD</math> là hình thoi, góc <math>\angle ABC = 120^\circ</math><br/> <math>\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC</math> và <math>\triangle ACD</math> đều.</p> <p>+ <math>G</math> là trọng tâm tam giác <math>ABC \Rightarrow AB \perp CG</math>. (1)</p> <p>+ Lại có: <math>AB \perp SG</math> (<math>SG \perp (ABCD)</math>) (2) và <math>CG \cap SG = C</math> (3).</p> <p>Từ (1), (2), (3) <math>\Rightarrow AB \perp (SCG)</math>.</p> <p>+ Mặt khác: <math>AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp (SCG) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \triangle SCD</math> vuông.</p> <p>b) + Gọi <math>I</math> là trung điểm <math>CD</math>. Ta có: <math>AI \perp CD</math> (đường trung tuyến trong tam giác đều) (*)</p> <p>+ <math>MI</math> là đường trung bình của tam giác <math>SCD</math><br/> <math>\Rightarrow MI \parallel SC</math> mà <math>SC \perp CD \Rightarrow MI \perp CD</math> (**)</p> <p>+ <math>AM \cap MI = M</math> (***)</p> <p>Từ (*), (**), (***) <math>CD \perp (AMI) \Rightarrow CD \perp AM</math>.</p> <p>c) + Ta có: <math>AB \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = d(B, (SCD))</math>.</p> <p>+ Gọi <math>G' = AI \cap BD \Rightarrow G'</math> là trọng tâm tam giác <math>ACD</math>. Khi đó ta có: <math>BG = GG' = G'D = \frac{2}{3}BO</math></p> <p>Từ đó suy ra: <math>\frac{BG}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(B, (SCD)) = 3d(G, (SCD))</math>.</p> <p>+ Gọi <math>H</math> là hình chiếu của <math>G</math> lên <math>SC</math>. Ta có:<br/> <math>GH \perp SC</math>; <math>GH \perp CD</math> và <math>SC \cap CD = C</math></p> <p>Suy ra: <math>GH \perp (SCD) \Rightarrow d(G, (SCD)) = GH</math>.</p> <p>+ <math>SD</math> có hình chiếu lên <math>(ABCD)</math> là <math>GD</math>, <math>SD</math> tạo với đáy góc <math>60^\circ</math><br/> <math>\Rightarrow \angle SDG = 60^\circ</math>.</p> <p>+ Trong tam giác <math>SDG</math> ta có: <math>GD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}</math> và <math>\frac{SG}{GD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow SG = 2a</math>.</p> | 0,25đ<br>0.5đ<br>0.5đ<br>0.25đ<br>0.5đ<br>0.25đ<br>0.5đ<br>0.25đ<br>0.5đ<br>0.25đ<br>0.5đ |

|  |                                                                                                                                     |       |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
|  | + Lại có: $GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Khi đó trong tam giác SGC ta có:                                                             | 0.25đ |
|  | $\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GC^2} \Rightarrow GH = \frac{SG \cdot GC}{\sqrt{SG^2 + GC^2}} = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$ | 0.25đ |

**TRƯỜNG THPT NÔNG SƠN**  
**TỔ TOÁN – TIN**

\*\*\*\*\*

**ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI OLYMPIC LỚP 11**  
**NĂM HỌC : 2017-2018**  
**MÔN : TOÁN**

*Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian giao đề)*

\*\*\*\*\*

**Câu 1 (3,0 điểm).**

Cho phương trình:  $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(18.5\pi + 10x)$ .

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình thuộc khoảng  $(0; \frac{\pi}{2})$ .

**Câu 2 (4,0 điểm).**

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases} \quad \text{Với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  và tìm lim  $u_n$ .

b) Tính tổng  $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{11}}{11}$

**Câu 3 (4,0 điểm).**

a) Trong khai triển  $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ ,  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba là 46. Tìm hạng tử không chứa x trong khai triển trên.

b) Từ các chữ số 0,1,2,3,6,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

**Câu 4 (2,0 điểm).**



Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm  $x = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x} - 1}{x}, & \text{khi } x > 0 \\ 2x + m - 1, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

**Câu 5 (3,0 điểm).**

Cho đường tròn  $(O;R)$  và điểm cố định  $A$  trên  $(O;R)$ . Một góc  $\angle xAy$  có số đo không đổi, hai cạnh  $Ax, Ay$  thay đổi cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $B$  và  $C$ . Dựng hình bình hành  $ABDC$ . Chứng minh rằng:

- Trục tâm  $H$  của tam giác  $BCD$  là điểm cố định.
- Trục tâm  $K$  của tam giác  $ABC$  thuộc đường tròn cố định.

**Câu 6 (4,0 điểm).**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AD = a$ ,  $SA$  vuông góc  $mp(ABCD)$  và  $SA = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $N$  là trung điểm  $AB$ .

- Tính góc  $\varphi$  hợp bởi đường thẳng  $SM$  và  $mp(SBD)$ .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $SM$  và  $DN$ .

-----Hết-----

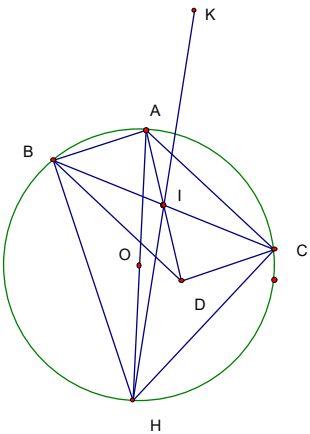
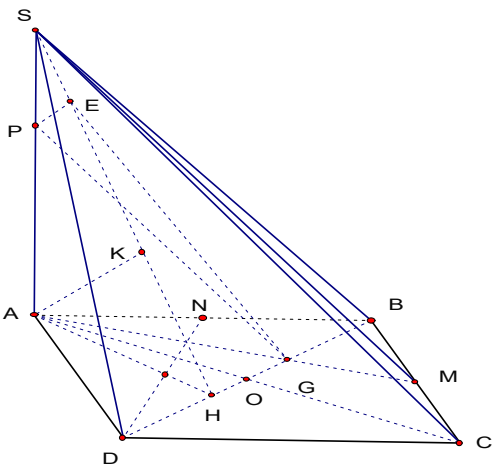
**ĐÁP ÁN**

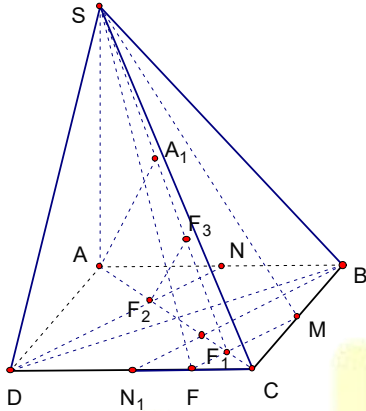
| Câu                  | Nội dung                                                                                                                      | Điểm       |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 1<br/>5,0</b> | Cho phương trình: $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(18.5\pi + 10x)$ (1)                                                           | <b>3,0</b> |
|                      | Tìm tất cả các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ .                                                    |            |
|                      | $(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 8x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2} = \cos 10x$                                               | 0,5        |
|                      | $\Leftrightarrow \frac{\cos 12x + \cos 8x}{2} + \cos 10x = 0$                                                                 | 0,25       |
|                      | $\Leftrightarrow \cos 10x \cos 2x + \cos 10x = 0$                                                                             | 0,25       |
|                      | $\Leftrightarrow \cos 10x (1 + \cos 2x) = 0$                                                                                  | 0,25       |
|                      | $\Leftrightarrow \cos 10x \cos^2 x = 0$                                                                                       | 0,25       |
|                      | $\Leftrightarrow \cos 10x = 0$ (vì $\cos x > 0$ , với mọi $x$ thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ )                             | 0,5        |
|                      | $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \quad (k \in \mathbb{Z})$                                               | 0.25       |
|                      | Vì $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{20}(1+2k) < \frac{\pi}{2}$<br>Do đó $k$ nhận các giá trị $0, 1, 2, 3, 4$ | 0.5        |

|                            |                                                                                                                                                                                                                      |            |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                            | Vậy tập nghiệm của PT (1) trên $(0; \frac{\pi}{2})$ là:<br>$T = \left\{ \frac{\pi}{20}; \frac{3\pi}{20}; \frac{5\pi}{20}; \frac{7\pi}{20}; \frac{9\pi}{20} \right\}.$                                                | 0.25       |
| <b>Câu 2</b><br><b>4,0</b> | a) Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases} \quad \text{Với mọi } n \in N^*$<br>a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số $(u_n)$ và tìm $\lim u_n$ . | <b>2,5</b> |
|                            | Với mọi $n \in N^*$ ta có:<br>$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$<br>$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \frac{u_n}{n}$                                                                                    | 0,5        |
|                            | Đặt $v_n = \frac{u_n}{n}$ . Khi đó $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$                                                                                                                                                       | 0,5        |
|                            | Vậy $(v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$ và số hạng đầu $v_1 = \frac{1}{3}$                                                                                                                          | 0,5        |
|                            | Suy ra $v_n = v_1 \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}, \forall n \in N^*$                                                                                                                               | 0.25       |
|                            | Suy ra $u_n = \frac{n}{3^n}, \forall n \in N^*$                                                                                                                                                                      | 0.25       |
|                            | Vậy $\lim u_n = \lim \frac{n}{3^n} = 0$                                                                                                                                                                              | 0.5        |
|                            | b) b) Tính tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{11}}{11}$                                                                                                                                | <b>1,5</b> |

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|                            | $S = v_1 + v_2 + ..... + v_{11}$ $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^{11}}}{1 - \frac{1}{3}}$ $= \frac{3^{11} - 1}{2 \cdot 3^{11}}$ $= \frac{88573}{177147}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5<br>0,5<br>0,25<br>0,25         |
| <b>Câu 3</b><br><b>4,0</b> | a) Trong khai triển $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ , $n \in N, n \geq 2$ , tổng các hệ số của các hạng tử thứ nhất, thứ hai, thứ ba bằng 46. Tìm hạng tử không chứa x trong khai triển trên.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>1,5</b>                         |
|                            | Theo đề ta có :<br>$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46$<br>$\Leftrightarrow n^2 + n - 90 = 0$<br>$\Rightarrow n = 9$<br>Từ khai triển $(x^2 + \frac{1}{x})^9$ , Tìm được hạng tử không chứa x là $C_9^6$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25<br>0,5<br>0,25<br>0,5         |
|                            | b) Từ các chữ số 0,1,2,3,6,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>2,5</b>                         |
|                            | Gọi số cần tìm là $x = \overline{abc}$ ( $a \neq 0$ )<br>Vì x chia hết cho 3 nên $(a + b + c) : 3$<br>x là số chẵn nên $c \in \{0;2;6\}$<br>a) Với c=0<br>$(a + b) : 3$ có 2 khả năng<br>$a, b \notin \{1;2\}$ . Khi đó có 2! cách chọn $\overline{ab}$<br>$a, b \notin \{3;6;9\}$ . Khi đó có $A_3^2$ cách chọn $\overline{ab}$<br>Suy ra $2! + A_3^2 = 8$ số<br>b) Với c=2<br>Khi đó a hoặc b phải là chữ số 1, chữ số còn lại thuộc tập $\{0;3;6;9\}$<br>a=1, có 4 cách chọn b từ $\{0;3;6;9\}$<br>b=1, có 3 cách chọn b từ $\{3;6;9\}$<br>Suy ra $4+3=7$ số<br>c) Với c=6 | 0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,5<br>0,5 |
|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                    |

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
|                            | $a, b \notin \{1; 2\}$ , có 2! cách chọn $\overline{ab}$<br>$a, b \notin \{0; 3; 9\}$ , có 2.2 cách chọn $\overline{ab}$<br>Suy ra $2! + 4 = 6$ số<br>Vậy $8 + 7 + 6 = 21$ số thỏa yêu cầu bài toán                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5<br><br>0,25                                                |
| <b>Câu 4</b><br><b>2,0</b> | Ta có: $f(0) = m - 1$<br>$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ $= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} \right)$ $= \frac{2}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + m - 1) = m - 1$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi:<br>$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ $\Leftrightarrow m - 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$ | 0,25<br><br>0,5<br><br>0,5<br><br>0,25<br><br>0,25<br><br>0,25 |

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 5</b><br>3 điểm |                                                                                                                                                                                                               | 3đ         |
|                        | a)                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1.0        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Gọi <math>H'</math> là xuyên tâm của A trên <math>(O;R)</math>, ta có: <math>BH' \perp AB \Rightarrow BH' \perp CD</math>, tương tự <math>CH' \perp BD</math>. Vậy <math>H'</math> trùng H.</li> </ul>                                                  | 0.5        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>A cố định nên H cố định.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                     | 0.5        |
|                        | b)                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2.0        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Gọi I là tâm hình bình hành ABDC suy ra hai tam giác BCD và CBA cũng đối xứng nhau qua I. Suy ra K đối xứng với H qua I. Hay: <math>\overline{HK} = 2\overline{HI}</math>.</li> </ul>                                                                   | 0,5        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>H cố định nên từ <math>\overline{HK} = 2\overline{HI}</math>, suy ra K là ảnh của I qua phép vị tự tâm H, tỉ số bằng 2.</li> </ul>                                                                                                                      | 0,5        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Số đo góc <math>\angle xAy</math> không đổi nên BC có độ dài không đổi <math>\rightarrow</math> OI cũng có độ dài không đổi. Suy ra, I thuộc đường tròn tâm O, bán kính OI.</li> </ul>                                                                  | 0,5        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>I thuộc đường tròn <math>(O;OI)</math> nên K thuộc đường tròn ảnh của đường tròn <math>(O;OI)</math> qua phép vị tự tâm H tỉ số bằng 2.</li> </ul>                                                                                                      | 0,5        |
| <b>Câu 6</b><br>4 điểm |                                                                                                                                                                                                            |            |
|                        | a)                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2.0        |
|                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Gọi <math>G = AM \cap BD</math>, G là trọng tâm tam giác ABC. Dựng <math>GP \parallel SM</math>, <math>P \in SA</math>, ta có góc <math>\varphi</math> giữa SM và mp(BCD) cũng là góc giữa PG và mp(BCD) và <math>SP = \frac{1}{3}SA</math>.</li> </ul> | 0,5<br>0,5 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                             |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>– Gọi H là hình chiếu của A trên BD, ta có <math>(SAH) \perp mp(BCD)</math>. Gọi K, E lần lượt là hình chiếu của A và P trên SH, ta có AK và PE đều vuông góc <math>mp(BCD)</math>. Như vậy, góc giữa PG và <math>mp(BCD)</math> là góc <math>\angle PGE</math>.</li> <li>– Ta có: <math>AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}</math>, <math>AK = \frac{2a}{\sqrt{7}}</math>, <math>PE = \frac{1}{3}AK = \frac{2a}{3\sqrt{7}}</math> và <math>GP = \frac{2}{3}SM = \frac{5a}{3}</math>.</li> <li>– Trong tam giác vuông tại E, ta có: <math>\sin \varphi = \frac{2}{5\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{2}{5\sqrt{7}}</math>.</li> </ul> <p>Hay <math>\varphi \approx 8^{\circ}41'</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>0,5</p> <p>0,5</p>                       |
|  | b)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                             |
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                             |
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>– Gọi <math>N_1</math> là trung điểm CD, F là trung điểm <math>CN_1</math>, ta có <math>MF \parallel DN</math> và <math>d(DN; SM) = d(DN; (SMF))</math>.</li> <li>– Gọi <math>F_2</math> và <math>F_1</math> lần lượt là giao điểm của AC với DN và MF, ta có:<br/> <math>DF_2 = \frac{2}{3}DN = \frac{a\sqrt{6}}{3}</math>, mặt khác: <math>\frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{3}{2a^2} = \frac{1}{DF_2^2} \Rightarrow DF_2 \perp AC</math>.<br/>           Do đó <math>MF \perp AC</math>, Suy ra <math>mp(SMF) \perp mp(SAC)</math>.</li> <li>– Gọi <math>A_1</math> và <math>F_3</math> lần lượt là hình chiếu của A và <math>F_2</math> trên <math>SF_1</math>, khi đó <math>A_1</math> và <math>F_3</math> cũng là hình chiếu của A và <math>F_2</math> trên <math>(SMF)</math> và <math>F_2F_3 = d(DN; (SMF)) = d(DN; SM)</math>.</li> <li>– Ta có: <math>\frac{1}{AA_1^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AF_1^2} = \frac{73}{100a^2} \Rightarrow AA_1 = \frac{10a}{\sqrt{73}}</math><br/>           và <math>F_2F_3 = \frac{3}{5}AA_1 = \frac{6a\sqrt{73}}{73}</math>.<br/>           Vậy <math>d(DN; SM) = \frac{6a\sqrt{73}}{73}</math>.</li> </ul> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> |

## SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI OLYMPIC 24/3 QUẢNG NAM NĂM 2018

QUẢNG NAM

## THPT NGUYỄN HIỀN

Môn thi: TOÁN – LỚP 11

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)**Câu 1 (3,0 điểm).** Giải các phương trình sau:

a)  $\cos x (1 + 2\sqrt{3} \sin 2x) = \cos 3x - 4 \cos \left( \frac{2017\pi}{2} - 2x \right)$

b) Tính tổng các nghiệm của phương trình:  $\frac{1 + \cot 2x}{1 - \cos 2x} = 1 + \cot^2 2x$  thuộc  $(0; 10\pi)$ .

**Câu 2 (4,0 điểm).** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 2018 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^4 + 2017^2}{u_n^3 - u_n + 4034}, \forall n \in N^* \end{cases}$$
a) Chứng minh rằng  $u_n > 2017, \forall n \in N^*$ b) Đặt  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^3 + 2017}, \forall n \in N^*$ . Tìm  $\lim S_n$ .**Câu 3 (2,0 điểm).** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ m^2 - m + \frac{4}{3} & \text{khi } x = 0 \\ x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} + \frac{4}{3} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ Tìm m để hàm số liên tục tại  $x = 0$ **Câu 4 (4,0 điểm)**

a) Xếp ngẫu nhiên 14 học sinh của 3 khối gồm 7 học sinh khối 10; 4 học sinh khối 11; 3 học sinh khối 12 thành một hàng ngang. Tính xác suất để các học sinh cùng một khối không đứng cạnh nhau.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 5 và đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:

+ Tổng các chữ số của nó là số lẻ.

+ Tổng của sáu chữ số đầu của nó (không kể chữ số hàng đơn vị) là một số lẻ.

+ Tổng của năm chữ số đầu (không kể hai chữ số hàng đơn vị và hàng chục) là một số lẻ.

**Câu 5 (3,0 điểm).** Cho tứ giác lồi ABCD không phải là hình bình hành, dựng về phía ngoài tứ giác đó bốn hình vuông lần lượt có các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi  $O_1, O_2, O_3, O_4$  lần lượt là tâm của các hình vuông trên theo thứ tự đó. Chứng minh rằng, trung điểm các đường chéo của tứ giác ABCD và  $O_1O_2O_3O_4$  là bốn đỉnh của một hình vuông.

**Câu 6 (4,0 điểm).** Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = a$ ,  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ .

a) Gọi  $\varphi$  là góc giữa (SBC) và (SAC). Tính  $\tan \varphi$ .

b) Tính khoảng cách giữa AB và SC

-----Hết-----

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**QUẢNG NAM**

**KỲ THI OLYMPIC LỚP 11 CẤP TỈNH**

**Năm học 2017 – 2018**

**ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM**

**Môn thi: TOÁN**

**Câu 1 (3,0 điểm)**



|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                      |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| <b>a</b> | $\cos x \left( 1 + 2\sqrt{3} \sin 2x \right) = \cos 3x - 4 \cos \left( \frac{2017\pi}{2} - 2x \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>1,5</b>                                           |
|          | $\cos x \left( 1 + 2\sqrt{3} \sin 2x \right) = \cos 3x - 4 \cos \left( \frac{2017\pi}{2} - 2x \right)$ $\Leftrightarrow \cos x + 2\sqrt{3} \sin 2x . \cos x = \cos 3x - 4 \sin 2x$ $\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) = 2\sqrt{3} \sin 2x . \cos x + 4 \sin 2x$ $\Leftrightarrow -2 \sin 2x . \sin x = 2 \sin 2x (\sqrt{3} \cos x + 2)$ $\Leftrightarrow 2 \sin 2x (\sqrt{3} \cos x + \sin x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \sqrt{3} \cos x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$ <p>Vậy <math>S = \left\{ \frac{7\pi}{6} + k2\pi, \frac{k\pi}{2} \mid k \in Z \right\}</math></p> | 0.25<br><br>0.25<br><br>0.25<br><br>0.25<br><br>0.25 |
| <b>b</b> | Tính tổng các nghiệm của phương trình: $\frac{1 + \cot 2x}{1 - \cos 2x} = 1 + \cot^2 2x$ thuộc $(0; 10\pi)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>1,5</b>                                           |
|          | $\frac{1 + \cot 2x}{1 - \cos 2x} = 1 + \cot^2 2x \quad (1)$ <p>ĐK: <math>\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in Z)</math></p> $\frac{1 + \cot 2x}{1 - \cos 2x} = 1 + \cot^2 2x \Leftrightarrow \frac{1 + \cot 2x}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 2x}$ $\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \cos x) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0.25<br><br>0.25<br><br>0.25                         |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                         |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
|                         | $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $0 < x < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{39}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, \dots, 19$ <p>Gọi S à tổng các nghiệm của phương trình (1) (gồm 20 số hạng)</p> <p>Ta có: <math>S = \frac{\pi}{4} \times 20 + \frac{\pi}{2} (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19) = 5\pi + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{19 \cdot 20}{2} = 100\pi</math></p> | <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>                     |
| <b>Câu 2 (4,0 điểm)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                         |
| <b>a</b>                | <p>Chứng minh rằng <math>u_n &gt; 2017, \forall n \in \mathbb{N}^*</math></p> <p>Bước 1: <math>u_1 = 2018 &gt; 2017</math> (đúng)</p> <p>Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với <math>n = k \geq 1</math>, ta có <math>u_k &gt; 2017</math></p> <p>Ta cần chứng minh, <math>u_{k+1} &gt; 2017</math></p> <p>Ta có: <math>u_{k+1} - 2017 = \frac{u_k^4 + 2017^2}{u_k^3 - u_k + 4034} - 2017 = \frac{(u_k - 2017)(u_k^3 + 2017)}{u_k(u_k^2 - 1) + 4034} &gt; 0</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> đpcm</p>                                                                                              | <p><b>1,0</b></p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>2x0.25</p> |
| <b>b</b>                | <p>Đặt <math>S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^3 + 2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>. Tìm <math>\lim S_n</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>3,0</b>                                              |
|                         | <p>Rút gọn <math>S_n</math></p> <p>Ta có: <math>u_{k+1} - 2017 = \frac{(u_k - 2017)(u_k^3 + 2017)}{(u_k^3 + 2017) - (u_k - 2017)}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.25                                                    |

|                                                                                                                    |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $\Leftrightarrow \frac{1}{u_{k+1}-2017} = \frac{1}{u_k-2017} - \frac{1}{u_k^3+2017}$                               | 0.25   |
| $\Leftrightarrow \frac{1}{u_k^3+2017} = \frac{1}{u_k-2017} - \frac{1}{u_{k+1}-2017}$                               | 0.25   |
| $\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{u_1-2017} - \frac{1}{u_{k+1}-2017} = 1 - \frac{1}{u_{k+1}-2017}$                   | 0.25   |
| Chứng minh $(u_n)$ là dãy số tăng                                                                                  |        |
| Ta xét: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2017)^2}{u_n(u_n^2 - 1) + 4034} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$             | 0.25x2 |
| Giả sử: $\lim u_n = a \quad (a > 2018)$                                                                            | 0.25   |
| Ta có: $a = \frac{a^4 + 2017^2}{a^3 - a + 4034} \Leftrightarrow (a - 2017)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2017$ (vô lý) | 0.25x3 |
| Nên ta có: $\lim u_n = +\infty$                                                                                    | 0.25   |
| Vậy $\lim S_n = 1$                                                                                                 | 0.25   |

**Câu 3 (2,0 điểm)**

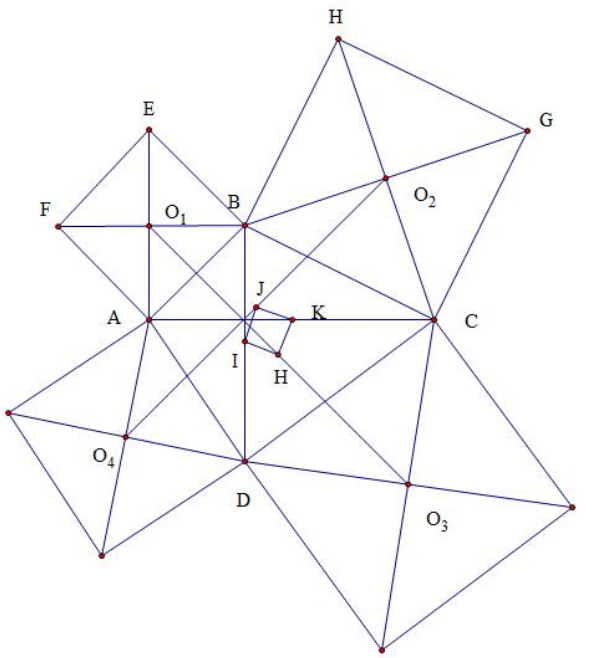
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <p>Cho hàm số <math>y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{2x+1} - 1}{x} &amp; \text{ khi } x &gt; 0 \\ m^2 - m + \frac{4}{3} &amp; \text{ khi } x = 0 \\ x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} + \frac{4}{3} &amp; \text{ khi } x &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>Tìm m để hàm số liên tục tại <math>x = 0</math></p> |      |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{2x+1}-1) + (\sqrt[3]{x+1}-1)}{x}$                                                                                                                                                                                                               | 0.25 |

|                                                                                                                                                                |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}(\sqrt{2x+1}-1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)}{x} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$     | 0.25x2 |
| $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} + \frac{4}{3} \right)$                                        |        |
| $\left  \cos \frac{1}{x} \right  \leq 1, \forall x < 0 \Rightarrow \left  x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} \right  \leq  x^{2017} $                             | 0.25   |
| $\lim_{x \rightarrow 0^-}  x^{2017}  = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left  x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} \right  = 0$                              | 0.25   |
| $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{2017} \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{4}{3}$                             | 0.25   |
| <p>Vậy hàm số liên tục tại <math>x = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}</math></p> | 0.25x2 |

**Câu 4 (4,0 điểm)**

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| a | <p>Xếp ngẫu nhiên 14 học sinh của 3 khối gồm 7 học sinh khối 10; 4 học sinh khối 11; 3 học sinh khối 12 thành một hàng ngang. Tính xác suất để các học sinh cùng một khối không đứng cạnh nhau.</p>                                                                                                        | 2,0    |
|   | <p>Không gian mẫu là xếp 14 học sinh thành một hàng ngang <math>\Rightarrow n(\Omega) = 14!</math></p>                                                                                                                                                                                                     | 0.25   |
|   | <p>Gọi A: “ Trong 14 học sinh, không có hai học sinh cùng khối đứng cạnh nhau”.</p> <p>Ta xếp như sau:</p> <p>Đầu tiên xếp 7 học sinh khối 12 có 7! Cách. Khi đó giữa 7 học sinh khối 12 có tất cả 8 chỗ trống (gồm 6 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống ở trước và sau).</p> <p>Ta xét 2 trường hợp sau:</p> | 0.25x2 |
|   | <p>+TH1: Có 1 học sinh khối 10 hoặc khối 11 ở phía ngoài (trước hàng hoặc sau hàng) còn 6 học sinh còn lại xếp vào chỗ trống ở giữa các bạn học sinh khối 12 có <math>2 \times 7!</math> Cách.</p>                                                                                                         | 0.25x2 |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
|          | <p>+TH2: Có một cặp học sinh (gồm 1 học sinh khối 10 và 1 học sinh khối 11) xếp vào một chỗ trống, 5 học sinh còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có <math>4 \times 3 \times 2! \times C_6^1 \times 5!</math> cách.</p> <p><math>\Rightarrow n(A) = 7!(2 \times 7! + 4 \times 3 \times 2 \times C_6^1 \times 5!)</math></p> <p>Vậy <math>P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{19}{12012}</math></p>                                                                                                                                                                                                                   | <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> |
| <b>b</b> | <p>Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 5 và đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau:</p> <p>+ Tổng các chữ số của nó là số lẻ.</p> <p>+ Tổng của sáu chữ số đầu của nó (không kể chữ số hàng đơn vị) là một số lẻ.</p> <p>+ Tổng của năm chữ số đầu (không kể hai chữ số hàng đơn vị và hàng chục) là một số lẻ.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>2,0</p>                          |
|          | <p>Số tự nhiên cần tìm có dạng <math>\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}</math>, <math>a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}</math></p> <p>Do số tự nhiên chia hết cho 5 nên <math>a_7 = 0</math> hoặc <math>a_7 = 5</math></p> <p>Vì <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7</math> là số lẻ và <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6</math> là số lẻ và <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5</math> là số lẻ, ta có <math>a_7</math> là số chẵn nên <math>a_7 = 0</math> có 1 cách chọn và <math>a_6</math> là số chẵn nên <math>a_6</math> có 5 cách chọn và <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5</math> là số lẻ.</p> | <p>0.25</p> <p>0.25x2</p>           |
|          | <p>Xét <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5</math> là số lẻ</p> <p>+ Nếu <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4</math> là số lẻ thì <math>a_5</math> là số chẵn <math>\Rightarrow a_5</math> có 5 cách</p> <p>+ Nếu <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4</math> là số chẵn thì <math>a_5</math> là số lẻ <math>\Rightarrow a_5</math> có 5 cách</p> <p><math>\Rightarrow</math> số cách chọn <math>\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}</math> là <math>9 \times 10^3 \times 5</math></p>                                                                                                                                                            | <p>0.25</p> <p>0.25x3</p>           |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                      |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Vậy có $5 \times 9 \times 10^3 \times 5 = 225000$ số | 0.25 |
| <b>Câu 5 (3,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                      |      |
| <p>Cho tứ giác lồi ABCD không phải là hình bình hành, dựng về phía ngoài tứ giác đó bốn hình vuông lần lượt có các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi <math>O_1, O_2, O_3, O_4</math> lần lượt là tâm của các hình vuông trên theo thứ tự đó. Chứng minh rằng, trung điểm các đường chéo của tứ giác ABCD và <math>O_1O_2O_3O_4</math> là bốn đỉnh của một hình vuông.</p> |                                                      |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                      |      |
| <p>Ta cần chứng minh tứ giác ILKJ là hình vuông</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                      |      |
| Xét $Q_{(B, 90^\circ)}(E) = A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                      | 0.25 |
| $Q_{(B, 90^\circ)}(C) = H$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                      | 0.25 |
| $\Rightarrow EH \perp AC; EC = AH$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                      | 0.25 |
| $KO_1, KO_2$ là đường trung bình của $\triangle AEC, \triangle CAH$                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                      |      |
| $\Rightarrow KO_1 // \frac{1}{2}EC; KO_2 // \frac{1}{2}AH$                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                      | 0.25 |
| $\Rightarrow KO_1 \perp KO_2; KO_1 = KO_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                      | 0.25 |

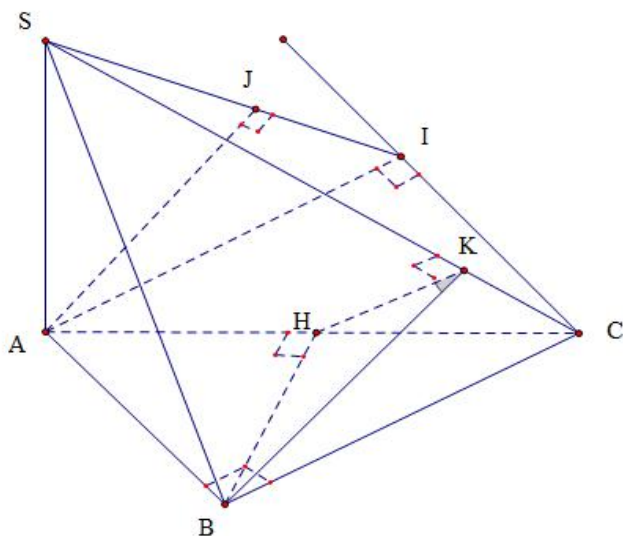
|                                                                                               |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow KO_3 \perp KO_4; KO_3 = KO_4$                          | 0.25   |
| Như vậy, $Q_{(K, 90^\circ)}(O_2) = O_1; Q_{(K, 90^\circ)}(O_4) = O_3$                         | 0.25x2 |
| $\Rightarrow \Delta KO_2O_4 = \Delta KO_1O_3$                                                 | 0.25   |
| Mà KJ, KL lần lượt là hai đường trung tuyến của hai tam giác $\Delta KO_2O_4, \Delta KO_1O_3$ |        |
| $\Rightarrow KJ \perp KL; KJ = KL$                                                            | 0.25   |
| Chứng minh tương tự, ta có: $\Rightarrow IJ \perp IL; IJ = IL$                                | 0.25   |
| Vậy tứ giác IJLK là hình vuông                                                                | 0.25   |

**Câu 6 (4,0 điểm)**

Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B,  $AB = a$ ,  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = a\sqrt{2}$ .

a) Gọi  $\varphi$  là góc giữa (SBC) và (SAC). Tính  $\tan \varphi$ .

b) Tính khoảng cách giữa AB và SC



| (hình vẽ phục vụ câu a – điểm) |                                                                                                                                |            |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>a</b>                       | Gọi $\varphi$ là góc giữa (SBC) và (SAC). Tính $\tan \varphi$ .                                                                | <b>2,0</b> |
|                                | Từ B hạ $BH \perp AC$ trong (ABC)                                                                                              | 0.25       |
|                                | Từ B hạ $BK \perp SC$ trong (SBC)                                                                                              | 0.25       |
|                                | $\Rightarrow (BHK) \perp (SCB)$ và $(BHK) \perp (SAC)$                                                                         | 0.25       |
|                                | Mà $(BHK) \cap (SAC) = HK; (BHK) \cap (SBC) = BK$                                                                              |            |
|                                | Nên góc giữa (SBC) và (SAC) là $\varphi = \widehat{HKB}$                                                                       | 0.25       |
|                                | Ta có: $HB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$                                                       | 0.25       |
|                                | $\Delta CHK$ đồng dạng $\Delta CSA \Rightarrow \frac{HK}{SA} = \frac{CH}{CS}$                                                  | 0.25       |
|                                | $\Rightarrow HK = \frac{SA \cdot CH}{CS} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{a}{2}$ | 0.25       |
|                                | $\Rightarrow \tan \varphi = \frac{HB}{HK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \sqrt{2}$                        | 0.25       |
| <b>b</b>                       | Tính khoảng cách giữa AB và SC                                                                                                 | <b>2,0</b> |
|                                | Từ C kẻ $Cx // AB$ ; Từ A kẻ $AI \perp IC$                                                                                     | 0.25       |
|                                | Lúc đó, $AB // (SIC) \Rightarrow d(AB, SC) = d(A, (SIC))$                                                                      | 0.25       |
|                                | Mà $IC \perp AI, IC \perp SA, AI \cap SA$ trên (SAI) $\Rightarrow IC \perp (SAI) \Rightarrow (ICS) \perp (SAI)$                | 0.25       |
|                                | Do $(AIS) \cap (SIC) = SI$                                                                                                     |            |
|                                | Nên $d(A, (SIC)) = d(A, SI)$                                                                                                   | 0.25       |



|                                                                                                                                                                |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Xét $\triangle SAI$ vuông tại A có $SA = a\sqrt{2}$ ; $AI = a$ (do AICB là hình chữ nhật)                                                                      | 0.25   |
| $\Rightarrow \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ | 0.25x2 |
| Vậy $d(AB, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$                                                                                                                          | 0.25   |

SỞ GD VÀ ĐT QUẢNG NAM

KÌ THI OLYMPIC

TRƯỜNG THPT NGUYỄN THÁI BÌNH

MÔN: TOÁN 11- NĂM HỌC 2016-2017

*Thời gian: 150' (không kể thời gian phát đề)*

ĐỀ CHÍNH THỨC

**Câu 1 (3,0 điểm).** Giải phương trình :  $\cos 2x - 3 \sin 2x + 5\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{9\pi}{4}\right) = 3$ ;

**Câu 2 (4,0 điểm)**

a) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC vuông tại A,  $BC = a$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$  thì với mọi số tự nhiên  $n \geq 2$  thì  $b^n + c^n \leq a^n$ .

b) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2u_{n+1} - u_n = 4, \text{ khi } n \geq 1 \end{cases}$

**Câu 3 (4,0 điểm)**

1) Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển thành đa thức của  $(3 - 2x)^n$  biết rằng

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048, n \in \mathbb{N}.$$

2) Xếp 24 thí sinh ngồi vào một phòng thi gồm 12 bàn, mỗi bàn đủ 2 thí sinh. Tính xác suất để hai thí sinh A và B ngồi cùng một bàn.

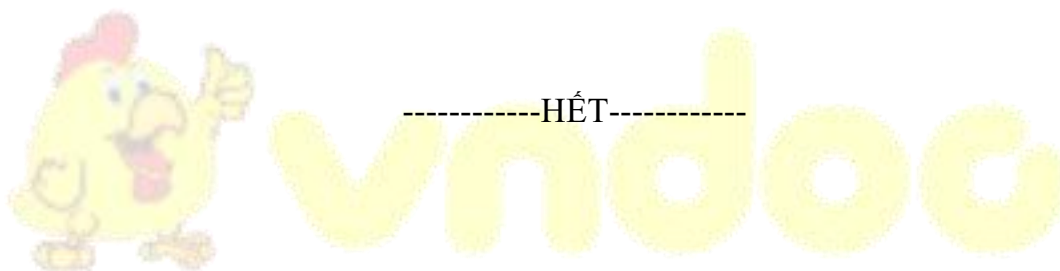
**Câu 4 (2,0 điểm).** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

**Câu 5 (3,0 điểm)**

Cho điểm M thay đổi trên nửa đường tròn (C) tâm O, đường kính AB (M khác A và B). Về phía ngoài tam giác AMB dựng hình vuông BMDC. Tìm tập hợp điểm C và xác định vị trí của M để độ dài AC nhỏ nhất.

**Câu 6 (4,0 điểm)**

Cho hình lăng trụ đáy tứ giác  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  thay đổi song song với hai đáy lăng trụ cắt các đường thẳng  $AB_1, BC_1, CD_1, DA_1$  lần lượt tại M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mặt phẳng  $(\alpha)$  sao cho tứ giác MNPQ có diện tích nhỏ nhất.



-----HẾT-----

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLIMPIC TOÁN 11 NĂM 2016 – 2017**

| Câu          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| <b>Câu 1</b> | Giải phương trình $\cos 2x - 3 \sin 2x + 5\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{9\pi}{4}\right) = 3$                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>3,0</b>                                       |
|              | $\text{Pt} \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) - 3(\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x) = 0$<br>$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4 \sin x + 2 \cos x - 5) = 0$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 4 \sin x + 2 \cos x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{vn} \end{cases}$ | 0,5<br>1,<br><br>1,5                             |
| <b>Câu 2</b> | a) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC vuông tại A, BC = a, AB = c, AC = b thì với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $b^n + c^n \leq a^n$ .                                                                                                                                                                                                                                 | <b>2,0</b>                                       |
|              | Với $n = 2$ thì $a^2 + b^2 = c^2$ nên đẳng thức đúng<br>Giả sử $b^k + c^k \leq a^k$ ( $k \geq 2$ ), khi đó ta thấy<br>$b^{k+1} + c^{k+1} = b^k \cdot b + c^k \cdot c \leq b^k \cdot a + c^k \cdot a = (b^k + c^k)a \leq a^{k+1}$<br>Vậy bất đúng với $n = k + 1$ , suy ra đpcm                                                                                        | 0,5<br><br><br>1,5                               |
|              | b) Tìm số hạng tổng quát của $(u_n)$ biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2u_{n+1} - u_n = 4, \text{ khi } n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                  | <b>2,0</b>                                       |
|              | Thay $n = 1, 2, 3, 4$ vào (1) ta được<br>$u_2 = 2 + \frac{3}{2} = 4 - \frac{1}{2^1}$<br>$u_3 = 2 + \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{1}{2^2}$<br>$u_4 = \dots = 4 - \frac{1}{2^3}$<br>Đoán $u_n = \dots = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$<br>Chứng minh quy nạp và kết luận                                                                                 | <b>0,5</b><br><br><br><br><br><br><br>0,5<br>1,0 |
| <b>Câu 3</b> | 1) Tìm hệ số của $x^{10}$ trong khai triển thành đa thức của $(3 - 2x)^n$ biết $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048, n \in \mathbb{N}$ .                                                                                                                                                                                          | <b>2,0</b>                                       |
|              | Theo đề $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048, n \in \mathbb{N}$<br>$\Leftrightarrow (3 - 1)^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11$<br>Số hạng cần tìm $C_{11}^{10} 3^1 \cdot (-2x)^{10} = 3 \cdot 2^{10} \cdot C_{11}^{10} x^{10}$                                                                                                      | 1,0<br><br>1,0                                   |
|              | 2) Xếp 24 thí sinh ngồi vào một phòng thi gồm 12 bàn, mỗi bàn đủ 2 thí sinh. Tính xác                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>2,0</b>                                       |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                          |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
|              | suất để hai thí sinh A và B ngồi cùng một bàn.<br>$n(\Omega) = 24!$<br>Gọi B là biến cố theo đề, ta có $n(B) = C_{24}^1 \cdot 1 \cdot 22!$<br>$P(B) = \frac{1}{23}$                                                                                                                                                                                                                             | 0,75<br>0,75<br>0,5      |
| <b>Câu 4</b> | Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>2,0</b>               |
|              | Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} \right)$<br>$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} = \dots = -\frac{3}{8}$<br>$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} \right) = \dots = \frac{1}{12}$<br>Đáp số $-\frac{11}{24}$ | 0,5<br>0,5<br>0,5<br>0,5 |
| <b>Câu 5</b> | Hình vẽ<br>Giả sử ABM có hướng dương. Khi đó C là ảnh của M qua phép quay $Q_{\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)}$ .<br>Mặt khác M thuộc nửa đường tròn (C) tâm O, đường kính AB nên tập hợp C là nửa đường tròn (C') tâm O', là ảnh của (C) qua $Q_{\left(B, -\frac{\pi}{2}\right)}$ .<br>Do thuộc (C') nên AC lớn nhất khi AC đi qua O'. Khi đó M là giao điểm của AO' với (C)                    | 1,0<br>1,0<br>1,0        |
| <b>Câu 6</b> | Giả sử $(\alpha)$ cắt $AB_1, BC_1, CD_1, DA_1$ lần lượt tại $A', B', C', D'$<br>$\Rightarrow \frac{AA'}{AA_1} = \frac{BB'}{BB_1} = \frac{CC'}{CC_1} = \frac{DD'}{DD_1}$ .<br>Đặt $\frac{AA'}{AA_1} = x, S_{ABCD} = S$<br>$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A'M}{A'B} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AA'}{AA_1} = x \\ \frac{A'Q}{A'D'} = \frac{A_1Q}{A_1D} = \frac{A_1A'}{A_1A} = 1-x \end{cases}$    | 1,0<br>1,0               |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $\Rightarrow \frac{S_{A'MQ}}{S_{A'B'D'}} = x(1-x)$ $\Rightarrow S_{A'MQ} = x(1-x)S_{A'B'D'}$ $\Rightarrow S_{MNPQ} = S - x(1-x)[S_{A'B'D'} + S_{A'B'C}S_{C'B'D}S_{A'D'C}']$ $= S.(1-2x+2x^2)$ $= S.\left(\frac{1}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \geq \frac{S}{2}$ <p>Vậy <math>\min S_{MNPQ} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow (\alpha)</math> song song và cách đều hai đáy</p> | <p><b>1,0</b></p> <p><b>1,0</b></p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|

TRƯỜNG THPT NGUYỄN HIỀN

ĐỀ THAM KHẢO OLIMPIC KHỐI 11(2017)
TỔ TOÁN-TIN
MÔN: TOÁN (thời gian 180 phút)

**Câu 1/(3điểm)** Giải phương trình sau đây trên tập số thực:

a/  $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$

b/  $(\cos x - 2\sin 4x).\sin 4x + (1 + \sin x - 2\cos 4x).\cos 4x = 0$

**Câu 2/(4 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 2017$ ;  $u_{n+1} = \frac{2015n+1}{2016n+1}(u_n + 1)$  ( $\forall n \geq 1$ ).

a/ Chứng minh dãy số  $(u_n)$  giảm và bị chặn dưới.

b/ Tính  $\lim(u_n)$

**Câu 3/(4 điểm)**

a/ Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước đồng thời hai số 5 và 7 không nằm cạnh nhau?

b/ Cho đa giác đều T có 2017 đỉnh, chọn ngẫu nhiên một tứ giác có các đỉnh là các đỉnh của T. Tính xác suất để tứ giác đó Chứa đúng 2 cạnh của đa giác T.

**Câu 4** (2 điểm) :

a/  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[5]{x+30} - 2}{x-2}$

b/ Cho các số thực a, b, c thỏa mãn  $\frac{a}{2017} + \frac{b}{2016} + \frac{c}{2015} = 0$ . Chứng minh phương trình:  $ax^2 + bx + c = 0$  luôn có nghiệm trong khoảng (0; 1)

**Câu 5** (3 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và BA. Góc  $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^\circ$ . Chứng minh tam giác ABC đều.

**Câu 6** (4 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Các tam giác SAB và SAC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC

a/ Tính cosin của góc  $\alpha$  tạo bởi AM và BN

b/ Tính khoảng cách giữa AM và BN

Hết.

|                                             |                               |
|---------------------------------------------|-------------------------------|
| Họ và tên thí sinh.....<br>Số báo danh..... | Chữ kí giám thị.....<br>..... |
|---------------------------------------------|-------------------------------|

- Lưu ý: Học sinh không sử dụng tài liệu, Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

TRƯỜNG THPT NGUYỄN HIỂN  
TỔ TOÁN – TIN  
\*\*\*\*\*

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI OLYMPIC LỚP 11  
NĂM HỌC : 2016-2017  
MÔN : TOÁN

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể thời gian giao đề)  
\*\*\*\*\*

| CÂU          | NỘI DUNG ĐÁP ÁN                                                                                                                                                                        | ĐIỂM  |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Câu 1        | Giải phương trình sau đây trên tập số thực:<br>a/ $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$<br>b/ $(\cos x - 2\sin 4x) \cdot \sin 4x + (1 + \sin x - 2\cos 4x) \cdot \cos 4x = 0$      | 3,0 đ |
| a)<br>(1,5đ) | Đưa về phương trình: $(1 + \sin x)(2\sin x + \cos x - 1) = 0$                                                                                                                          | 0,5   |
|              | * Giải $\sin x + 1 = 0$ cho $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$                                                                                                                               | 0,5   |
|              | * Giải phương trình: $2\sin x + \cos x - 1 = 0$ cho nghiệm<br>$x = k2\pi$ hoặc $x = \pi - 2\alpha + k2\pi$                                                                             | 0,5   |
| 2)<br>(1,5đ) | Đưa về phương trình: $\sin 5x + \cos 4x = 2$                                                                                                                                           | 0,5   |
|              | $\begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$                                                                                                                                 | 0,5   |
|              | Cho nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$                                                                                                                                                 | 0,5   |
| Câu 2        | Cho dãy số $(u_n)$ có $u_1 = 2017$ ; $u_{n+1} = \frac{2015n+1}{2016n+1}(u_n + 1)$ ( $\forall n \geq 1$ ).<br>a/ Chứng minh dãy số $(u_n)$ giảm và bị chặn dưới.<br>b/ Tính $\lim(u_n)$ | 4,0 đ |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
| a)<br>(2,5đ) | Ta có $u_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ suy ra dãy số $(u_n)$ bị chặn dưới.                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5 |
|              | Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{2015n+1-n.u_n}{2016n+1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |
|              | Chứng minh $n.u_n > 2015n+1$ bằng quy nạp                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5 |
|              | Kiểm tra $n = 1$ ; giả sử đúng với $n = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|              | Chứng minh với $n = k+1$ . Thật vậy $(k+1).u_{k+1} = (2015k+1)(1+\frac{1}{k}) > 2015k+2016$ (dpcm)                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5 |
|              | Suy ra $u_{n+1} - u_n < 0$ . Suy ra $u_n$ giảm                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,5 |
| b)<br>(1,5đ) | Lập luận hội tụ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5 |
|              | Gọi $L$ là giới hạn suy ra $L = \frac{2015}{2016}(L+1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
|              | Suy ra $L = 2015$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5 |
| Câu 3        | <p>a/ Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước đồng thời hai số 5 và 7 không nằm cạnh nhau?</p> <p>b/ Cho đa giác đều <math>T</math> có 2017 đỉnh, chọn ngẫu nhiên một tứ giác có các đỉnh là các đỉnh của <math>T</math>. Tính xác suất để tứ giác đó Chứa đúng 2 cạnh của đa giác <math>T</math>.</p> | 4đ  |



|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| a<br>(2,0đ) | Gọi abcde là số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước                                                                                                                                                                                                                       | 0,5  |
|             | Lập luận vắng số 0 và cho kq $C_9^5$                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5  |
|             | Gọi $a_1a_2a_3a_4a_5$ là số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng trước và 5,7 gần nhau kq : $C_6^3$                                                                                                                                                                              | 0,5  |
|             | Vậy có $C_9^5 - C_6^3$                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,5  |
| b<br>(2,0đ) | $ \Omega  = C_{2017}^4$                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5  |
|             | Gọi A là biến cố.....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5  |
|             | TH1 : Tứ giác chọn ra chứa 2 cạnh liên kề : 2017.2012 cách                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|             | TH2 : Tứ giác chọn ra chứa 2 cạnh không kề : (2017.2012)/2                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|             | $P(A) = \frac{2017.2012 + 2017.1006}{C_{2017}^4}$                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5  |
| Câu 4       | <p>a/ <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt[5]{x+30} - 2}{x-2}</math></p> <p>b/ Cho các số thực a, b, c thỏa mãn <math>\frac{a}{2017} + \frac{b}{2016} + \frac{c}{2015} = 0</math>.</p> <p>Chứng minh phương trình: <math>ax^2 + bx + c = 0</math> luôn có nghiệm trong khoảng (0; 1)</p> | 2,0  |
| a/(1đ)      | Tách ra $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{\sqrt[5]{x+30}(\sqrt{x-1}-1) + \sqrt[5]{x+30} - 2}{x-2} \right]$                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |

|                 |                                                                                                                                                                  |      |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| b<br>1đ         | Nhân liên hợp tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{\sqrt[5]{x+30}(\sqrt{x-1}-1)}{x-2} \right] = 1$                                                          | 0,25 |
|                 | Đặt $t = \sqrt[5]{x+30}$ và tính $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{\sqrt[5]{x+30}-2}{x-2} \right] = \frac{1}{80}$                                             | 0,25 |
|                 | Kết quả $\frac{81}{80}$                                                                                                                                          | 0,25 |
|                 | TH1 $c = 0$<br>* $a = 0$ suy ra $b=0$ suy ra pt có nghiệm tùy ý                                                                                                  | 0,25 |
|                 | * $a \neq 0$ suy ra pt có nghiệm $x = -\frac{b}{a} = \frac{2016}{2017} < 1$                                                                                      | 0,25 |
|                 | TH2 $c \neq 0$ xét $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên R                                                                                                        | 0,25 |
| 1đ              | Xét $f(0).f(\frac{2016}{2017}) < 0$ suy ra pt có nghiệm thuộc $(0,1)$                                                                                            | 0,25 |
| Câu 5<br>(3,0đ) | <b>Câu 5</b> (3 điểm) Cho tam giác ABC. Gọi M , N lần lượt là trung điểm BC và BA. Góc $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^\circ$ . Chứng minh tam giác ABC đều. |      |
|                 | Vì $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^\circ$ nên ACMN nội tiếp. Gọi (O;R) là đường tròn ngoại tiếp ACMN.                                                        | 0,5  |
|                 | Gọi $\widehat{D}_N(A)=B$ ; $\widehat{D}_N(O)=O_1$<br>$\widehat{D}_M(C)=B$ ; $\widehat{D}_M(O)=O_2$                                                               | 0,5  |
|                 | Chứng minh $OO_1O_2$ đều                                                                                                                                         | 0,5  |
|                 | Có $BO_1 = BO_2 = 2R = O_1O_2$ suy ra B là trung điểm $O_1O_2$                                                                                                   | 0,5  |

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                        | Tam giác BAC đồng dạng với Tam giác BMN                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
|                        | Tam giác BMN đồng dạng với Tam giác $OO_1O_2$                                                                                                                                                                                                                   |     |
|                        | Suy ra Tam giác BAC đồng dạng với Tam giác $OO_1O_2$ nên đều                                                                                                                                                                                                    | 0,5 |
| <b>Câu 6</b><br>(4,0đ) | <p>Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Các tam giác SAB và SAC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SC</p> <p>a/ Tính cosin của góc <math>\alpha</math> tạo bởi AM và BN</p> <p>b/ Tính khoảng cách giữa AM và BN</p> |     |
|                        | a/ Gọi F là trung điểm SN suy ra góc giữa AM & BN là góc giữa MA&MF                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
|                        | Tính $AM = a\sqrt{2}/2$ ; $MF = a/2$ ; $AF = a\sqrt{10}/4$                                                                                                                                                                                                      | 0,5 |
|                        | $\cos \widehat{AMF} = 1/4\sqrt{2}$                                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|                        | Kết quả $1/4\sqrt{2}$                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5 |
|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|                        | b/ Gọi S' đối xứng S qua A và G là trọng tâm SCS' suy ra mp(BNG) chứa BN và song song AM                                                                                                                                                                        | 0,5 |
|                        | $d = d(A, BGN) = 2d(H, BGN)$ với H là trung điểm AC                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
|                        | <p>Dựng HK vuông BG tại K.</p> <p>Dựng HI vuông NK tại I suy ra <math>2d(H, BGN) = 2HI</math></p>                                                                                                                                                               | 0,5 |

|                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{36}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{124}{3a^2}$ $KQ = \frac{a\sqrt{93}}{31}$ | 0,5 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI****ĐỀ ĐỀ NGHỊ - OLYMPIC TOÁN - NĂM HỌC 2016-2017****Câu 1: (3 điểm)**

a) Cho cung  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  thỏa  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = 5$ . Tính  $P = \frac{1}{\cos x} + \tan x$

b) Giải phương trình:  $2\sqrt{2}(1 + \cos 3x \cdot \cos x) = \frac{\cos 4x}{1 - 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)}$

**Câu 2: (4 điểm)**

Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định như sau : 
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Chứng minh dãy  $(u_n)$  tăng nhưng không bị chặn.

b) Đặt  $S = \frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S$

**Câu 3: (4 điểm)**

a) Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp  $A = \{1; 2; \dots; 20\}$ . Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số tự nhiên liên tiếp.

b) Tìm hệ số của  $x^5$  trong khai triển của  $P(x) = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$  biết  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$

**Câu 4: (2 điểm)** Tính giới hạn:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[17]{2017x+1} - 1}{x}$

**Câu 5: (3 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, các đường cao AA' và BB' cắt nhau tại H (A' thuộc BC, B' thuộc AC), CO cắt AB tại P, CH cắt A'B' tại Q. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh : PQ // HM.

**Câu 6: (4 điểm)** Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy M, N sao cho  $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}, \frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$ . Trên trung tuyến AH của tam giác ABD lấy điểm P sao cho  $\frac{AP}{PH} = \frac{4}{5}$ .

a) Xác định thiết diện tạo thành khi cắt tứ diện ABCD bởi mặt phẳng (MNP).

b) Tính diện tích thiết diện.

-----Hết-----

**ĐÁP ÁN**

**ĐỀ ĐỀ NGHỊ - THI OLYMPIC TOÁN**

**NĂM HỌC 2016-2017**

**TRƯỜNG THPT NGUYỄN TRÃI**

**Câu 1: (3 điểm)**

a)  $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1 \Rightarrow \left( \frac{1}{\cos x} - \tan x \right) \left( \frac{1}{\cos x} + \tan x \right) = 1$  (0,5 điểm)

$\Rightarrow P = \frac{1}{5}$  (0,5 điểm)

b) pt:  $2\sqrt{2}(1 + \cos 3x \cdot \cos x) = \frac{\cos 4x}{1 - 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)}$

- ĐK:  $x \neq \frac{5\pi}{8} + k\pi$  và biến đổi pt thành

$$2\sqrt{2}(1 + \cos 3x \cdot \cos x) = \frac{-\cos 4x}{\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow 2 + \cos 4x + \cos 2x = \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 3 = 0 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\text{Ra nghiệm và kết hợp điều kiện, kết quả } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

### Câu 2: (4 điểm)

a) cm  $u_{n+1} > u_n$  suy ra dãy  $(u_n)$  tăng (1 điểm)

cm không bị chặn bằng phản chứng (1 điểm)

b) Thiết lập  $\frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$  (1 điểm)

Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = 1$  (1 điểm)

### Câu 3: (4 điểm)

a) Số cách chọn ba số đôi một khác nhau từ tập A là  $C_{20}^3 = 1140$  cách. (0,5 điểm)

Số cách chọn ba số liên tiếp là 18 cách. (0,5 điểm)

Số cách chọn ba số trong đó có đúng hai số liên tiếp là  $2 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 306$  (0,5 điểm)

Vậy xác suất cần tìm là  $\frac{1140 - 18 - 306}{1140} = \frac{816}{1140} = \frac{68}{95}$ . (0,5 điểm)

b) – Giải phương trình  $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$  được  $n = 5$  (0,5 điểm)

- Có  $P(x) = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

Hệ số có  $x^5$ :  $a_5 = C_5^4(-2)^4 + C_{10}^3 3^3$  (1 điểm)

- Đáp số  $a_5 = 3320$  (0,5 điểm)

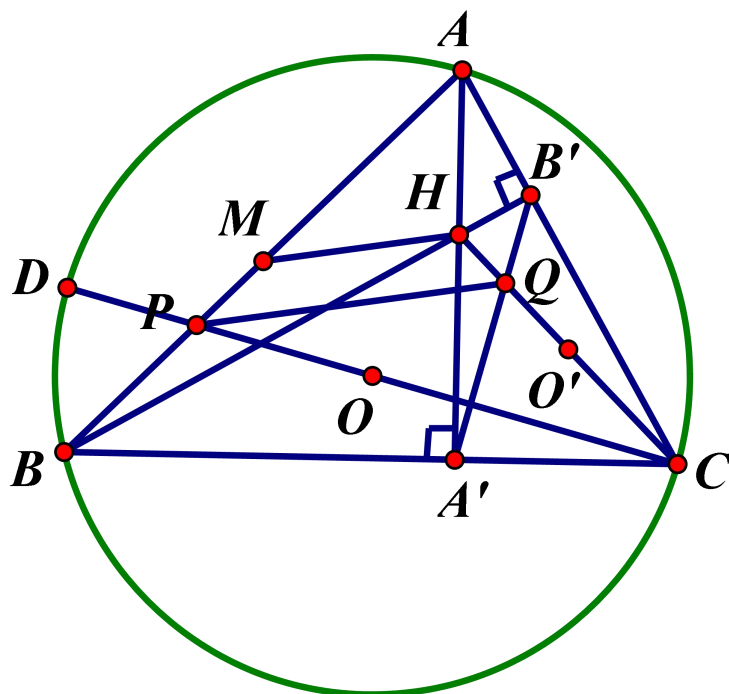
**Câu 4: (2 điểm)**

$$\frac{\sqrt[17]{2017x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt[17]{2017x+1}^{17} - 1}{x \left( \sqrt[17]{2017x+1}^{16} + \sqrt[17]{2017x+1}^{15} + \dots + \sqrt[17]{2017x+1} + 1 \right)} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$= \frac{2017}{\left( \sqrt[17]{2017x+1}^{16} + \sqrt[17]{2017x+1}^{15} + \dots + \sqrt[17]{2017x+1} + 1 \right)} \quad (1 \text{ điểm})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[17]{2017x+1}-1}{x} = \frac{2017}{17} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

**Câu 5: (3 điểm)**



- Hình vẽ (0, 5 điểm)
- CO cắt đường tròn(O) tại D, gọi O' là trung điểm CH  
Chứng minh AHBD là hình bình hành  $\Rightarrow$  M là trung điểm HD.

Suy ra :  $OO' \parallel HM$  (1) (0, 5 điểm)

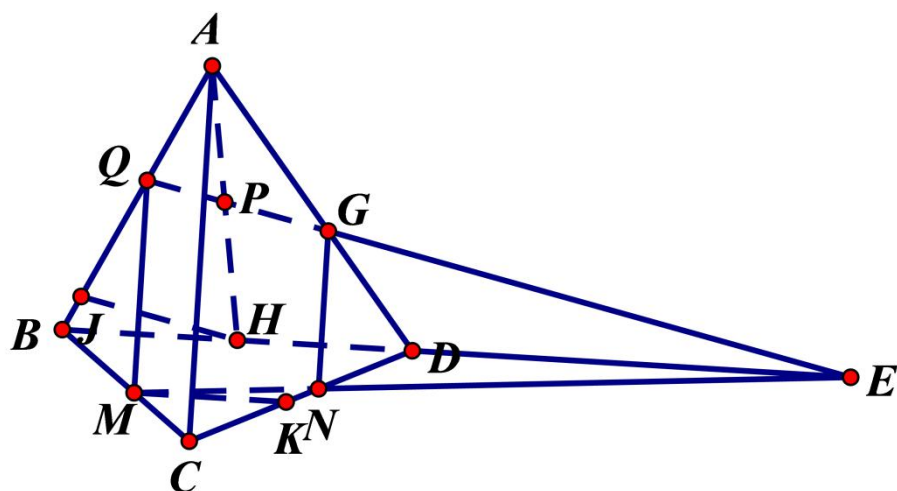
- Chứng minh  $\triangle ABC$  đồng dạng  $\triangle A'B'C'$  (0, 5 điểm)
- Chứng minh O' là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle A'B'C'$  (0, 5 điểm)
- $\Rightarrow$  phép đồng dạng f biến:  $\triangle ABC$  thành  $\triangle A'B'C'$ ,  $O \rightarrow O', P \rightarrow Q$

Ta có  $\frac{CO}{CO'} = \frac{CP}{CQ} \Rightarrow OO' \parallel PQ$  (2) (0, 5 điểm)

- Từ (1) và (2) suy ra :  $PQ \parallel HM$  (0, 5 điểm)

**Câu 6.(4 điểm)**





- a) Dựng thiết diện MNGQ (1 điểm)
- b) Cm : MNGQ là hình thang cân (1,5 điểm)
- Tính :  $QG = \frac{a}{3}$  (0,5 điểm)
- đường cao của hình thang  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$  (0,5 điểm)
- Tính  $S = \frac{11a^2\sqrt{3}}{72}$  (0,5 điểm)

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DUY HIỆU

TỔ TOÁN

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ OLYMPIC TOÁN 11 (Thời gian là bài 150')

Câu 1 (3,0 điểm) :

- 1) Giải phương trình:  $\sqrt{3} \sin 2x - 1 = \cos 2x - 2 \cos x$
- 2) Giải phương trình :  $\frac{5 + 7 \cos x + 3 \sin x + \cos 2x}{\cos x - \sin x} = 1$

Câu 2 (4,0 điểm) :

1) Tìm 4 số nguyên khác nhau lập thành 1 Cấp số cộng có số hạng thứ nhất bằng tổng bình phương của 3 số hạng còn lại .

2) Cho dãy  $(u_n)$ :  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$  và đặt :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}$ .

CMR:  $\frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$  và Tìm  $\lim(S_n)$

### Câu 3 (4,0 điểm)

1) Tìm hạng tử không chứa x của khai triển:  $P(x) = \left(2 + x + \frac{5}{x}\right)^8$

2) Phòng thi có 24 thí sinh (trong đó có 2 thí sinh A và B) được xếp vào 12 bàn, mỗi bàn xếp đủ 2 thí sinh. Tính xác suất để hai thí sinh A và B được ngồi chung một bàn .

### Câu 4 (2,0 điểm)

1) Tính giới hạn sau:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right)$

2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện:  $\frac{a}{2016} + \frac{b}{2017} + \frac{c}{2018} = 0$ . Chứng minh rằng phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  luôn có nghiệm .

2) **Câu 5** (3,0 điểm): Đường tròn S tiếp xúc với các cạnh bằng nhau AB, BC của tam giác cân ABC tại các điểm P và K, đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng trung điểm đoạn thẳng PK là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

**Câu 6** (4,0 điểm): Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang,  $\hat{ABC} = \hat{BAD} = 90^\circ$ ,  $BA = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SB. CMR: Tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mp(SCD). ...hết...

## HƯỚNG DẪN CHẤM

**Câu 1:** 1) Giải phương trình:  $\sqrt{3} \sin 2x - 1 = \cos 2x - 2 \cos x$  ( 1,5 đ)

$\text{pt} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 0$

025

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x + 1) = 0 \quad 025$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad 05$$

$$\Leftrightarrow x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi; (k \in \mathbb{Z}) \quad 05$$

2) Giải phương trình :  $\frac{5 + 7 \cos x + 3 \sin x + \cos 2x}{\cos x - \sin x} = 1$  (1,5đ)

ĐK:  $\tan x \neq 1$

pt  $\Leftrightarrow 6 \cos x + 4 \sin x + \cos 2x + 5 = 0 \quad 025$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x + 4 \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x + 5 = 0 \quad 025$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 3)^2 = (\sin x - 2)^2 \quad 025$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = -5 \\ \cos x + \sin x = -1 \end{cases} \quad 025$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad 025$$

k/h đk được nghiệm  $x = \pi + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad 025$

**Câu 2:** 1) Tìm 4 số nguyên khác nhau lập thành 1 CSC có số hạng thứ nhất bằng tổng bình phương của 3 số hạng còn lại .(1,5đ)

Hd: Gọi 4 số :  $u_1 ; u_1 + d ; u_1 + 2d ; u_1 + 3d$  với  $\begin{cases} u_1; d \in \mathbb{Z} \\ u_1 > 0; d \neq 0 \end{cases} (*) \quad 025$

Có:  $u_1 = (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 \quad 025$

$$\Leftrightarrow 3u_1^2 + (12d - 1)u_1 + 14d^2 = 0 \quad 025$$

pt có ng  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-12 - \sqrt{168}}{24} \leq d \leq \frac{-12 + \sqrt{168}}{24} \quad 025$

k/h (\*) ta được :  $d = -1$  suy ra :  $u_1 = 2$  . 025

Vậy 4 số cần tìm là: 2; 1; 0; -1

025

2) ( 2,5 đ)

$$\text{Có: } u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_n = u_n (u_1 u_2 \dots u_{n-1} - 1 + 1) = u_n (u_n - 1); \forall n = 2; 3; \dots \quad 05$$

$$\text{Để thấy gt } \Rightarrow u_n > 1; \forall n = 2; 3; \dots; \text{ Suy ra: } \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n (u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n}; \forall n = 2; 3; \dots \quad 05$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad 025$$

$$\text{Do } u_1 = 1; u_2 = 1 + u_1 = 2 \Rightarrow S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (1) \quad 025$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (2) \quad 025$$

$$\text{Do } u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_n > u_1 (1 + u_1)^{n-1} = 2^{n-1} \quad 025$$

$$(\text{Do: } u_2 = 1 + u_1; u_3 = 1 + u_1 u_2 = 1 + u_1 (1 + u_1) > 1 + u_1 \dots; u_n > 1 + u_1 \Rightarrow u_1 u_2 \dots u_n > u_1 (1 + u_1)^{n-1}) \quad 025$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty \quad (2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \quad 025$$

**Câu 3:** 1) ( 2đ) Tìm hạng tử không chứa x của khai triển:  $P(x) = \left( 2 + x + \frac{5}{x} \right)^8$

$$G: P(x) = \left[ 2 + \left( x + \frac{5}{x} \right) \right]^8 \quad 025$$

$$P(x) = \left( 2 + x + \frac{5}{x} \right)^8 = C_8^0 \cdot 2^8 + C_8^2 \cdot 2^7 \cdot \left( x + \frac{5}{x} \right) + C_8^2 \cdot 2^6 \cdot \left( x + \frac{5}{x} \right)^2 + \dots + C_8^8 \left( x + \frac{5}{x} \right)^8 \quad 05$$

mà:

$$\left( x + \frac{5}{x} \right)^k = C_k^0 x^k + C_k^1 x^{k-1} \left( \frac{5}{x} \right)^1 + C_k^2 x^{k-2} \left( \frac{5}{x} \right)^2 + \dots + C_k^n \left( \frac{5}{x} \right)^n = x^k + C_k^1 x^{k-2} \cdot 5 + C_k^2 x^{k-4} \cdot 5^2 \dots + \frac{5^k}{x^k} (*) \quad 025$$

Số hạng ở Vế phải của (\*) không chứa x khi  $k = 2m$ , hệ số của số hạng này là :

$$C_{2m}^m \cdot 5^m, m \in N \wedge m \leq 4 \quad 05$$

Vậy hạng tử không chứa x trong  $P(x)$  là :  $C_8^0 \cdot 2^8 + C_8^2 \cdot 2^6 \cdot C_2^1 \cdot 5^1 + \dots + C_8^8 \cdot C_8^4 \cdot 5^4 =$  05

2) ( 2 đ) Phòng thi có 24 thí sinh được xếp vào 12 bàn, mỗi bàn xếp đủ 2 thí sinh. Tính xác suất để hai thí sinh A và B được ngồi chung một bàn .

G: chọn 2 ts xếp vào bàn thứ nhất, có  $C_{24}^2$  cách, sau đó chọn tiếp 2 hs trong 22 hs còn lại xếp vào bàn thứ

2, có  $C_{22}^2$  cách, cứ tiếp tục như thế ta có  $|\Omega| = C_{24}^2 \cdot C_{22}^2 \cdot C_{20}^2 \dots C_4^2 \cdot C_2^2$

075

Gọi biến cố M:”.....”

Chọn 1 bàn trong 12 bàn để xếp 2 ts A, B có  $C_{12}^1$  cách, xếp 22 ts còn lại vào 11 bàn, mỗi bàn

2 hs nên theo trên có :  $C_{12}^1 \cdot C_{22}^2 \dots C_4^2 \cdot C_2^2$ , suy ra:  $|\Omega_A| = 12 \cdot C_{22}^2 \cdot C_{20}^2 \dots C_4^2 \cdot C_2^2$  1,0

Vậy:  $P(A) = \frac{12}{C_{24}^2} = \frac{1}{23}$  025

**Câu 4:** 1) (1,0 đ) Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right)$$

Nhận xét:  $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  0,25

Nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right)$  0,25

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1. \quad 025 + 025$$

2) ( 1,0 đ) Cho ba số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện:  $\frac{a}{2016} + \frac{b}{2017} + \frac{c}{2018} = 0$

Chứng minh rằng phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  luôn có nghiệm

G: Đặt :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  suy ra f(x) liên tục trên  $\left[0; \frac{2017}{2016}\right]$

Với  $c=0 \Rightarrow f(x)=0$  có nghiệm  $x=0$  025

Với  $c \neq 0$

Ta có:  $f(0) = c$

$$f\left(\frac{2017}{2016}\right) = a \cdot \frac{2017^2}{2016^2} + b \cdot \frac{2017}{2016} + c = \frac{2017^2}{2016} \left( \frac{a}{2016} + \frac{b}{2017} + c \cdot \frac{2016}{2017^2} \right) \quad 025$$

$$= \frac{2017^2}{2016} \left( -\frac{c}{2018} + c \cdot \frac{2016}{2017^2} \right) \\ = \frac{-c}{2016 \cdot 2018} < 0 \quad 025$$

$$\Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{2017}{2016}\right) = \frac{-c^2}{2016 \cdot 2018} < 0 \Rightarrow \exists \text{ ít nhất 1 số } \alpha \in \left(0; \frac{2017}{2016}\right) : f(\alpha) = 0$$

hay phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất 1 nghiệm thuộc  $\left(0; \frac{2017}{2016}\right)$  025

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

**Câu 5:** (3đ) Hình vẽ: 025

Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D suy ra D là

trung điểm  $A'C'$ . kẻ đường thẳng qua D, // AC và cắt AB tại  $A'$ , cắt BC tại  $C'$ . Có :  $\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC}$  05

Đặt  $k = \frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC}$ , suy ra :  $V_B^k$  biến đoạn AC thành  $A'C'$ . Gọi trung điểm PK là  $O_1$ , tâm đường

tròn S là O .

05

Có: đường tròn S là đường tròn nội tiếp tam giác  $BA'C'$ , do đó ta cần chứng minh:  $V_B^k$  biên  $O_1$

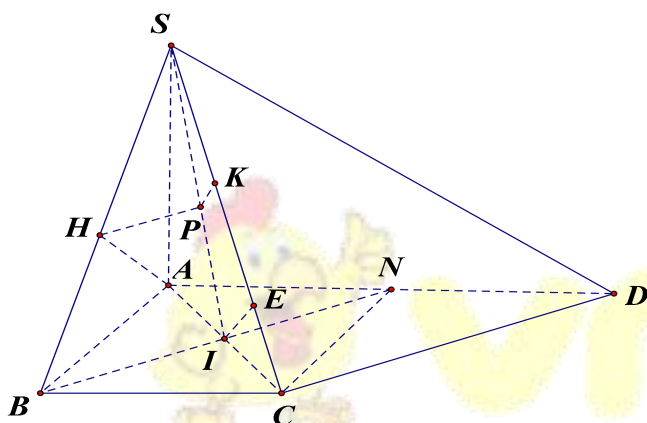
thành O tức là chứng minh  $\frac{BO}{BO_1} = \frac{BA'}{BA}$ . 075

Có:  $OP \perp BA'; OD \perp A'C' \Rightarrow \Delta BPO \sim \Delta BDA' \Rightarrow \frac{BO}{BO_1} = \frac{BA'}{BA}$  ( $PO_1$ ; BA là 2 đường cao tương ứng) 075

Vậy ta có đpcm. 025

**Câu 6: (4đ) Hình vẽ:**

025



+ Gọi N là trung điểm AD. Ta có:

$AN = BC = a$ , suy ra  $CN = AB = a$ , suy ra  $CN = 1/2AD$  05

suy ra tam giác ACD vuông tại C. 025

Suy ra  $CD \perp AC$ . Mà  $CD \perp SA$  nên  $CD \perp SC$ , suy ra tam giác SCD vuông tại C. 05

+ Ta có  $ND = BC = a$ , suy ra  $BN \parallel CD$ . 025

+ Đặt  $HP \parallel BI$  (I là giao điểm của AC và BN,  $P \in SI$ ) suy ra  $HP \parallel CD$  025

$\Rightarrow d(H, (SCD)) = d(P, (SCD))$  025

+ kẻ  $IE \perp SC$ , suy ra  $IE \perp (SCD)$  ( vì  $(SAC) \perp (SCD)$ ). 05

+ Tam giác ICE đồng dạng với tam giác SCA nên:  $IE = \frac{SA \cdot IC}{SC} = \frac{a}{2}$ . 05

+ Kẻ  $PK \perp SC$ , suy ra  $PK \parallel IE$ , suy ra  $PK \perp (SCD)$  025

$d(P, (SCD)) = PK = \frac{SH \cdot IE}{SB} = \frac{SA^2 \cdot IE}{SB^2} = \frac{a}{3}$ . Vậy  $d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}$  05

... hết...

TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ OLYMPIC 24/3 QUẢNG NAM

TỔ TOÁN – TIN

Môn thi: TOÁN 11

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

**Câu 1 (5,0 điểm).**

a/ Giải các phương trình sau:  $\frac{\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2}{1 - \sin x} = 1$

b/ Cho các tập hợp các số nguyên liên tiếp như sau:  $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \dots$ , trong đó mỗi tập hợp chứa nhiều hơn tập hợp ngay trước nó 1 phần tử, và phần tử đầu tiên của mỗi tập hợp lớn hơn phần tử cuối cùng của tập hợp ngay trước nó 1 đơn vị. Gọi  $S_n$  là tổng của các phần tử trong tập hợp thứ  $n$ . Tính  $S_{999}$ .

**Câu 2 (3,0 điểm).**



a/Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi : 
$$\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm công thức tính  $u_n$  theo  $n$ .

b/ Cho phương trình:  $a \cos 2x + b \cos x + c \sin 2x + d \sin x = 0$ , với  $a, b, c, d$  là các số thực. Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm.

### Câu 3 (4,0 điểm).

a/.Cho  $f(x) = (\frac{1}{4}x^2 + x + 1)^2(x+2)^{3n}$ , với  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn:  $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$ .

Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển trên.

b/. Tìm giới hạn:  $H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017} - 2017}{x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} - 2018}$

### Câu 4 (2,0 điểm).

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 10 số đôi một khác nhau, trong đó các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải nhưng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì không được xếp như vậy.

### Câu 5(2,0 điểm).

Có 3 trung tâm thành phố A, B, C tạo thành một tam giác trên vùng đồng bằng. Tìm vị trí M trong tam giác ABC để xây dựng một bến xe mà tổng khoảng cách đi từ bến xe M đến các trung tâm thành phố là ngắn nhất.

**Câu 6 (4,0 điểm).** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $H$  là trung điểm của  $AM$ . Biết  $HB = HC = a$ ,  $\widehat{HBC} = 30^\circ$ ; góc giữa mặt phẳng  $(SHC)$  và mặt phẳng  $(HBC)$  bằng  $60^\circ$ .

a/Tính AH.

b/ Tính cosin của góc giữa đường thẳng  $BC$  và mặt phẳng  $(SHC)$ .

TRƯỜNG THPT LÊ HỒNG PHONG

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ OLYMPIC 24/3 QUẢNG NAM

TỔ TOÁN – TIN

Môn thi: TOÁN 11

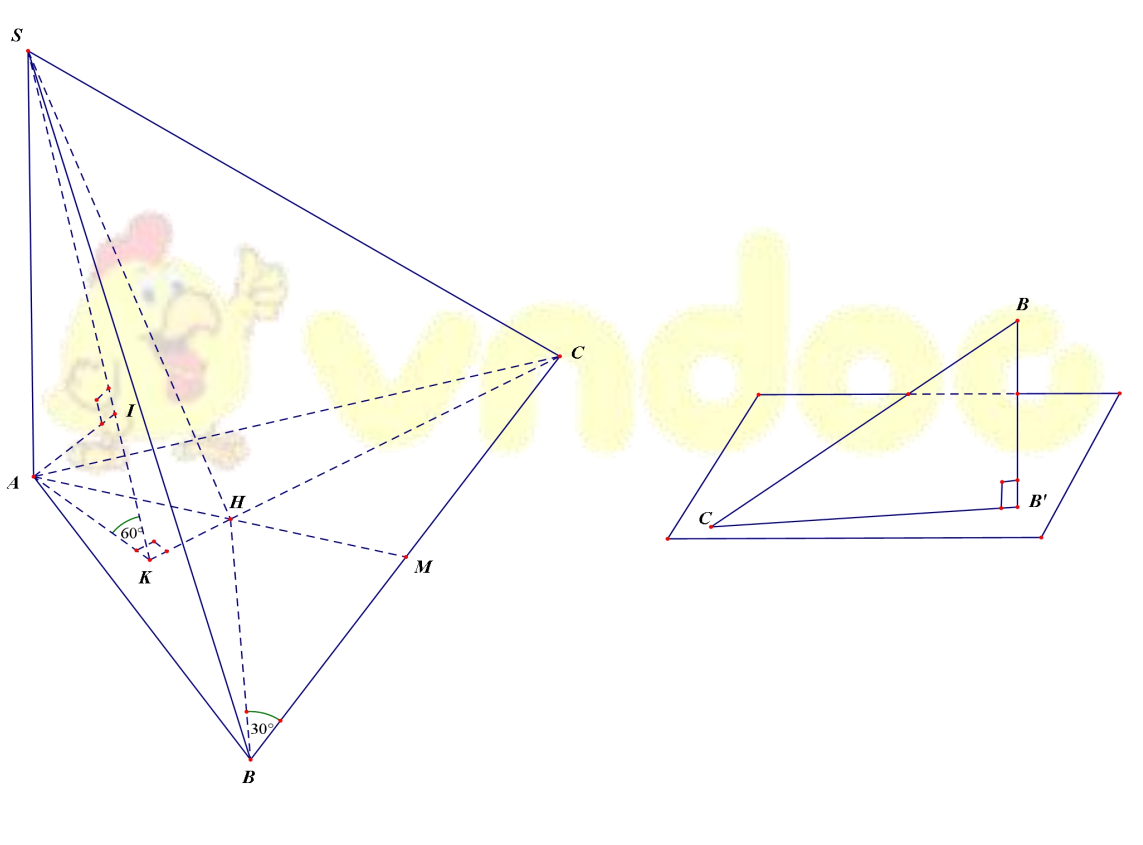
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

|                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| <p>Câu 1<br/>a</p> | <p>Điều kiện: <math>x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})</math></p> <p>Khi đó <math display="block">\frac{\cos 2x - \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 2}{1 - \sin x} = 1</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - (\sin x + \cos x) + 2 = 1 - \sin x</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})</math></p> <p>Đổi chiều điều kiện phương trình có nghiệm là:</p> <p><math>x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})</math></p> | <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0.75</p> <p>0.25</p> |
| <p>Câu 1b</p>      | <p>Ta thấy tập hợp thứ <math>n</math> chứa <math>n</math> số nguyên liên tiếp mà số cuối cùng là</p> $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$ <p>Khi đó <math>S_n</math> là tổng của <math>n</math> số hạng trong một cấp số cộng có số hạng đầu</p> <p><math>u_1 = \frac{n(n+1)}{2}</math>, công sai <math>d = -1</math> (coi số hạng cuối cùng trong tập hợp thứ <math>n</math> là số hạng đầu của cấp số cộng này), ta có</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p>0,5</p> <p>0,5</p>                          |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|        | $S_n = \frac{1}{2}n[2u_1 + (n-1)d] = \frac{1}{2}n(n^2 + 1).$ <p>Vậy <math>S_{999} = \frac{1}{2}.999(999^2 + 1) = 498501999</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,5  |
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5  |
| Câu 2a | <p>Ta có:</p> $u_1 = 11 = 10 + 1$ $u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 2$ $u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3$ <p>Dự đoán: <math>u_n = 10^n + n</math> (1)</p> <p>Chứng minh:</p> <p>Ta có: <math>u_1 = 11 = 10^1 + 1</math>, công thức (1) đúng với <math>n=1</math></p> <p>Giả sử công thức (1) đúng với <math>n=k</math> ta có : <math>u_k = 10^k + k</math></p> <p>Ta có: <math>u_{k+1} = 10(10^k + k) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k + 1)</math>. Công thức(1) đúng với <math>n=k+1</math></p> <p>Vậy <math>u_n = 10^n + n, \forall n \in \mathbb{N}</math>.</p> | 0.25 |
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.25 |
| Câu 2b | <p>Đặt <math>f(x) = a\cos 2x + b\cos x + c\sin 2x + d\sin x</math></p> <p><math>f(x)</math> liên tục trên <math>\mathbb{R}</math></p> <p><math>f(0) = a + b,</math></p> <p><math>f(\frac{\pi}{2}) = -a + d, f(\pi) = a - b, f(\frac{3\pi}{2}) = -a - d</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5  |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                   |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
|        | <p>Có <math>f(0) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi) + f(\frac{3\pi}{2}) = 0</math> nên tồn tại ít nhất một cặp số <math>i, j \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}</math></p> <p>Sao cho <math>f(i) f(j) &lt; 0</math> hoặc cả 4 giá trị bằng 0</p> <p>Hay pt đã cho có nghiệm.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5<br>0,25                       |
| Câu 3a | <p>Từ <math>A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n</math> tìm được <math>n = 5</math></p> <p>Có <math display="block">f(x) = \frac{1}{16}(x+2)^4(x+2)^{3n} = \frac{1}{16}(x+2)^{3n+4} = \frac{1}{16}(x+2)^{19}</math> <math display="block">= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{19} C_{17}^k x^k 2^{19-k}</math></p> <p>Hệ số ứng với <math>x^{10}</math> là: <math>\frac{1}{16} 2^9 C_{19}^{10} = 2956096</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,5<br>0,5                        |
| Câu 3b | <p><math display="block">H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \dots + (x^{2017}-1)}{(x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \dots + (x^{2018}-1)}</math></p> <p><math display="block">= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{2016} + x^{2015} + \dots + x + 1)]}{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)]}</math></p> <p><math display="block">= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{2016} + x^{2015} + \dots + x + 1)}{1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)}</math></p> <p><math display="block">= \frac{1 + (1+1) + (1^2+1+1) + \dots + (1^{2016} + 1^{2015} + \dots + 1+1)}{1 + (1+1) + (1+1+1) + \dots + (1^{2017} + 1^{2016} + \dots + 1+1)}</math></p> <p><math display="block">= \frac{1+2+3+\dots+2017}{1+2+3+\dots+2018}</math></p> | 0,5<br>0,25<br>0,25<br>0,5<br>0,5 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|       | $= \frac{2017.2018}{2018.2019} = \frac{2017}{2019}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |
| Câu 4 | <p>Gọi số tự nhiên có 10 chữ số là: <math>\overline{a_1a_2a_3\dots a_{10}}</math> (<math>a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}</math>, <math>a_1 \neq 0</math>)</p> <p>Theo đề thì nhất thiết các chữ số 1, 2, 3, 4 và 6 phải đứng trước số 5. Do đó chữ số 5 chỉ có thể đặt ở các vị trí: <math>a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}</math>.</p> <p>+ TH1: <math>a_{10} = 5</math>: Chữ số 6 có 9 vị trí, bộ (1,2,3,4) có <math>C_8^4</math> vị trí và bốn chữ số 0,7,8,9 có 4! Cách sắp xếp. Như vậy có <math>9C_8^44!</math> Cách sắp xếp (kể cả số 0 đứng đầu)</p> <p>Ta bỏ đi trường hợp <math>a_1 = 0</math> có <math>8C_7^43!</math> cách</p> <p>Như vậy TH1 có: <math>9C_8^44! - 8C_7^43!</math> (số).</p> <p>+ TH2: <math>a_9 = 5</math>: ta có: <math>8C_7^44! - 7C_6^43!</math> (số).</p> <p>+ TH2: <math>a_8 = 5</math>: ta có: <math>7C_6^44! - 6C_5^43!</math> (số).</p> <p>+ TH2: <math>a_7 = 5</math>: ta có: <math>6C_5^44! - 5C_4^43!</math> (số).</p> <p>+ TH2: <math>a_6 = 5</math>: ta có: <math>5C_4^44!</math> (số).</p> <p>Từ các trường hợp trên cộng lại ta được số các số cần tìm là: 22680(số)</p> | <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| Câu   | Dùng phép quay quanh A với góc quay $60^\circ$ biến M thành M'; C thành C'                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5                                                                                |

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                  |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| <p><b>5:</b></p>                   | <p>Ta có <math>MA+MB+MC = BM+MM'+M'C'</math></p> <p><math>MA+MB+MC</math> bé nhất khi bốn điểm <math>B,M,M',C'</math> thẳng hàng.</p> <p>Khi đó góc <math>BMA=120^0</math>,</p> <p>góc <math>AMC=120^0</math></p> <p>Ta được vị trí của <math>M</math> trong tam giác <math>ABC</math>.</p> | <p>0.5</p> <p>0,5</p> <p>0.5</p> |
| <p><b>Câu</b></p> <p><b>6.</b></p> |                                                                                                                                                                                                          |                                  |

|                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Hình vẽ cho câu a                                                                                                                                 |     |
| Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của $A$ trên $HC$ .                                                                                               | 0,5 |
| Ta có $AH = HM = HB \sin 30^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow AK = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .                                  | 0,5 |
| Góc giữa $(SHC)$ và $(ABC)$ là $\widehat{SKA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$                                  | 0,5 |
| Hình vẽ cho câu b                                                                                                                                 |     |
| Gọi $B'$ là hình chiếu của $B$ trên $(SHC)$ , suy ra góc giữa $BC$ và $(SHC)$ là $\widehat{BCB'}$ .                                               |     |
| Gọi $I$ là hình chiếu của $A$ trên $SK \Rightarrow AI \perp (SHC)$ .                                                                              | 0,5 |
| Ta có $BB' = d(B, (SHC)) = 2d(M, (SHC)) = 2d(A, (SHC)) = 2AI$ .                                                                                   | 0,5 |
| Trong tam giác vuông $SAK$ , ta có                                                                                                                |     |
| $AI = \frac{AK \cdot AS}{\sqrt{AK^2 + AS^2}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{3a}{8} \Rightarrow BB' = \frac{3a}{4}$ . | 0,5 |
| Do đó $\sin \widehat{BCB'} = \frac{BB'}{BC} = \frac{3a}{4 \cdot 2BM} = \frac{3a}{8 \cdot HB \cdot \cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .          |     |
| Vậy $\cos \widehat{BCB'} = \sqrt{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ .                                                                       | 0,5 |

**ĐỀ THI OLYPIC 24/03 NĂM HỌC 2016- 2017****Môn: Toán 11****Thời gian: 150 phút ( không kể thời gian giao đề)****Câu 1: 2 điểm**

- 1) Giải phương trình :  $2 \tan x + \cot x = \tan^2 x + \frac{2}{\sin 2x}$
- 2) Tìm m để phương trình sau có nghiệm  $x \in (\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4})$   
 $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$

**Câu 2: 2 điểm**

- 1) Tính giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + x - 2}{2\sqrt{x} - 1 - x}$
- 2) Tìm số nguyên dương n sao cho:  $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+12}$

**Câu 3: 2 điểm**

Cho các số : 1, 2, 3, 4

- 1) Hỏi lập được bao nhiêu số có 5 chữ số trong đó có 2 chữ số 1 và ba chữ số còn lại khác nhau và khác số 1.
- 2) Tính tổng các số lập được ở câu 1)

**Câu 4: 3 điểm**

- 1) Lập phương trình đường tròn (C) qua điểm A (-1;-2) và tiếp xúc với đường thẳng d:  $7x - y - 5 = 0$  tại điểm M (1;2)
- 2) Cho lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$ . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho  $AM = \frac{1}{2}AB$ . Gọi E là trung điểm của CA.
  - a) Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MEB').
  - b) Gọi  $D = BC \cap (MEB')$ ,  $K = AA' \cap (MEB')$ . Tính tỉ số  $\frac{CD}{CB}$  và  $\frac{AK}{AA'}$ .

**Câu 5: 1 điểm**Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$ .



Ghi chú: - Học sinh không được sử dụng tài liệu trong quá trình thi.

- Đề thi có 01 trang.

### ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

| Câu |          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm                                            |
|-----|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1   |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2,00                                            |
|     | 1(1,0 đ) | <p>+) Điều kiện</p> <p>+) Tìm được <math>\tan x = 1</math> hoặc <math>\tan x = 0</math></p> <p>+) Giải đúng và loại nghiệm đúng. ĐS: <math>x = \frac{\pi}{4} + k\pi</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>              |
|     | 2(1,0 đ) | <p>+) Đưa PT về dạng: <math>2\cos^2 4x - \cos 4x = 2m + 1</math> (1)</p> <p>Đặt <math>t = \cos 4x</math> với <math>x \in (\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}) \Rightarrow t \in (-1; 0)</math></p> <p>+ Xét <math>f(t) = 2t^2 + t</math> trên <math>(-1; 0)</math> có bảng biến thiên</p> <p>Và PT (1) có nghiệm khi đường thẳng <math>y = 2m + 1</math> (song song hoặc trùng <math>0x</math>) cắt <math>f(t)</math> trên <math>(-1; 0)</math></p> <p>+) ĐS: <math>m \in (-\frac{1}{2}; 1)</math></p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

|   |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                         |
|---|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 2 |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,00                    |
|   | 1(1,0 đ) | <p>+) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + x - 2}{2\sqrt{x} - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)^2 - (3-2x)^2}{x-2-\sqrt{3-2x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}+1+x}{4x-(1+x)^2}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x}+1+x}{x-2-\sqrt{3-2x}} = 2</math></p>                                                                                                             | 0,75<br><br>0,25        |
|   | 2(1,0 đ) | <p>Tìm số nguyên dương n sao cho: <math>2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+12}</math></p> <p>+) Ta có: <math>k.2^k = (k-1).2^{k+1} - (k-2).2^k, \forall k</math></p> <p>+) <math>\Rightarrow \sum_{k=2}^n k.2^k = \sum_{k=2}^n [(k-1).2^{k+1} - (k-2).2^k] = (n-1).2^{n+1}</math></p> <p>+) <math>\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+12} \Rightarrow n-1 = 2^{11} \Rightarrow n = 2049</math></p> | 0,25<br><br>0,25<br>0,5 |
| 3 |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,0                     |
|   | 1(1,0 đ) | <p>+) Mỗi số có 5 chữ số gồm 2 số 1 và 3 số khác là hoán vị 5 phần tử 1,1,2,3,4. Do 2 số 1 khi hoán vị vẫn được 1 số. vậy các số cần lập là:</p> <p><math>\frac{P_5}{P_2} = 60</math></p>                                                                                                                                                                                                                 | 1,0                     |
|   | 2(1,0 ®) | <p>+) Số có 5 chữ số dạng: <math>\overline{abcde}</math></p> <p><math>S = \sum \overline{abcde} = 10^4 \cdot \sum a + 10^3 \cdot \sum b + 10^2 \cdot \sum c + 10 \cdot \sum d + e</math></p> <p>Mỗi số a có 4! cách chọn <math>\overline{bcde} \rightarrow</math> mỗi số <math>a \in \{1,1,2,3,4\}</math> xuất hiện 4! lần</p>                                                                            |                         |

|   |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                     |
|---|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
|   |          | $\Rightarrow \sum a = (1+1+2+3+4).24 = 264$ <p>Tương tự <math>\sum b = \sum c = \sum d = \sum e = 264</math></p> <p>Vậy <math>S = \frac{264.11111}{2!} = 1466652</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,0                                                 |
| 4 |          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 3,0 đ                                               |
|   | 1(1,0 đ) | <p>+) Viết được phương trình đường thẳng <math>\Delta</math> đi qua tâm I của đường tròn (C) là: <math>\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 2 - t \end{cases}</math> từ đó suy ra <math>I(1+7t; 2-t)</math></p> <p>+) (C) tiếp xúc với d khi và chỉ khi <math>IM=R \Leftrightarrow IM^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=50t^2</math></p> <p>+) (C) có dạng <math>(x-1-7t)^2+(y-2+t)^2=50t^2</math></p> <p>+) <math>A \in (C) \Rightarrow t=-1</math>. Vậy (C): <math>(x+6)^2+(y-3)^2=50</math></p> | 0,25<br><br><br><br>0,25<br>0,25<br>0,25            |
|   | 2(2,0 đ) | <p>a,(0,75)</p> <p>+) Xác định được điểm D và suy ra được 2 đoạn giao tuyến DE và DD'</p> <p>+) Xác định được điểm K; suy ra được đoạn giao tuyến EK và KB'</p> <p>+) Kết luận là tứ giác DEKB'</p> <p>b,(1,25)</p> <p>+) Xét tam giác MBB' có <math>\frac{AK}{BB'} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AK}{AA'} = \frac{1}{3}</math></p> <p>+) Trong (ABC). Dựng EN // AB (N ∈ BC), khi đó <math>EN = \frac{1}{2} AB</math></p>                                          | 0,25<br><br>0,25<br><br>0,25<br><br>0,5<br><br>0,25 |

|   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                   |
|---|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
|   |  | <p>+) Xét tam giác DBM có: <math>\frac{DN}{DB} = \frac{NE}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow DN = \frac{1}{2}BN</math></p> <p>Suy ra D là trung điểm CN. Vậy <math>\frac{CD}{CB} = \frac{1}{4}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5                                               |
| 5 |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1,0 đ                                             |
|   |  | <p>Tìm Max y: <math>y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cdot \cos x \leq \sin^4 x + \sqrt{3} \cdot \cos x</math> (1)</p> <p>Ta chứng minh: <math>\sin^4 x + \sqrt{3} \cdot \cos x \leq \sqrt{3}</math>, <math>\forall x \in R</math> (2)</p> <p><math>\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (1 - \cos x) - \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x)^2 \geq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (1 - \cos x) [\sqrt{3} - (1 - \cos x)(1 + \cos x)^2] \geq 0</math> (3)</p> <p>Theo bất đẳng thức Cô si:</p> <p><math>(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos x) = \frac{1}{2}(2 - 2\cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos x) \leq</math></p> <p><math>\frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \right)^2 = \frac{32}{27} &lt; \sqrt{3}</math></p> <p>T (3) luôn đúng suy ra ĐT (2) luôn đúng suy ra <math>y \leq \sqrt{3}, \forall x</math></p> <p>Dấu “=” <math>\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi</math>. Max <math>y = \sqrt{3}</math></p> <p>Tương tự: <math>y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cdot \cos x \geq -\sin^4 x + \sqrt{3} \cdot \cos x</math>,</p> <p>Min <math>y = -\sqrt{3}</math>, đạt <math>x = \pi + k2\pi</math></p> | <p>0,25</p> <p>Đ 0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM KỲ THI OLYMPIC 24/3

TRƯỜNG THPT DUY TÂN

NĂM HỌC: 2016-2017

MÔN : TOÁN

(Thời gian làm bài: 150 phút)

**Bài 1)** Giải pt:

a)  $\frac{1}{2}(\sin^{2015} x + \cos^{2015} x) = \sin^{2017} x + \cos^{2017} x$

b) 2) Tìm m để pt  $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x - m = 0$  có nghiệm trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

**Bài 2)**Cho phương trình:  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a) Với  $d = -2017$ , chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.b) Với  $d = 1$ , giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$ **Bài 3)**

a) Một đa giác đều có 30 cạnh. S là tập tất cả các tứ giác có đỉnh lấy từ các đỉnh của đa giác đó. Chọn ngẫu nhiên 1 tứ giác từ S. Tính xác suất để tứ giác được chọn là hình chữ nhật.

b) Từ các số: 0;1;2;3;4;5;6 lập số có 3 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 1 số. Tính xác suất để số chọn được là số có chữ số hàng đơn vị gấp đôi hàng trăm.

**Bài 4)** Cho  $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2017}{u_n}\right) \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$

a) CMR  $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ b) CMR  $(u_n)$  là có giới hạn và tìm  $\lim u_n$

**Bài 5)** Tìm  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2017} - 2017x + 2016}{(x-1)^2}$

**Bài 6)** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang cân ( $AD \parallel BC$ ) và  $BC=2a$ ,  $AB=AD=DC=a$  ( $a>0$ ). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SD vuông góc với AC.

a) Tính SD.

b) Mặt phẳng ( $\alpha$ ) qua điểm M thuộc đoạn OD (M khác O, D) và song song với hai đường thẳng SD và AC.

Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng ( $\alpha$ ). Biết  $MD = x$ .  
Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.



## KÌ THI OLYMPIC 24-3-2017

### ĐỀ ĐỀ NGHỊ TOÁN 11 – TRƯỜNG THPT SÀO NAM

#### Câu 1: ( 5đ)

a. Giải phương trình:  $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$

b. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$$

#### Câu 2: ( 4đ)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2017} \end{cases}$$

Đặt  $S_n = \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}}$ . Tìm  $\lim S_n$

#### Câu 3: ( 3đ)

a. Có 2 hộp chứa bi, hộp thứ nhất chứa 3 bi xanh 2 bi đỏ, hộp thứ 2 chứa 1 bi xanh 2 bi đỏ. Bốc ngẫu nhiên mỗi hộp ra 1 bi. Tính xác suất để 2 bi chọn ra có cùng màu.

b. Cho các số 0,1,2,3,4,5,6,7.

Gọi  $X$  là số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số đã cho mà mỗi số luôn có mặt chữ số 1 và 7. Tìm số phần tử của  $X$ . Chọn ngẫu nhiên từ  $X$  ra 1 số. Tính xác suất để số chọn ra có chữ số 1 và 7 đứng kề nhau đồng thời chữ số 1 đứng bên trái chữ số 7.

**Câu 4: ( 2đ)**

Tìm  $m$  để hàm số sau liên tục tại  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} & \text{khi } x > 0 \\ mx + m + 2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

**Câu 5: ( 2đ)**

Cho  $\triangle ABC$  có  $M\left(\frac{-9}{2}; \frac{3}{2}\right)$  là trung điểm cạnh  $AB$ . Điểm  $H(-2; 4)$  là chân đường cao kẻ từ  $B$  và  $I(-1; 1)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $\triangle ABC$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

**Câu 6: ( 4đ)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ .  $\triangle SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với  $(ABCD)$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $I$  là trung điểm của  $BM$ .

- Tính góc giữa  $DI$  và  $(SCD)$
- Tính  $d(DM, SC)$

**ĐÁP ÁN TOÁN 11****Câu 1:****a. ( 2đ)**

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) + (2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2) = 0 \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x + \sin x + 4) = 0 \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \cos x + \sin x + 4 = 0 \end{cases} \quad 0,25 \text{ đ}$$

$$\bullet \quad 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\bullet \quad \text{Chứng minh được: } \cos x + \sin x + 4 = 0 \quad 0,25 \text{ đ}$$

**b. ( 3đ)**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x + 4y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad 0,25 \text{ đ}$$

\*  $y = x + 1$  ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) + (x+1 - \sqrt{3x+1}) + (x+2 - \sqrt{5x+4}) = 0 \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) \frac{x^2 - x}{x+1 + \sqrt{3x+1}} + \frac{x^2 - x}{x+2 + \sqrt{5x+4}} = 0 \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{cases} \quad 0,5 \text{ đ}$$

\*  $y = 2x+1$  ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 3 - 3x = \sqrt{4x+1} + \sqrt{9x+4}$$

$$\Leftrightarrow 3x + (\sqrt{4x+1} - 1) + (\sqrt{9x+4} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left( 3 + \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 1} + \frac{9}{\sqrt{9x+4} + 2} \right) = 0 \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad 0,5 \text{ đ}$$

• **Kết luận:**  $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

## Câu 2: (4đ)

$$u_{k+1} - u_k = \frac{u_k^2}{2017} \Rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} = \frac{u_k^2}{2017 \cdot u_k} \quad 0,5 \text{ đ}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k \cdot u_{k+1}} = \frac{u_k}{2017 \cdot u_{k+1}} \Rightarrow \frac{u_k}{u_{k+1}} = 2017 \left( \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) \quad 0,5 \text{ đ}$$

•  $\frac{u_1}{u_2} = 2017 \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right)$

$$\frac{u_2}{u_3} = 2017 \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right)$$

• .....

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2017 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

$$\Rightarrow S = 2017 \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2017 \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad 1 \text{ đ}$$



Ta có:  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2017} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n)$  tăng. 0,5 đ

Giả sử  $(u_n)$  bị chặn trên  $\Rightarrow (u_n)$  có giới hạn và  $\lim u_n = a (a > 1)$

Ta có:  $a = a + \frac{a^2}{2017} \Leftrightarrow a^2 = 0$  vô lý  $\Rightarrow (u_n)$  không bị chặn trên

$\Rightarrow \lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim S = 2017$  0,5 đ

**Câu 3:**

a. (1đ) Không gian mẫu:  $|\Omega| = C_5^1 \cdot C_3^1$  0,5đ

$|\Omega_A| = C_1^1 \cdot C_3^1 + C_2^1 \cdot C_2^1$  1 đ

$\Rightarrow P = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$  0,5 đ

**b. (2đ)**

- Có  $A_5^2$  cách chọn chữ số 1 và 7 vào 5 vị trí.

Có 5 cách chọn chữ số tận cùng bên trái.

Có  $A_5^2$  cách chọn 2 trong 5 chữ số còn lại vào 2 vị trí còn lại  $\Rightarrow A_5^2 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 2000$  số.

0,5 đ

- Số cách chọn 2 chữ số 1 và 7 đứng kề nhau mà chữ số 1 đứng bên trái chữ số 7 trong 1 dãy có 5 vị trí là 4 cách. Xét 2 khả năng:

- Trường hợp chữ số 1 đứng tận cùng bên trái lúc đó chữ số 7 đứng ở hàng ngàn.

Còn lại 6 chữ số ( cả chữ số 0). Xếp vào 3 vị trí  $\Rightarrow A_6^3$  cách chọn  $\Rightarrow A_6^3 = 120$  số.

0,5 đ

- Trường hợp chữ số 1 đứng ở vị trí khác: chữ số 1 ở vị trí hàng ngàn, trăm, chục: có 3 cách chọn chữ số 1 tức là có 3 cách chọn chữ số 7 đứng kề sau chữ số 1.

Số cách chọn chữ số hàng chục ngàn là 5, còn lại 5 chữ số bỏ vào 2 vị trí còn lại.

$\Rightarrow A_5^2$  cách.

Trường hợp này có:  $3 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 300$  số

0,5 đ

$\Rightarrow 120 + 300 = 420$  số.

$\Rightarrow P = \frac{420}{2000} = \frac{21}{100}$

0,5 đ

**Câu 4: (2đ)**

- $f(0) = m + 2$  0,25 đ

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} = m + 2$  0,25 đ

- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$= 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$$
0,5 đ
- $$f \text{ liên tục tại } x=0 \Leftrightarrow m+2 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$$
0,5 đ

**Câu 5: (2đ)**

- $$\overrightarrow{IM} = \left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow ptAB: 7x - y + 33 = 0$$
0,5 đ

- $$A \in AB \text{ có } A(a; 7a+33) \Rightarrow B(-a-9; -7a-30)$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a = -5 \end{cases} \quad 0,5 \text{ đ}$$

TH1:  $a = -4 \Rightarrow A(-4; 5) \text{ và } B(-5; -2) \Rightarrow ptAC: x + 2y - 6 = 0$

Lấy  $C \in AC$  có  $C(6-2c; c)$ .  $IA = IC \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow C(4; 1) \text{ ( loại } c=5) \text{ } 0,5 \text{ đ}$

TH2:  $a = -5 \Rightarrow A(-5; -2), B(-4; 5)$

$\Rightarrow AC: 2x - y + 8 = 0$ .

Làm tương tự:  $\Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 6) \text{ ( loại } c=-5) \text{ } 0,5 \text{ đ}$

**Câu 6: (4đ)**

- a. Gọi N là trung điểm của CD.  $J = MN \cap DI$ . Kẻ  $MH \perp (SCD)$  0,5 đ

Kẻ  $JK // MH \Rightarrow JK \perp (SCD) \Rightarrow$  góc giữa DI và (SCD) là  $\widehat{KDJ}$  0,5 đ

- Tính  $\widehat{KDJ}$ : - Tính được JK 0,25 đ  
- Tính được JD 0,25 đ  
- Tính  $\sin \widehat{KDJ} = \frac{JK}{JD} = \dots \Rightarrow \widehat{KDJ} = \dots$  0,5 đ

- b. Kẻ  $Cx // DM$ . Kẻ  $ME \perp Cx$

Kẻ  $MF \perp SE$ , chứng minh được  $MF \perp (SEC) \Rightarrow d(DM, SC) = MF$

- Tính được  $ME = \dots$  0,5 đ
- $$\frac{1}{MF^2} = \frac{1}{ME^2} + \frac{1}{MS^2} \Rightarrow MF = \dots$$
 0,5 đ

-----Hết-----

TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI OLYMPIC LỚP 11

TỔ TOÁN – TIN

MÔN : TOÁN

\*\*\*\*\*

NĂM HỌC : 2016-2017

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể thời gian giao đề)

\*\*\*\*\*

Câu 1: ( 4,0 điểm ).

a). Giải phương trình:  $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2 \sin 3x$

b). Tính giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3x+1} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot 4x+1} \cdots \sqrt[2017]{2016 \cdot 2017x+1} - 1}{x}$$

Câu 2: ( 4,0 điểm ).

a) Cho dãy số được lập theo quy tắc: 
$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = 2, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Chứng minh số hạng tổng quát của dãy trên là:  $u_n = n^2 - 3n + 3$ 

b) Cho dãy số  $(a_n)$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ (n+2)^2 a_n = n^2 a_{n+1} - (n+1) a_n a_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Tìm  $\lim a_n$ .

Câu 3: ( 3,0 điểm ).

a) Cho khai triển:  $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$

Chứng minh đẳng thức sau:  $C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11} = 11$

b) Tính tổng: 
$$S = \frac{-C_n^1}{2 \cdot 3} + \frac{2C_n^2}{3 \cdot 4} - \frac{3C_n^3}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{(-1)^n n C_n^n}{(n+1)(n+2)}$$

Câu 4: ( 3,0 điểm ). Cho phương trình:  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

c) Với  $d = -2017$ , chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

d) Với  $d = 1$ , giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$

**Câu 5.( 3,0 điểm ).**

a) Cho tam giác  $ABC$  có độ dài các đường cao  $BB' = \sqrt{5}; CC' = 2$  và  $\cos \angle CBB' = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

b) Cho tam giác  $ABC$  có các góc thỏa mãn  $A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$ . Tính các góc của tam giác đó khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất  $P = 2 \cos 4C + 4 \cos 2C + \cos 2A + \cos 2B$

**Câu 6( 3,0 điểm ).** Cho hình chóp  $SABC$  có  $SC \perp (ABC)$  và tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ . Biết

$AB = a; AC = a\sqrt{3}$  và góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB), (SAC)$  bằng  $\alpha$  với  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}}$ .

a) Tính độ dài  $SC$  theo  $a$ .

b) Tính khoảng cách giữa  $SA$  và  $BC$

===== HẾT =====

TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỀ NGHỊ THI OLYMPIC LỚP 11

TỔ TOÁN – TIN

NĂM HỌC : 2016-2017

\*\*\*\*\*

MÔN : TOÁN

Thời gian làm bài : 150 phút (không kể thời gian giao đề)

\*\*\*\*\*

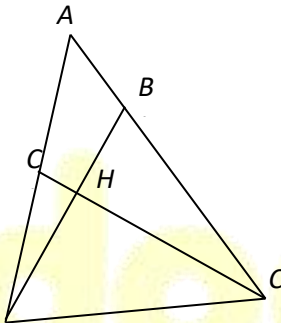
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                             |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1.a | $\Leftrightarrow 4\sin^2 x \sin^2 3x = 6 + 2\sin 3x$ $\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x \sin^2 3x) + 2(1 + \sin 3x) = 0$ $\Leftrightarrow 4[\sin^2 x(1 - \sin^2 3x) + \cos^2 x] + 2(1 + \sin 3x) = 0$ $\Leftrightarrow 4(\sin^2 x \cos^2 3x + \cos^2 x) + 2(1 + \sin 3x) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 x \cos^2 3x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$                                               | <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> |
| 1.b | $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+1}-1) \cdot \sqrt[3]{2.3x+1} \cdot \sqrt[4]{3.4x+1} \dots \sqrt[2017]{2016.2017x+1}-1}{x}$ $+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{2.3x+1}-1) \cdot \sqrt[4]{3.4x+1} \dots \sqrt[2017]{2016.2017x+1}-1}{x}$ $+ \dots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2017]{2016.2017x+1}-1}{x}$ <p>Chứng minh công thức: <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x} = \frac{a}{n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*) \quad (1)</math></p> <p>Áp dụng (1) ta thu được</p> $L = 1+2+3+\dots+2016 = 1008 \cdot 2017 =$ | <p>1,0</p> <p>0.5</p>                       |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |          |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5      |
| 2a. | <p>2. a) Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh số hạng tổng quát của dãy trên là <math>u_n = n^2 - 3n + 3</math></p> <p>+ Với <math>n=1;2</math> đúng</p> <p>+ với <math>n=k&gt;2</math> thì <math>u_k = k^2 - 3k + 3</math></p> <p>+ với <math>n=k+1</math> thì <math>u_k = (k+1)^2 - 3(k+1) + 3</math> đúng</p> | 1.0 điểm |
|     | <p>b) Dễ thấy <math>a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>. Từ giả thiết ta có <math>\frac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \frac{n^2}{a_n} - (n+1)</math></p>                                                                                                                                                           | 3.0      |
|     | <p>Với mỗi <math>n</math> thuộc <math>\mathbb{N}^*</math>, đặt <math>y_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}</math> ta có <math>y_1 = 1</math> và</p>                                                                                                                                                                    | 0.5      |
|     | $(n+2)^2 \left( y_{n+1} - \frac{1}{4} \right) = n^2 \left( y_n - \frac{1}{4} \right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} y_n$                                                                                                                                  | 0.5      |
|     | <p>Do đó <math>y_n = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \left( \frac{n-2}{n} \right)^2 \dots \left( \frac{1}{3} \right)^2 y_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \Rightarrow a_n = \frac{4n^2 (n+1)^2}{16 - n^2 (n+1)^2}</math></p>                                                                                             | 0.5      |
|     | <p>Vậy <math>\lim u_n = -4</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0.5      |
| 3a. | <p>Xét <math>x \neq 1</math> từ khai triển trên nhân hai vế với <math>(x-1)^{11}</math> ta có:</p> $(x^{11} - 1)^{11} = (x-1)^{11} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{110} x^{110}) \quad (2)$                                                                                                                    | 0.5      |

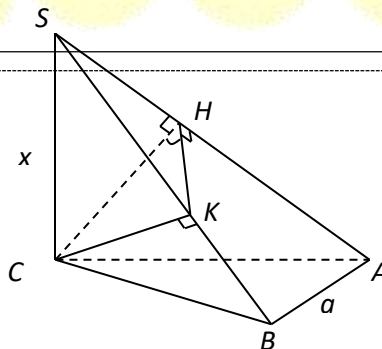
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|     | $VT(2) = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-1)^{11-k} \Rightarrow \text{Hệ số của } x^{11} \text{ trong vế trái bằng } C_{11}^1 = 11$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|     | $VP(2) = \left( \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k} (-1)^k \right) (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{110} x^{110})$ <p><math>\Rightarrow</math> Hệ số của <math>x^{11}</math> trong vế phải bằng</p> $C_{11}^0 a_0 - C_{11}^1 a_1 + C_{11}^2 a_2 - C_{11}^3 a_3 + \dots + C_{11}^{10} a_{10} - C_{11}^{11} a_{11}$ <p>Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh</p>                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5 |
|     | <p>Ta có <math>\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}</math> (3)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
| 3b. | <p>Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: <math>\frac{(-1)^k k C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{(-1)^k k C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5 |
|     | <p>Cho <math>k</math> chạy từ 1 đến <math>n</math> rồi cộng về các đẳng thức trên ta có</p> $(n+1)(n+2)S = -C_{n+2}^3 + 2C_{n+2}^4 - 3C_{n+2}^5 + \dots + (-1)^n n C_{n+2}^{n+2}$ $= -(C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3) + 2(C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4) - 3(C_{n+1}^4 + C_{n+1}^5) + \dots + (-1)^n n C_{n+1}^{n+1}$ $= -C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - C_{n+1}^4 + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}$ $= C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 - (C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + C_{n+1}^4 - C_{n+1}^5 + \dots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1}) =$ $1 - (n+1) - (1-1)^{n-1} = -n$ <p>Vậy <math>S = \frac{-n}{(n+1)(n+2)}</math>.</p> | 0.5 |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                  |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| <p>4</p> | <p>a) d= -2017</p> <p>Đặt <math>f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2013</math> liên tục trên R.</p> <p>Ta có: <math>f(0) = -2017 &lt; 0</math></p> <p>Mặt khác <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty</math>, nên tồn tại 2 số <math>\alpha &lt; 0; \beta &gt; 0</math> sao cho <math>f(\alpha) &gt; 0; f(\beta) &gt; 0</math>. Do đó <math>f(0).f(\alpha) &lt; 0; f(0).f(\beta) &lt; 0</math>.</p> <p>Vậy phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc hai khoảng <math>(\alpha, 0)</math> và <math>(0, \beta)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>0.5</p> <p>0.5</p>            |
|          | <p>b) d=1: Gọi <math>x_0</math> là nghiệm của phương trình (<math>x_0 \neq 0</math>)</p> $x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0}$ <p>Ta có:</p> $(a^2 + b^2 + c^2)(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1) = \left[ a^2 + c^2 + \left( -x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0} \right)^2 \right] (x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1)$ $\geq \left( ax_0 + c \frac{1}{x_0} - x_0^2 + \frac{-1}{x_0^2} - ax_0 - c \frac{1}{x_0} \right)^2 = \left( x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2$ <p>Suy ra: <math>(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{\left( x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \right)^2}{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 1} = \frac{t^2}{t+1}</math> với <math>t = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} \geq 2</math></p> <p>Mặt khác: <math>\frac{t^2}{t+1} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+2) \geq 0</math> (đúng do <math>t \geq 2</math>).</p> <p>Vậy <math>a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}</math>.</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi <math>a = b = c = -\frac{2}{3}</math> (ứng với <math>x_0 = 1</math>)</p> $a = c = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3} \text{ (ứng với } x_0 = -1)$ | <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> |



|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                     |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                     | 0,5 |
| 5a)      | <p>Xét hai trường hợp:</p> <p>+) B và C không tù. Khi đó</p> $\cos \angle CBB' = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $BC = \frac{BB'}{\cos \angle CBB'} = \frac{5}{2}$ <p>Suy ra <math>\sin B = \frac{CC'}{BC} = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}</math></p>                                                        |  | 1   |
| 2,5 điểm | $\Rightarrow \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = \frac{BB'}{\sin A} = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} AB \cdot CC' = \frac{5}{2}$                                                                                                                                                                                        |                                                                                     | 1,0 |
|          | <p>+) B hoặc C tù</p> <p>Do <math>BB' &gt; CC'</math> nên <math>B &lt; C</math> và C tù <math>\Rightarrow \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos C = -\frac{1}{\sqrt{5}}</math></p> <p>Còn <math>\sin B = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{3}{5}</math> (giống trường hợp 1) <math>\Rightarrow \sin A = \frac{2}{5\sqrt{5}}, AB = \frac{25}{2}</math> Suy ra</p> $S = \frac{25}{2}$ |                                                                                     | 0,5 |

|          |                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5b)      | Ta có $A \leq B \leq C \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq C \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \cos C \leq \frac{1}{2}$                                                                                     | 0,5 |
|          | $\cos 2A + \cos 2B = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) = -2 \cos C \cos(A-B) \geq -2 \cos C$ (3)<br>(Do $\cos C \geq 0$ và $\cos(A-B) \leq 1$ ).                                                                       | 0,5 |
|          | Dấu bằng trong (3) xảy ra khi $A = B$ hoặc $C = \frac{\pi}{2}$                                                                                                                                             |     |
|          | Từ đó $P \geq 4(2 \cos^2 C - 1) + 2[(2 \cos^2 C - 1)^2 - 1] - 2 \cos C =$<br>$= 8 \cos^2 C(2 \cos^2 C - 1) - 2 \cos C$                                                                                     | 0,5 |
| 2,5 điểm | $16 \cos^4 C - 8 \cos^2 C + 1 + 1 - 2 \cos C - 4 = (4 \cos^2 C - 1)^2 + (1 - 2 \cos C) - 4 \geq -4$ (4).                                                                                                   | 0,5 |
|          | Dấu bằng trong (4) xảy ra khi $C = \frac{\pi}{3}$                                                                                                                                                          | 0,5 |
|          | Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$                                                                                                                                                 |     |
| 6a       | a) Gọi $H, K$ là hình chiếu của $C$ lên $SA, SB$ .<br>Ta chứng minh được<br>$CK \perp (SAB), SA \perp (CHK)$ .<br>Suy ra $\triangle CHK$ vuông tại $K$ và $SA \perp KH$ .<br>Do đó $\alpha = \angle CHK$ . | 0,5 |
|          |                                                                                                                                                                                                            |     |
|          | Đặt $SC = x > 0$ . Trong tam giác vuông $SAC$ ta có                                                                                                                                                        | 0,5 |
|          |                                                                                                                                                                                                            | 0,5 |



|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|    | $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow CH^2 = \frac{3a^2x^2}{3a^2 + x^2}.$ <p>Tương tự, trong tam giác vuông <math>SBC</math> ta có <math>CK^2 = \frac{2a^2x^2}{2a^2 + x^2}.</math></p> <hr/> <p>Ta có <math>\sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}} \Leftrightarrow \frac{CK^2}{CH^2} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow \frac{2(3a^2 + x^2)}{3(2a^2 + x^2)} = \frac{13}{19} \Leftrightarrow x = 6a, \text{ vì } x &gt; 0. \text{ Vậy } SC =</math></p> | 0.5            |
| 6b | <p>b) kẻ <math>Ax \parallel BC</math>, từ <math>C</math> kẻ <math>CE</math> vuông <math>Ax</math>, kẻ <math>CF</math> vuông góc <math>SE</math> ;</p> <p>ta chứng minh được <math>CF</math> là khoảng cách</p> $\frac{1}{CF^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CS^2} \Rightarrow CF = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$                                                                                                                                                         | 0.5<br><br>1.0 |

TRƯỜNG THPT KHÂM ĐỨC

KÌ THI OLIMPIC NĂM HỌC 2016-2017

Môn thi: TOÁN – Lớp 11

ĐỀ ĐỀ NGHỊ

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

**Câu 1 (5,0 điểm).**

- Giải phương trình:  $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$
- Giải hệ phương trình:  $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$

**Câu 2 (4,0 điểm).** Cho dãy số thực  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1. \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

- Chứng minh dãy số đã cho là dãy số giảm.

b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  và tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{u_n}$

**Câu 3 (3,0 điểm).**

a) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra có chữ số 0 và 1 đứng cạnh nhau.

b) Tìm ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau

$$C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, \dots, C_{23}^{23}.$$

**Câu 4 (2,0 điểm).** Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x}$

**Câu 5 (3,0 điểm).** Cho hình bình hành ABCD. Từ B kẻ các đường thẳng BE vuông góc với CD và BK vuông góc với AD ( $E \in CD, K \in AD$ ). Biết  $KE = a$  và  $BD = b$  ( $b > a$ ). Tính khoảng cách từ B đến trục tâm của tam giác BEK.

**Câu 6 (3,0 điểm).** Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC với cả ba góc nhọn. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) tại A, lấy điểm M. Dựng  $BK \perp AC, BH \perp CM$ . Đường thẳng KH cắt (d) tại N.

a) Chứng minh rằng  $BN \perp CM$  và  $BM \perp CN$

b) Tìm vị trí điểm M trên (d) sao cho đoạn MN ngắn nhất.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

Chữ ký của giám thị 1: ..... Chữ ký của giám thị 2: .....

## TRƯỜNG THPT KHÂM ĐỨC

## ĐỀ ĐỀ NGHỊ

## HƯỚNG DẪN CHẤM THI OLIMPIC

## Môn thi: TOÁN – Lớp 11

*Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)*

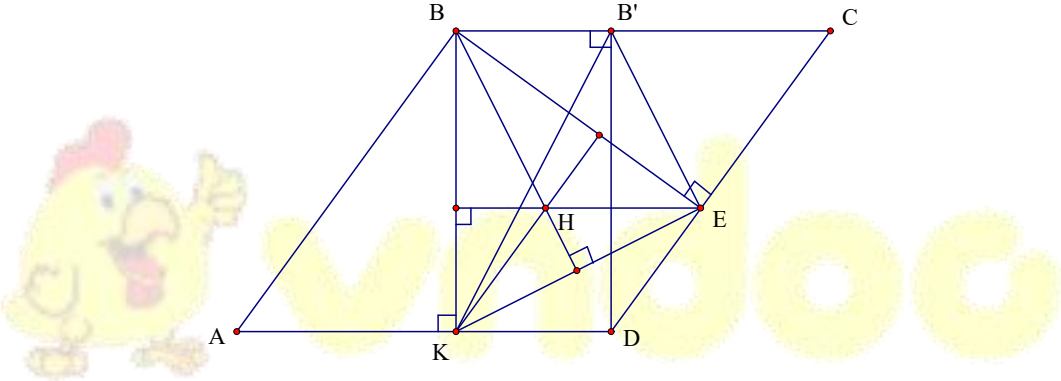
| CÂU          | NỘI DUNG ĐÁP ÁN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ĐIỂM |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 1        | a) Giải phương trình: $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |
| 1a<br>(2,5đ) | $(*) \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x - 2 = 1 + \sin x - 4 \cos x$ $\Leftrightarrow (4 \cos^2 x - 1) + \sin x (2 \cos x - 1) + 2(2 \cos x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1 + \sin x + 2) = 0$ $\begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ 2 \cos x + \sin x = -3 \text{ (VN)} \end{cases} \quad \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ |      |

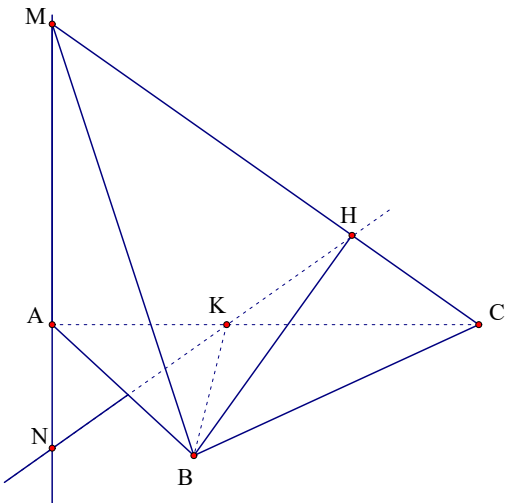
|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                     |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <p><b>1b</b><br/><b>(2,5đ)</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Điều kiện: <math>\cos x \neq 0</math>.</li> <li>Do <math>\cos x \neq 0</math> nên chia hai vế (*) cho <math>\cos^2 x \neq 0</math>, ta được:</li> </ul> $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (\tan x + 1) = \frac{3 \sin x \cos x - 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ $\Leftrightarrow \tan^2 x (\tan x + 1) = 3 \tan x - 3 \tan^2 x + 3(1 + \tan^2 x)$ $\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x + 3 \tan^2 x - 3 \tan^2 x - 3 = 0$ $\tan^3 x - \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0 \quad \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ |                     |
| <p><b>Câu 2</b></p>                | <p>Cho dãy số thực <math>(u_n)</math> xác định bởi: <math>\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}</math></p> <p>a) Chứng minh dãy số đã cho là dãy số giảm.</p> <p>b) Tìm số hạng tổng quát của dãy số <math>(u_n)</math> và tìm <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{u_n}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p><b>4,0 đ</b></p> |
| <p><b>2a</b><br/><b>(2,0đ)</b></p> | <p>Chứng minh <math>u_{n+1} &lt; u_n \quad \forall n \geq 1</math> (1)</p> <p>Thật vậy, với <math>n = 1</math> ta có <math>u_2 = -7 &lt; -2 = u_1</math> (1) đúng</p> <p>Giả sử (1) đúng với <math>n = k \geq 1</math> tức là ta có <math>u_{k+1} &lt; u_k</math>. Ta chứng minh (1) đúng với <math>n = k + 1</math> tức là <math>u_{k+2} &lt; u_{k+1}</math></p> <p>Thật vậy, <math>u_{k+1} &lt; u_k \Leftrightarrow 3u_{k+1} &lt; 3u_k \Leftrightarrow 3u_{k+1} - 1 &lt; 3u_k - 1 \Leftrightarrow u_{k+2} &lt; u_{k+1}</math></p> <p>(1) đúng với <math>\forall n</math> Vậy dãy số <math>(u_n)</math> bị chặn dưới bởi 2</p>                                                                                                                   |                     |

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                       |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| <p><b>2b</b><br/><b>(2,0đ)</b></p> | <p>Đặt: <math>v_n = u_n - \frac{1}{2}</math> ta có: Ta có <math>(v_n)</math> xác định: <math>v_1 = -\frac{5}{2}</math>, <math>v_n = 3 \cdot v_{n-1}</math>.</p> <p>Suy ra <math>(v_n)</math> là cấp số nhân công bội <math>q=3</math>. Vậy: <math>v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}</math></p> <p>Từ đó suy ra: <math>u_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}</math></p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{6}{5}$                                                                                                                           |                       |
| <p><b>Câu 3</b></p>                | <p>a) Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra có chữ số 0 và 1 đứng cạnh nhau.</p> <p>b) Tìm ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau</p> $C_{23}^0, C_{23}^1, C_{23}^2, \dots, C_{23}^{23}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                       |
| <p><b>3a</b><br/><b>(1,5đ)</b></p> | <p>Gọi số tự nhiên theo yêu cầu bài toán có dạng <math>\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}</math> (<math>a_1 \neq 0</math>)</p> <p>Ta có: <math>n(\Omega) = 6 \cdot 6! = 4320</math> số</p> <p>Gọi <math>A</math> là biến cố cần tìm xác suất, ta có chữ số 0 và 1 đứng cạnh nhau sẽ có hai trường hợp</p> <p>TH1 : Ta xem số 10 có vai trò như một chữ số. Như vậy số cách lập số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau mà số 1 và 0 đứng cạnh nhau là <math>6! = 720</math> số.</p> <p>TH2 : Ta xem số 01 có vai trò như một chữ số, thế thì chữ số này không được đứng đầu nên số cách lập số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau mà số 0 và 1 đứng cạnh nhau là <math>5 \cdot 5! = 600</math> số.</p> <p>Vậy: <math>n(A) = 720 + 600 = 1320</math>.</p> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |              |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|                                | Kết luận: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1320}{4320} = \frac{11}{36} \approx 0,306$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5          |
| <b>3b</b><br><br><b>(1,5đ)</b> | <p>Xét ba số liên tiếp trong dãy số trên có dạng <math>C_{23}^k, C_{23}^{k+1}, C_{23}^{k+2}</math> (<math>k = 0; \overline{1; 21}</math>) ba số này theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi</p> $2C_{23}^{k+1} = C_{23}^k + C_{23}^{k+2} \Leftrightarrow 4C_{23}^{k+1} = C_{23}^k + C_{23}^{k+1} + C_{23}^{k+1} + C_{23}^{k+2} = C_{25}^k$ $\Leftrightarrow \frac{4 \cdot 23!}{(22-k)!(k+1)!} = \frac{25!}{(23-k)!(k+2)!} \Leftrightarrow (23-k)(k+2) = 150$ $\Leftrightarrow n^2 - 21n + 104 = 0 \Leftrightarrow n = 8; n = 13$ <p>Vậy có hai cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán là : <math>C_{23}^8, C_{23}^9, C_{23}^{10}</math> và <math>C_{23}^{13}, C_{23}^{14}, C_{23}^{15}</math></p> | 0,5          |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.5          |
|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.5          |
| <b>Câu 4</b>                   | Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{1 - \cos x}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>2,0 đ</b> |
| <b>2,0đ</b>                    | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{x^2}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5          |
|                                | <p>Ta có <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>0.5</b>   |



|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                               | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1) + (\sqrt{2x^2 + 1} - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}{x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{(\sqrt[3]{3x^2 - 1})^2 - \sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x^2 + 1} + 1} = 2$                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
|                               | <p>Vậy <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5  |
| <b>Câu 5</b><br><b>(3,0đ)</b> |  <p>Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại B'.</p> <p>Gọi H là trực tâm của tam giác BEK. Do EH vuông góc với BK và KH vuông góc với BE</p> <p>Suy ra: <math>\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{KH}</math> và <math>\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{KD}</math> do đó ta có Phép tịnh tiến theo vector <math>\overrightarrow{KD}</math> biến K thành D, H thành E và B thành B' nên <math>\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{B'E}</math>.</p> | 0,50 |
|                               | <p>Vì <math>BH \perp KE</math> nên <math>B'E \perp KE</math> hay tam giác B'EK vuông tại E</p> <p><math>\Rightarrow B'E^2 = B'K^2 - KE^2 = BD^2 - KE^2 = b^2 - a^2</math> (vì BB'DK là hình chữ nhật nên B'K = BD = b).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1.5  |
|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.0  |

|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                               | Vậy $BH = B'E = \sqrt{b^2 - a^2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|                               |                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5 |
| <b>Câu 6</b><br><b>(3,0đ)</b> | <p>a) Ta có</p> $\left. \begin{array}{l} BK \perp AC \text{ (gt)} \\ BK \perp MA \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow BK \perp (AMC) \Rightarrow BK \perp CM$ <p>mà <math>BH \perp CM \Rightarrow CM \perp (BKH) \Rightarrow BN \Rightarrow BN \perp CM</math></p>                                                                         |     |
|                               | <p>Ta có</p> $BK \perp (AMC) \Rightarrow CN \Rightarrow BK \perp CN \text{ (1).}$ <p>Mặt khác, xét tam giác MNC có <math>MN \perp AC, NH \perp MC</math> (do <math>MC \perp (BKH)</math>) suy ra K là trực tâm của tam giác MNC <math>\Rightarrow MK \perp CN</math> (2). Từ (1) và (2) suy ra</p> $CN \perp (MBK) \Rightarrow CN \perp MB$         | 1.5 |
|                               | <p>b) Vì K là trực tâm của tam giác MNC nên <math>AM \cdot AN = AK \cdot AC</math>. Do <math>\triangle AMK</math> đồng dạng với <math>\triangle ACN</math>. Như vậy khi M di chuyển trên (d) thì tích <math>AM \cdot AN</math> không đổi.</p> <p>Vậy <math>MN = AM + AN</math> bé nhất khi và chỉ khi <math>AM = AN = \sqrt{AK \cdot AC}</math></p> | 1.0 |

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |

SỞ GIÁO DỤC QUẢNG NAM  
TRƯỜNG THPT LƯƠNG THẾ VINH

KỲ THI OLYMPIC 24-3-2018

Môn thi: TOÁN 11

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

**Câu 1.**(3 điểm)Giải phương trình  $\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos x - 3}{2 \sin x + \sqrt{3}} = \sin x - \sqrt{3}$

**Câu 2.** (4,0 điểm) Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi:  $u_1 = 2018, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$

a) Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  tăng và  $\lim u_n = +\infty$ .

b) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $v_n = 2018 \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$ . Tính  $\lim v_n$ .

**Câu 3.** (4,0 điểm)

1) Cho khai triển nhị thức:  $\left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$ .

.Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ .

2) Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ , mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh  $A$  và  $B$  nhận được phần thưởng giống nhau.

**Câu 4.**(2,0 điểm).

Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm  $x = 0$ :  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{1+2x} - 2}{x}, & \text{khi } x > 0 \\ m+1, & \text{khi } x \leq 0. \end{cases}$

**Câu 5.**(3,0 điểm) Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  tiếp xúc trong tại  $A$  ( $R > R'$ ). Đường kính qua  $A$  cắt đường tròn  $(O, R)$  tại  $B$  và cắt đường tròn  $(O', R')$  tại  $C$ . Một đường thẳng đi động qua  $A$  cắt  $(O, R)$  tại  $M$  và cắt  $(O', R')$  tại  $N$ . Tìm tập hợp giao điểm  $I$  của đường thẳng  $BN$  và  $CM$ .

**Câu 6.(4,0 điểm)**

Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh  $a$ .

- a) Chứng minh rằng  $AC'$  vuông góc với mặt phẳng  $(A'BD)$  và đường thẳng  $AC'$  đi qua trọng tâm của tam giác  $A'BD$ .
- b) Hãy xác định các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên các cạnh  $A'D, CD'$  sao cho  $MN$  vuông góc với mặt phẳng  $(CB'D')$ . Tính độ dài đoạn  $MN$  theo  $a$ .

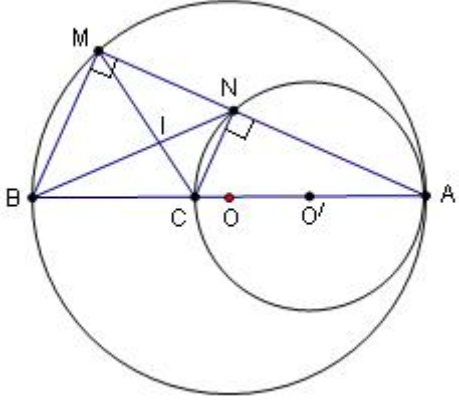
**HƯỚNG DẪN CHẤM**

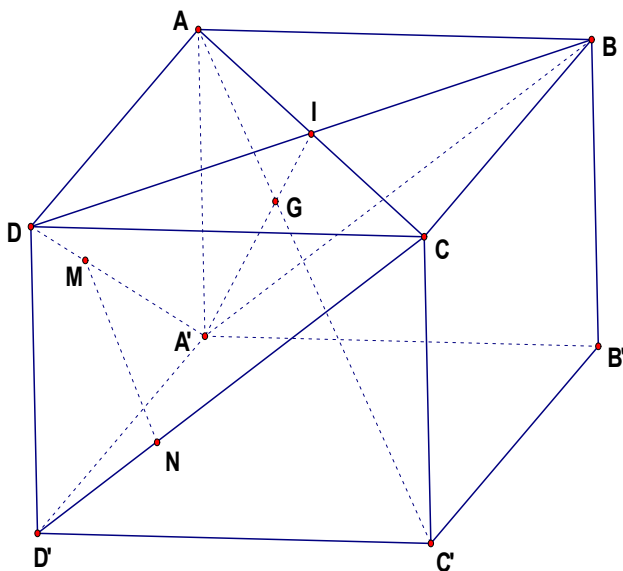
| Câu                        | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm       |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 1</b><br><b>3,0</b> | <b>Câu 1.(3 điểm)</b> Giải phương trình $\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos x - 3}{2 \sin x + \sqrt{3}} = \sin x - \sqrt{3}$                                                                                                                                                             | <b>3,0</b> |
|                            | ĐK: $\sin x \neq \frac{-\sqrt{3}}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5        |
|                            | Biến đổi phương trình thành $\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos x - 3 = (\sin x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3})$                                                                                                                                                                              | 0,5        |
|                            | $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x = 0$                                                                                                                                                                                                      | 0,5        |
|                            | $\Leftrightarrow (2 \sin x - \sqrt{3})(\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0$                                                                                                                                                                                                                 | 0,5        |
|                            | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})</math></li> <li><math>\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi</math></li> </ul> | 0,5        |
|                            | Kết hợp ĐK phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$                                                                                                                                                             | 0,5        |
| <b>Câu 2</b><br><b>4,0</b> | a) Chứng minh rằng dãy $(u_n)$ tăng và $\lim u_n = +\infty$ .                                                                                                                                                                                                                         | <b>2,0</b> |
|                            | Ta có $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1$                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5        |
|                            | $= (u_n - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n, \forall n \geq 1$ . Do đó $(u_n)$ tăng.                                                                                                                                                                                           | 0,5        |
|                            | Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n > n + 1$ , mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1).                                                                                                                                                                                                              |            |
|                            | Với $n = 1$ ta có $u_1 = 2018 > 1 + 1$                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25       |
|                            | Giả sử (1) đúng với $n = k \quad (k > 1)$ ta có $u_k > k + 1$                                                                                                                                                                                                                         | 0,25       |
|                            | Ta đi chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ :                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25       |
|                            | $u_{k+1} = u_k(u_k - 1) + 1 > k(k + 1) + 1 = k^2 + k + 1 > k + 2$                                                                                                                                                                                                                     | 0,25       |

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                            | Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ . Từ $(u_n)$ tăng và $u_n > n+1, \forall n \geq 1$ suy ra $\lim u_n = +\infty$ .                                                                                                                                                                                                                           |     |
|                            | b) Với mỗi số nguyên dương $n$ , đặt $v_n = 2018 \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$ . Tính $\lim v_n$ .                                                                                                                                                                                                           | 2,0 |
|                            | Ta có $u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1)$ . Suy ra $\frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n}$ .                                                                                                                                                                                                                   | 0,5 |
|                            | Từ đó $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5 |
| <b>Câu 3</b><br><b>4,0</b> | Do đó                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|                            | $v_n = 2018 \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = 2018 \left( \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2018 \left( \frac{1}{2017} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$                                                                                                                                       | 0,5 |
|                            | Từ $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$ . Vậy $\lim v_n = \frac{2018}{2017}$ .                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5 |
|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|                            | a) Cho khai triển nhị thức:<br>$\left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \right)^{10} = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$ .                                                                                                                                                                                                                       | 2,0 |
|                            | .Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|                            | Ta có: $\left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x \right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \sum_{k=0}^n C_{10}^k (2x)^k \Rightarrow a_k = \frac{1}{3^{10}} C_{10}^k 2^k$                                                                                                                                                                | 0,5 |
|                            | Ta có $a_k$ đạt được max                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|                            | $\Rightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \\ C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \end{cases}$                                                                                                                                              | 0,5 |
|                            | $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k+1} 10!}{(k+1)!(9-k)!} \\ \frac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \geq \frac{2^{k-1} 10!}{(k-1)!(11-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10-k} \geq \frac{2}{k+1} \\ \frac{2}{k} \geq \frac{2}{11-k} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \leq k \leq \frac{22}{3}$ | 0,5 |
|                            | $\Rightarrow k = 7 (k \in \mathbb{N}, k \in [0, 10])$                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,5 |
|                            | Vậy $\max a_k = a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|                            | b) Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ , mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể                                                                                                       | 2,0 |

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|                            | <p>loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh <math>A</math> và <math>B</math> nhận được phần thưởng giống nhau.</p> <p>Gọi <math>x, y, z (x, y, z \in \mathbb{N})</math> lần lượt là số học sinh được nhận các bộ giải thưởng (Toán-Lý); (Toán-Hóa) và (Lý-Hóa). Ta có hệ:</p> $\begin{aligned} x + y &= 7 & x &= 4 \\ x + z &= 6 & \Leftrightarrow y &= 3. \\ y + z &= 5 & z &= 2 \end{aligned}$ <p>Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh là: <math>C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 1260</math>.</p> <p>Gọi <math>T</math> là biến cố “hai học sinh <math>A</math> và <math>B</math> có phần thưởng giống nhau”.</p> <p>+) Nếu <math>A</math> và <math>B</math> có phần thưởng là sách (Toán- Lý), có: <math>C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 210</math> cách phát.</p> <p>+) Nếu <math>A</math> và <math>B</math> có phần thưởng là sách (Toán- Hóa) có: <math>C_7^1 \cdot C_6^4 \cdot C_2^2 = 105</math> cách phát.</p> <p>+) Nếu <math>A</math> và <math>B</math> có phần thưởng là sách (Lý- Hóa) có: <math>C_7^4 \cdot C_3^3 = 35</math> cách phát.</p> <p>Vậy xác suất cần tìm là <math>P(T) = \frac{210 + 105 + 35}{1260} = \frac{5}{18}</math>.</p> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>                                        |
| <b>Câu 4</b><br><b>2,0</b> | <p>.Tìm <math>m</math> để hàm số sau liên tục tại điểm <math>x = 0</math>:</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{1+2x} - 2}{x}, & \text{khi } x > 0 \\ m+1, & \text{khi } x \leq 0. \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2,0                                                                                |
|                            | <p>Ta có: <math>f(0) = m + 1</math></p> $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+x} (\sqrt[3]{1+2x} - 1) + \sqrt{4+x} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{4+x}}{\sqrt[3]{(1+2x)^2} + \sqrt[3]{1+2x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} \\ &= \frac{19}{12} \end{aligned}$ <p><math>\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = m + 1</math></p> <p>Hàm số <math>f(x)</math> liên tục tại <math>x = 0</math> khi và chỉ khi:</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ $\Leftrightarrow m + 1 = \frac{19}{12} \Leftrightarrow m = \frac{7}{12}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

|              |                                                                                          |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Câu 5</b> | Cho hai đường tròn $(O,R)$ và $(O',R')$ tiếp xúc trong tại A ( $R > R'$ ).đường kính qua |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------|

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                   |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <b>3,0</b>                 | <p>A cắt đường tròn <math>(O,R)</math> tại B và cắt đường tròn <math>(O',R')</math> tại C. Một đường thẳng đi động qua A cắt <math>(O,R)</math> tại M và cắt <math>(O',R')</math> tại N. Tìm tập hợp giao điểm I của đường thẳng BN và CM.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                   |
|                            | <div data-bbox="560 378 1015 777" data-label="Image">  </div> <p>Ta có : <math>BM \parallel CN</math> . Hai <math>\triangle BMI \sim \triangle CNI</math> . Do đó : <math>\frac{IC}{IM} = \frac{CN}{BM}</math></p> <p>Hai <math>\triangle ACN \sim \triangle ABM</math> . Do đó : <math>\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BM}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{IC}{IM} = \frac{AC}{AB} = \frac{2R'}{2R} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{IC}{IM+IC} = \frac{R'}{R+R'}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{CI}{CM} = \frac{R'}{R+R'} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{R'}{R+R'} \overrightarrow{CM} \Rightarrow M : \overrightarrow{CI} \xrightarrow{V(C;k=\frac{R'}{R+R'})} I</math></p> <p>Va : Tập hợp các I là trục (ω) vị tự của hai đường tròn <math>(O,R)</math> trong phép vị tự <math>V(C;k=\frac{R'}{R+R'})</math> .</p> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> |
| <b>Câu 6</b><br><b>4,0</b> | <p>a. Chứng minh rằng <math>AC'</math> vuông góc với mặt phẳng <math>(A'BD)</math> và đường thẳng <math>AC'</math> đi qua trọng tâm của tam giác <math>A'BD</math> .</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>1,5</b>                                                        |



Ta có  $BD \perp AC$  và  $BD \perp AA'$  nên  $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow AC' \perp BD$ .

Tương tự ta chứng minh được  $AC' \perp A'D$ . Từ đó ta suy ra  $AC' \perp (A'BD)$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Khi đó  $G = AC' \cap A'I$  chính là giao điểm của  $AC'$  và mặt phẳng  $(A'BD)$ .

Do  $AC \parallel A'C' \Rightarrow \frac{GI}{GA'} = \frac{AI}{A'C'} = 2$  suy ra  $G$  là trọng tâm của tam giác  $A'BD$ .

b. Hãy xác định các điểm  $M, N$  lần lượt nằm trên các cạnh  $A'D, CD'$  sao cho  $MN$  vuông góc với mặt phẳng  $(CB'D')$ . Tính độ dài đoạn  $MN$  theo  $a$ .

Đặt  $\overrightarrow{A'A} = \vec{m}, \overrightarrow{A'D'} = \vec{n}, \overrightarrow{A'B'} = \vec{p} \Rightarrow |\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = a; \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{m} = 0$

và  $\overrightarrow{A'M} = x \cdot \overrightarrow{A'D}; \overrightarrow{D'N} = y \cdot \overrightarrow{D'C'}$

Ta có  $\overrightarrow{A'M} = x \cdot \vec{m} + x \cdot \vec{n}; \overrightarrow{D'N} = y \cdot \vec{m} + y \cdot \vec{p} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'N}$   
 $= (y - x) \vec{m} + (1 - x) \vec{n} + y \vec{p}$

Do đường thẳng  $MN$  vuông góc với mặt phẳng  $(CB'D')$  nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{D'C} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ((y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}) \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0 \\ ((y-x)\vec{m} + (1-x)\vec{n} + y\vec{p}) \cdot (\vec{m} + \vec{p}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y - 2x = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy  $M, N$  là các điểm sao cho  $\overrightarrow{A'M} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'D}; \overrightarrow{D'N} = \frac{1}{3} \overrightarrow{D'C'}$

0,25  
0,5  
0,25

0,5

2,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5



|  |                                                                                                                                                                                                          |  |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | Do đó ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{m} + \frac{1}{3}\overrightarrow{n} + \frac{1}{3}\overrightarrow{p} \Rightarrow MN^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ |  |
|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****TỈNH QUẢNG NAM**

-----

**KỲ THI OLYMPIC 24/3****MÔN TOÁN - LỚP 11****Năm học 2016 -2017**

-----

*Thời gian làm bài: 180 phút (không tính thời gian giao đề)**(Đề thi có 02 trang)***TRƯỜNG THPT NÚI THÀNH****(ĐỀ THAM KHẢO)**

Câu 1: (3 điểm)

1) Giải phương trình:  $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x(2 \cos x - \sin x)$

2) Giải phương trình:  $2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$

Câu 2: (4 điểm)

1) Cho dãy số  $(x_n)$  xác định như sau : 
$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(n+1)x_n + 1} \end{cases} \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 x_n)$ .

2) Cho dãy số  $(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) được xác định như sau:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

Đặt  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Tìm  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

Câu 3: (4 điểm)

1) Tìm hệ số của  $x^{12}$  trong khai triển nhị thức Niu-Ton của:

$$\left( \frac{nx^2}{9} + \frac{2}{x} \right)^n, \text{ biết } \frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$$

2) Trong một hộp bi có 3 viên bi đỏ, 4 viên bi vàng, 5 viên bi xanh ; lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong hộp. Tính xác suất để trong 4 viên bi được lấy số bi đỏ lớn hơn số bi xanh.

Câu 4: (2 điểm)

1) Tính giới hạn  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 2015x + 2014}{(x-1)^2}$

2) Chứng minh rằng phương trình  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  có ba nghiệm thực phân biệt. Hãy tìm 3 nghiệm đó.

Câu 5: (3 điểm)

1) Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $I$  cố định khác  $O$ . Một điểm  $M$  thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác góc  $MOI$  cắt  $IM$  tại  $N$ . Tìm quỹ tích điểm  $N$ .

2) Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các hình vuông BCMN và ACPQ có tâm là O và O'.

a/ Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

b/ Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng IOO' là tam giác vuông cân.

Câu 6 (4,0 điểm).

1) Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh đáy AB bằng  $2a$  và góc  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(C'AB)$  tạo với đáy (ABC) một góc  $60^\circ$ . Tính độ dài cạnh bên của lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AC'$  và  $CB'$ .

2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân với  $AD \parallel BC$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ; tam giác SAD vuông cân tại S và  $SB = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng BM và CD

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI OLYMPIC 24/3

TỈNH QUẢNG NAM

MÔN TOÁN - LỚP 11

Năm học 2016 -2017

Thời gian làm bài: 180 phút (không tính thời gian giao đề)

**TRƯỜNG THPT NÚI THÀNH**

**HƯỚNG DẪN CHẤM**

| CÂU               | NỘI DUNG                                                                                                                                                             | ĐIỂM |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                   | 1. Giải phương trình lượng giác : $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x(2 \cos x - \sin x)$                                                                                 | 1đ   |
| C©u<br>1<br>(3 đ) | Biến đổi đưa về tích $(\sin x + \cos x)(2 \sin x - \cos x) \cos x = 0$                                                                                               |      |
|                   | * $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$                                                                                            | 0,25 |
|                   | * $\sin x + \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$                                 | 0,25 |
|                   | * $2 \sin x - \cos x \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \tan \alpha = \frac{1}{2}$                            | 0,25 |
|                   | ĐS : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ; $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \tan \alpha = \frac{1}{2}$ | 0,25 |
|                   | 2. $2 \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$                                                                                                               | 2,0  |
| C©u<br>1          | Phương trình $\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$ .                                                                    | 0,5  |
|                   | $\Leftrightarrow (2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3) + (4 \sin x \cos x - 2 \cos x) = 0$<br>$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x - 3) + 2 \cos x (2 \sin x - 1) = 0$       | 0,5  |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | $\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 2 \cos x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \sin x + 2 \cos x - 3 = 0 \end{cases}$                                                                                                                                                                                      | 0,5 |
|  | <p>Với <math>2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}</math></p> <p>Với <math>\sin x + 2 \cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x = 3</math></p> <p>Vì <math>1^2 + 2^2 &lt; 3^2 \Rightarrow</math> pt vô nghiệm</p> | 0,5 |

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <p>Câu 2.<br/>(4đ)</p> | <p>1) Cho dãy số <math>(x_n)</math> xác định như sau : <math>\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2(n+1)x_n + 1} \end{cases}</math> với mọi <math>n \in \mathbb{N}</math>.</p> <p>Tìm <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 x_n)</math>.</p> | 2đ  |
|                        | <p>Ta có</p> $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(n+1)x_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2(n+1)x_n + 1}{x_n} = 2(n+1) + \frac{1}{x_n}$                                                                                                                         | 0.5 |
|                        | $\Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 2(n+1) \rightarrow \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} = 2n$ $\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}} = 2(n-1)$ <p>.....</p> $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} = 2$                                                 | 1.0 |
|                        | <p>Cộng vế với vế suy ra: <math>\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_0} = 2(1+2+3+\dots+n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)</math></p>                                                                                                                                   |     |
|                        | $\Rightarrow \frac{1}{x_n} = n(n+1) + 2 \Rightarrow n^2 x_n = \frac{n^2}{n^2 + n + 2}$ <p>Vậy <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n + 2} = 1</math></p>                                                  | 0.5 |
|                        | <p>2) Cho dãy số <math>(x_n)</math> (<math>n = 1, 2, \dots</math>) được xác định như sau:</p> <p><math>x_1 = 1</math> và <math>x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1}</math> với <math>n = 1, 2, \dots</math></p>                                    | 2đ  |

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                   | Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$ ( $n = 1, 2, \dots$ ). Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|                   | <p>Ta có <math>x_2 = 5</math> và <math>x_n &gt; 0</math> với mọi <math>n = 1, 2, \dots</math></p> $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5 |
|                   | <p>Từ đó suy ra</p> $x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 = (x_n + 1)(x_n + 2)$ $\frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|                   | <p>Do đó <math>y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}</math></p> <p>Từ (1) <math>x_{k+1} = x_k^2 + 3x_k + 1 &gt; 3x_k \geq 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k</math></p> <p>Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp <math>x_n &gt; 3^{n-1}</math> (2)</p> <p>Nên <math>\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2}</math> (vì do (2) <math>x_{n+1} &gt; 3^n</math>)</p> | 1   |
| <b>Câu 3 (4đ)</b> | 1) Tìm hệ số của $x^{12}$ trong khai triển nhị thức Niu-Tơn của:<br>$\left( \frac{nx^2}{9} + \frac{2}{x} \right)^n$ , biết $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2,0 |
|                   | <p>Đk <math>\begin{cases} n \geq 3 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}</math>, ta có:</p> $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{4}{n(n-1)} + \frac{28}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2 - 7n - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ n = -2 \end{cases}, \text{ kết}$ <p>hợp với đk ta được: <math>n = 9</math></p>                                                                                                                                        | 1,0 |
|                   | Ta có khai triển: $\left( \frac{nx^2}{9} + \frac{2}{x} \right)^n = \left( x^2 + \frac{2}{x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot (x^2)^{9-k} \cdot \left( \frac{2}{x} \right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \cdot 2^k \cdot x^{18-3k}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |
|                   | ứng với $x^{12}$ , ta có $18 - 3k = 12 \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow$ hệ số của $x^{12}$ là: $C_9^2 \cdot 2^2 = 144$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,5 |
|                   | 2) Trong một hộp bi có 3 viên bi đỏ, 4 viên bi vàng, 5 viên bi xanh; lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong hộp. Tính xác suất để trong 4 viên bi được lấy số bi đỏ lớn hơn số bi xanh.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2,0 |
|                   | Tổng số viên bi trong hộp là: $3 + 4 + 5 = 12$ viên bi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi trong hộp ta có số cách lấy là: $C_{12}^4 = 495$ cách lấy                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
| Ta tìm số cách lấy 4 viên bi mà số bi đỏ lớn hơn số bi xanh, xảy ra các trường hợp sau:<br>TH1. Chọn 1 bi đỏ, 3 bi vàng $\Rightarrow$ có $C_3^1 \cdot C_4^3 = 12$ cách chọn<br>TH2. Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng $\Rightarrow$ có $C_3^2 \cdot C_4^2 = 18$ cách chọn<br>TH3. Chọn 2 bi đỏ, 1 bi xanh, 1 bi vàng $\Rightarrow$ có $C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = 60$ cách chọn | 0,5 |
| TH4. Chọn 3 bi đỏ, 1 bi vàng $\Rightarrow$ có $C_3^3 \cdot C_4^1 = 4$ cách chọn<br>TH5. Chọn 3 bi đỏ, 1 bi xanh $\Rightarrow$ có $C_3^3 \cdot C_5^1 = 5$ cách chọn                                                                                                                                                                                                         | 0,5 |
| Vậy xác suất để trong 4 viên bi được lấy số bi đỏ lớn hơn số bi xanh là:<br>$P = (C_3^1 \cdot C_4^3 + C_3^2 \cdot C_4^2 + C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 + C_3^3 \cdot C_4^1 + C_3^3 \cdot C_5^1) : C_{12}^4 = (12 + 18 + 60 + 4 + 5) : 495 = \frac{1}{5}$                                                                                                                  | 0,5 |

|                      |                                                                                                                                                                                                            |      |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Câu 4</b><br>(2d) | 1) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 2015x + 2014}{(x-1)^2}$                                                                                                                      | 1đ   |
|                      | $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 2015x + 2014}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1 - 2015(x-1)}{(x-1)^2}$                                                                     | 0,25 |
|                      | $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2014} + x^{2013} + \dots x + 1 - 2015}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2014} - 1) + (x^{2013} - 1) + \dots (x-1)}{x-1}$                                         | 0,5  |
|                      | $= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{2013} + x^{2012} + \dots + x + 1) + \lim_{x \rightarrow 1} (x^{2012} + x^{2011} + \dots + x + 1) + \dots + \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) + 1$                               | 0,25 |
|                      | $= 2014 + 2013 + \dots + 2 + 1 = \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2.029.105$                                                                                                                                    | 0,25 |
|                      | 2) Chứng minh rằng phương trình $8x^3 - 6x - 1 = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Hãy tìm 3 nghiệm đó.                                                                                                      | 1đ   |
|                      | Đặt $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ ; tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ . Ta có $f(-1) = -3, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, f(0) = -1, f(1) = 1$ suy ra                       | 0,25 |
|                      | $f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right)f(0) < 0, f(0)f(1) < 0$ . Từ 3 bất đẳng thức này và tính liên tục của hàm số suy ra pt $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$ . | 0,25 |
|                      | Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$ thay vào pt ta được:                                                                                                                                                      | 0,5  |
|                      | $2(4\cos^3 t - 3\cos t) = 1 \Leftrightarrow \cos 3t = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ , kết hợp với $t \in [0; \pi]$ ta                                        | 0,5  |

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                   | <p>được <math>t \in \left\{ \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9} \right\}</math>. Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm:</p> $x = \cos \frac{\pi}{9}, x = \cos \frac{5\pi}{9}, x = \cos \frac{7\pi}{9}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|                   | <p>Cho đường tròn (O;R) và một điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1,5 |
|                   | <p>- Vẽ hình. Từ hình vẽ và tính chất của đường phân giác trong chia cạnh đối diện làm hai đoạn thẳng tỷ lệ với hai cạnh kề của hai cạnh đó. Ta có kết quả sau:</p> <p>* Do O, I cố định cho nên <math>OI = a</math> không đổi. Gọi N là chân đường phân giác của góc MOI (N thuộc IM), từ đó ta có:</p> $\frac{NI}{NM} = \frac{OI}{OM} = \frac{a}{R} \Leftrightarrow \frac{NI}{NM + NI} = \frac{a}{a + R} \Leftrightarrow IN = \frac{a}{a + R} IM$ <p>Hay: <math>\Leftrightarrow IN = \frac{a}{a + R} IM \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{a}{a + R} \overrightarrow{IM}</math>.</p> <p>Vì I cố định cho nên <math>V_{(I,k)}: M \rightarrow N</math>. Nhưng M chạy trên đường tròn (O;R) cho nên N chạy trên đường tròn (C') là ảnh của (O;R) qua phép vị tự tâm I tỉ số vị tự là k.</p> | 1,0 |
|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |
| <b>Câu 5 (3đ)</b> | <p>2) Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các hình vuông BCMN và ACPQ có tâm là O và O'.</p> <p>a/ Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.</p> <p>b/ Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng IOO' là tam giác vuông cân.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1,5 |
|                   | <p>a/ Vẽ hình theo giả thiết đã cho</p> <p>-Giải bài toán: Cho hai điểm A, B cố định, với mỗi điểm M và với hai phép quay tâm A, tâm B có cùng góc quay thì phép hợp của hai phép quay là một phép đối xứng mà tâm đối xứng là đỉnh góc vuông của tam giác vuông cân OAB (O là tâm đối xứng).</p> <p>- Như vậy: <math>Q_A: C \rightarrow N</math> <math>Q_B: C \rightarrow Q \Rightarrow NQ</math> đi qua tâm đối xứng H được xác định bằng cách dựng tam giác vuông cân HAB</p> <p>b/ Tương tự như trên: <math>Q_O: C \rightarrow B</math> <math>Q_{O'}: C \rightarrow A \Rightarrow AB</math> đi qua tâm đối xứng I được xác định bằng tam giác vuông cân OO'I (với I là đỉnh của góc vuông). Như vậy tam giác O'OI là tam giác vuông cân.</p>                                                | 1,0 |
|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5 |



Trang chủ: <https://vndoc.com/> | Email hỗ trợ: hotro@vndoc.com | Hotline: 024 2242 6188

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | $a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng BM và CD                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|  | <b>Hình vẽ</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|  | <p>Do <math>BN \parallel CD \Rightarrow (BM; CD) = (BN; BM)</math></p> <p>Vì tam giác SAD vuông cân tại S có cạnh huyền <math>AD = 2a</math> nên <math>SA = SD = a\sqrt{2}</math></p> <p><math>\triangle SAB</math> có <math>SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = SB^2 \Rightarrow \triangle SAB</math> vuông tại A</p> <p><math>\Rightarrow BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}</math> và <math>BN = CD = a</math>; <math>MN = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}</math></p> | 1,0 |
|  | <p>Áp dụng định lí côsin trong tam giác BMN ta được :</p> $\cos \widehat{MBN} = \frac{BM^2 + BN^2 - MN^2}{2 \cdot BM \cdot BN} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \widehat{MBN} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}},$ <p>vậy <math>(BM; CD) = \widehat{MBN} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}</math></p>                                                                                                                                                                                                                         | 1,0 |

Hết.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM

TRƯỜNG THPT TRẦN CAO VÂN

KỲ THI OLYMPIC 24-3

LẦN THỨ HAI

Môn thi: TOÁN 11

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

**Câu 1 (5,0 điểm)**

a) Giải phương trình:  $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} - \frac{\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2} \frac{\tan^2 x + 2 \tan x - 1}{1 - \tan^2 x}$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$$

**Câu 2 (4,0 điểm).**

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n + 1)(u_n + 2)(u_n + 3) + 1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

Đặt  $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + 2}, (n = 1, 2, \dots)$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Câu 3 (3,0 điểm).**

a) Giải bất phương trình ( với hai ẩn là  $n, k \in \mathbb{N}$ )

$$\frac{P_{n+6}}{(n-k)!} \leq 84 A_{n+4}^{k+3}$$

b) Một hộp đựng chín viên bi được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải lấy ra ít nhất bao nhiêu viên bi để xác suất có ít nhất một viên bi ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn  $\frac{5}{6}$ .

**Câu 4 (2,0 điểm).**

Xét tính liên tục của hàm số sau : 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 4\sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 6}, & \text{khi } x < 2 \\ \frac{5x^2 + 6x}{15}, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

**Câu 5 (2,0 điểm).**

Cho đường tròn và dây cung AB cố định. Gọi M là điểm chính giữa cung lớn  $\widehat{AB}$  và I là điểm di động trên cung lớn  $\widehat{AB}$ . Trên tia BI lấy điểm K sao cho  $BK = AI$ .

Chứng minh:  $MI = MK$  và  $\widehat{IMK} = \widehat{AMB}$

**Câu 6 (4,0 điểm).**

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với  $AB = BC = a\sqrt{3}$ ,

$\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  và  $SB = 2a\sqrt{2}$ . Gọi I là trung điểm của AC, mặt phẳng  $(\alpha)$  qua một điểm N trên đoạn IB (N khác I và B) vuông góc với AB

- Xác định thiết diện của hình chóp với  $(\alpha)$
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

-----Hết-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM

KỲ THI OLYMPIC 24-3

TRƯỜNG THPT TRẦN CAO VÂN

LẦN THỨ HAI

MÔN THI: TOÁN

KHỐI: 11

HƯỚNG DẪN CHẤM

| Câu          |                                                                                                                                  | Điểm |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 1<br>5,0 | a) Giải phương trình: $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} - \frac{\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2} \frac{\tan^2 x + 2 \tan x - 1}{1 - \tan^2 x}$ | 2,0  |
|              | ĐK: $\cos x \cos 2x \neq 0, \tan x \neq \pm 1$                                                                                   | 0,25 |
|              | khi đó phương trình tương đương với                                                                                              | 0,25 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} - \frac{\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}(\tan 2x - 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
|  | $\Leftrightarrow \sin 3x - \cos x = \sqrt{2}(\sin 2x - \cos 2x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5  |
|  | $\Leftrightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |      |
|  | $\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|  | $\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ (vì } \cos 2x \neq 0 \text{ nên } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
|  | $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ (Thỏa ĐK)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
|  | <p>b) Giải hệ</p> $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y & (1) \\ x\sqrt{2xy + 5x + 3} = 4xy - 5x - 3 & (2) \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                        | 3,0  |
|  | <p>Từ (1) suy ra <math>x + y \geq 0</math>. Ta có</p> $\frac{x^2 + xy + y^2}{3} = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{12}(x - y)^2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq \frac{1}{2}(x + y) \quad (3)$ <p>và</p> $\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{1}{2}(x + y) \quad (4)$ | 0,5  |

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                      |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
|                                       | <p>Từ (3) Và (4) suy ra <math>\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq x+y</math></p> <p>Do đó pt (1) <math>\Leftrightarrow x=y \geq 0</math></p> <p>Thay <math>x=y</math> vào pt(2) ta được <math>x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3</math> (5)</p> <p>Đặt <math>t = \sqrt{2x^2+5x+3}, t \geq 0</math></p> <p>Phương trình (5) trở thành :</p> $xt = 6x^2 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + xt - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3x \\ t = 2x \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>t = -3x</math> loại vì <math>t \geq 0, x \geq 0</math> và khi <math>x=0</math> thì <math>t = \sqrt{3}</math></li> <li><math>t = 2x</math>, ta được <math>2x = \sqrt{2x^2+5x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x-3=0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3</math></li> </ul> <p>Vậy hệ đã cho có một nghiệm <math>(x;y) = (3; 3)</math></p> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> |
| <p><b>Câu 2</b></p> <p><b>4,0</b></p> | <p>Cho dãy số <math>(u_n)</math> xác định bởi:</p> $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n+1)(u_n+2)(u_n+3)+1}, (n=1,2,3,...) \end{cases}$ <p>Đặt <math>v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i+2}, (n=1,2,...)</math>. Tìm <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                      |

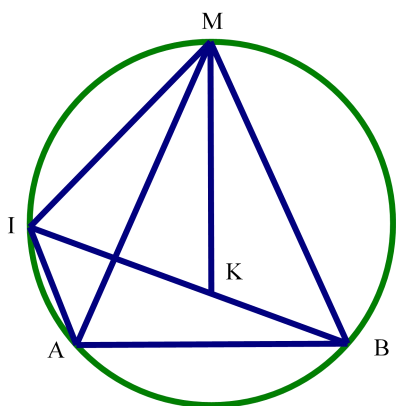
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                 |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>• Từ giả thiết suy ra <math>u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 11, u_n &gt; 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*</math><br/>Ta có</p> $u_{n+1} = \sqrt{u_n(u_n + 1)(u_n + 2)(u_n + 3) + 1} = \sqrt{(u_n^2 + 3u_n)^2 + 2(u_n^2 + 3u_n) + 1}$ $= u_n^2 + 3u_n + 1 \quad (1)$ $\Rightarrow u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 3u_n + 2 = (u_n + 1)(u_n + 2)$ $\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{(u_n + 1)(u_n + 2)} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 2}$ $\Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$ <p>Do đó</p> $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{u_i + 1} - \frac{1}{u_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{u_1 + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$ <p>• Chứng minh <math>u_n \geq 3^{n-1} \quad (2), n = 2, 3, \dots</math> bằng quy nạp</p> <p>Suy ra <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} + 1} = 0</math></p> <p>Vậy <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}</math></p> | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                      |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <p>Câu 3</p> <p>3,0</p> | <p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{P_{n+6}}{(n-k)!} \leq 84 A_{n+4}^{k+3} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq n \\ (n+5)(n+6)(n-k+1) \leq 84 \end{cases}</math></li> <li>• Xét <math>n \geq 4</math> : chứng minh bất phương trình vô nghiệm</li> <li>• Xét <math>n \in \{0; 1; 2; 3\}</math> tìm được các nghiệm <math>(n; k)</math> của bất phương trình là: <math>(0; 0), (1; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3)</math></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>1,0</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>                        |
|                         | <p>b)</p> <p>Giả sử ta lấy <math>x</math> viên bi (<math>1 \leq x \leq 9, x \in N</math>)</p> <p>Ta có số phần tử của không gian mẫu là: <math>n(\Omega) = C_9^x</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gọi <math>A</math> là biến cố : “ trong số <math>x</math> viên bi lấy ra, có ít nhất một viên bi ghi số chia hết cho 4”</li> <li>thì biến cố <math>\bar{A}</math>: “ Trong số <math>x</math> viên bi lấy ra , không có viên bi nào ghi số chia hết cho 4”</li> </ul> <p>suy ra <math>n(\bar{A}) = C_7^x</math></p> <p>Ta có <math>P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{C_7^x}{C_9^x} = \frac{(9-x)(8-x)}{72}</math></p> <p>Do đó <math>P(A) = 1 - P(\bar{A}) &gt; \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\bar{A}) = \frac{(9-x)(8-x)}{72} &lt; \frac{1}{6}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 &lt; 0 \Leftrightarrow 5 &lt; x &lt; 12</math></p> <p>Suy ra <math>6 \leq x \leq 9</math> ( vì <math>1 \leq x \leq 9, x \in N</math> )</p> <p>Giá trị nhỏ nhất của <math>x</math> là 6.</p> <p>Vậy số viên bi phải lấy ra ít nhất mà ta cần tìm là 6.</p> | <p>2,0</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> |



|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25                                |
| <b>Câu 4</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |
| <b>2,0</b>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tìm tập xác định <math>D = \left[ \frac{1}{5}; +\infty \right)</math></li> <li>• <math>\forall x \in \left[ \frac{1}{5}; 2 \right), f(x) = \frac{x^3 + 2x - 4\sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 6}</math></li> </ul> <p>Xét <math>\forall x_0 \in \left( \frac{1}{5}; 2 \right)</math>, ta có <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 2x - 4\sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 6}</math></p> $= \frac{x_0^3 + 2x_0 - 4\sqrt{5x_0-1}}{x_0^2 + x_0 - 6} = f(x_0)$ <p>Và <math>\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{1}{5}\right)</math></p> <p>Suy ra <math>f(x)</math> liên tục trên <math>\left[ \frac{1}{5}; 2 \right)</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Chứng minh <math>f(x)</math> liên tục trên <math>(2; +\infty)</math></li> <li>• Tại <math>x = 2</math>, ta có <math>f(2) = \frac{32}{15}</math></li> </ul> $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 2x - 4\sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 6}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 2x - 12}{x^2 + x - 6} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{12 - 4\sqrt{5x-1}}{x^2 + x - 6}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 6)}{(x-2)(x+3)} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{80(2-x)}{(x-2)(x+3)(12 + 4\sqrt{5x-1})}$ | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                    |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|                                       | $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x + 6}{x + 3} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-80}{(x + 3)(12 + 4\sqrt{5x - 1})}$ $= \frac{14}{5} - \frac{80}{120} = \frac{32}{15}$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x^2 + 6x}{15} = \frac{5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2}{15} = \frac{32}{15}$ <p>suy ra <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{32}{15} = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)</math></p> <p>Do đó <math>f(x)</math> liên tục tại <math>x = 2</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kết luận: Hàm số đã cho liên tục trên <math>\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)</math></li> </ul>  | <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <p><b>Câu 5</b></p> <p><b>2,0</b></p> | <p>Chứng minh: <math>MI = MK</math> và <math>\widehat{IMK} = \widehat{AMB}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                    |



- Đặt  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \varphi$ , ta có  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \varphi$

Chứng minh  $Q_{(M, \varphi)} : A \mapsto B$

- Giả sử  $Q_{(M, \varphi)} : I \mapsto I'$

$$\Rightarrow AI = BI', (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI'}) = \varphi$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BK} \text{ và } \overrightarrow{BI'} \text{ cùng hướng, và do } BI' = AI = BK \text{ suy ra } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BI'}$$

$$\Rightarrow I' = K. \text{ Tức là: } Q_{(M, \varphi)} : I \mapsto K$$

Vậy  $MI = MK$  và  $\widehat{IMK} = \widehat{AMB} = \varphi$

0,5

0,5

0,5

0,5

Câu 6

4,0

a)

- Ta có  $SA \perp AB, BC \perp AB, (\alpha) \perp AB, SA, AB \not\subset (\alpha)$

0,5

0,25

- 0,25

0,25



2,5

0,25

- 0,25

- 0,5

- 0,5

- 0,5

SỞ GD&amp;ĐT QUẢNG NAM

KỲ THI OLYMPIC 24-3 LẦN THỨ 2

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN KHỐI 11

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

**Câu 1 (3 điểm).**

Giải phương trình:  $\frac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Câu 2 (5 điểm).**

1. Gọi  $A$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $A$ , tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1.

2. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\left(C_{2018}^0\right)^2 - \left(C_{2018}^1\right)^2 + \left(C_{2018}^2\right)^2 - \left(C_{2018}^3\right)^2 + \dots - \left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \left(C_{2018}^{2018}\right)^2 = C_{2018}^{1009}.$$

**Câu 3 (5 điểm).**

1. Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 4; \\ (n+2)^2 \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}\right) = n^2 \left(u_n - \frac{1}{4}\right) - (n+1) \end{cases}, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy.

2. Cho  $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{19}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9n-8} + \sqrt{9n+1}} \right)$ . Tính  $\lim S_n$

**Câu 4 (7 điểm).**

1. Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $P$  nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua  $P$ , cắt  $(O)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  sao cho:  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ .

2. Cho hình chóp  $SABCD$ . Biết  $SA \perp (ABCD)$ , đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB=BC=a$ ,  $AD=2a$ ,  $SA=2a$ .

a) Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(SCD)$ .

b) Xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của  $AD$  và  $SC$ .

3. Cho tứ diện  $ABCD$  thỏa mãn điều kiện  $AB=CD$ ,  $BC=AD$ ,  $AC=BD$  và một điểm  $X$  thay đổi trong không gian. Tìm vị trí của điểm  $X$  sao cho tổng  $XA+XB+XC+XD$  đạt giá trị nhỏ nhất.

—Hết—

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM

KỶ THI OLYMPIC 24-3 LẦN THỨ 2  
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

### I. LƯU Ý CHUNG:

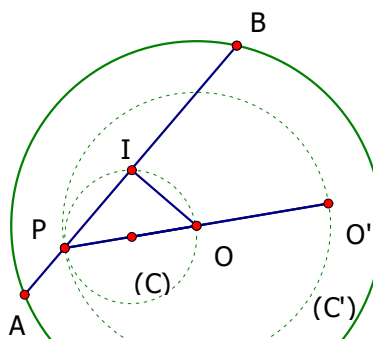
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

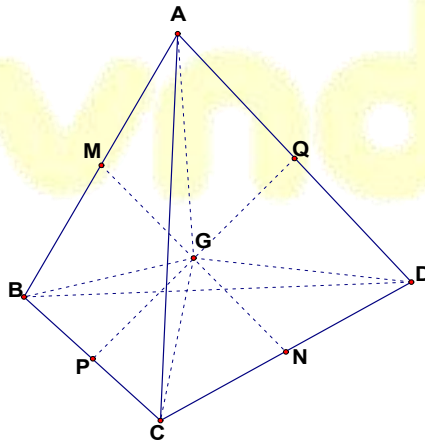
## II. ĐÁP ÁN:

| Câu | Ý      | Nội dung trình bày                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm |
|-----|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1   | 3 điểm |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|     |        | Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*)                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|     |        | Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos^2 x(\tan^2 x + \tan x) = \sin x + \cos x$                                                                                                                                                                                                                         | 0,5  |
|     |        | $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$                                                                                                                                                                               | 0,5  |
|     |        | $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5  |
|     |        | + Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$                                                                                                                                                                                                             | 0,5  |
|     |        | + Với $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$                                                                                                                                                                            | 0,5  |
|     |        | Đối chiếu điều kiện (*), suy ra nghiệm của phương trình đã cho là:<br>$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )                                                                                                                               | 0,5  |
| 2   | 1      | 2,5 điểm                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|     |        | Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999 - 10000 + 1 = 90000$<br>Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là: $\overline{abcd1}$                                                                                                                                            | 0,5  |
|     |        | Ta có $\overline{abcd1} = 10 \cdot \overline{abcd} + 1 = 3 \cdot \overline{abcd} + 7 \cdot \overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3 \cdot \overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7.                                                                                                                   | 0,5  |
|     |        | Đặt $3 \cdot \overline{abcd} + 1 = 7h \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2h + \frac{h-1}{3}$ là số nguyên khi và chỉ khi $h = 3t + 1$                                                                                                                                                                          | 0,5  |
|     |        | Khi đó ta được: $\overline{abcd} = 7t + 2 \Rightarrow 1000 \leq 7t + 2 \leq 9999$<br>$\Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq t \leq \frac{9997}{7} \Leftrightarrow t \in \{143, 144, \dots, 1428\}$ suy ra số cách chọn ra $t$ sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286. | 0,5  |
|     |        | Vậy xác suất cần tìm là: $\frac{1286}{90000} \approx 0,015$                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
|     | 2      | 2,5 điểm                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|     |        | Xét đẳng thức $(1-x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = (1-x^2)^{2018}$                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5  |

|   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|---|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|   |   | +) Ta có $(1-x^2)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (-x^2)^k$ suy ra hệ số của số hạng chứa $x^{2018}$ là $C_{2018}^{1009}$                                                                                                                                                    | 0,5 |
|   |   | +) Ta có $(1-x)^{2018} \cdot (1+x)^{2018} = \left( \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k (-x)^k \right) \left( \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k \right)$                                                                                                                                    | 0,5 |
|   |   | suy ra hệ số của số hạng chứa $x^{2018}$ là                                                                                                                                                                                                                                        | 0,5 |
|   |   | $C_{2018}^0 C_{2018}^{2018} - C_{2018}^1 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^2 C_{2018}^{2016} - C_{2018}^3 C_{2018}^{2015} + \dots + C_{2018}^{2018} C_{2018}^0$ $= (C_{2018}^0)^2 - (C_{2018}^1)^2 + (C_{2018}^2)^2 - (C_{2018}^3)^2 + \dots - (C_{2018}^{2017})^2 + (C_{2018}^{2018})^2$ | 0,5 |
|   |   | Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |
| 3 | 1 | <b>2,5 điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|   |   | $(n+2)^2 \left( u_{n+1} - \frac{1}{4} \right) = n^2 \left( u_n - \frac{1}{4} \right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 u_{n+1} = n^2 u_n$                                                                                                                                                | 0,5 |
|   |   | $\Rightarrow u_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} u_n$                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5 |
|   |   | $u_n = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 \left( \frac{n-2}{n-1} \right)^2 \dots \left( \frac{1}{3} \right)^2 u_1$                                                                                                                                                                   | 0,5 |
|   |   | $= \frac{4}{(n+1)^2}$                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|   |   | $\lim u_n = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5 |
|   | 2 | <b>2,5 điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|   |   | $S_n = \frac{1}{9\sqrt{n}} \left( \sqrt{10} - 1 + \sqrt{19} - \sqrt{10} + \dots + \sqrt{9n+1} - \sqrt{9n-8} \right)$                                                                                                                                                               | 0,1 |
|   |   | $= \frac{\sqrt{9n+1} - 1}{9\sqrt{n}}$                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|   |   | Suy ra : $\lim S_n = \lim \frac{\sqrt{9n+1} - 1}{9\sqrt{n}} = \frac{1}{3}$ .                                                                                                                                                                                                       | 1   |
| 4 | 1 | <b>2,0 điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|   |   | Gọi I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{PI} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$ .                                                                                                                                                                       | 05  |
|   |   | Bởi vậy $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$ .                                                                                                                                                                                 |     |
|   |   | Gọi V là phép vị tự tâm P tỉ số k=2 thì V biến điểm I thành điểm M.                                                                                                                                                                                                                | 05  |
|   |   | Vì I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$ . Suy                                                                                                                                                                                                                                  |     |





|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|          | ra quỹ tích của điểm I là đường tròn (C) đường kính PO.<br>Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5  |
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
| <b>2</b> | <b>3,0 điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|          | <b>a)(1.25 )</b> Vẽ đúng hình phục vụ câu a                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|          | Chứng minh được $CD \perp (SAC)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|          | Chứng minh được $((ABCD), (SCD)) = \widehat{SCA}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|          | Tính đúng $\widehat{SCA} = \arctan \sqrt{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|          | KL:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|          | <b>b)(1.75)</b> Vẽ đúng hình phục vụ câu b (có đoạn vuông góc chung)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25 |
|          | Chứng minh đúng đoạn vuông góc chung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1    |
|          | Tính đúng độ dài đoạn vuông góc chung bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5  |
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| <b>3</b> | <b>2,0 điểm</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|          |  <p>Gọi <math>G</math> là trọng tâm của tứ diện; <math>M, N, P, Q</math> lần lượt là trung điểm của các cạnh <math>AB, CD, BC, AD</math>. Ta có tam giác <math>ACD</math> bằng tam giác <math>BCD</math> nên <math>AN = BN</math> suy ra <math>MN \perp AB</math>, tương tự ta chứng minh được <math>MN \perp CD</math> và đường thẳng <math>PQ</math> vuông góc với cả hai đường thẳng <math>BC, AD</math>. Từ đó suy <math>GA = GB = GC = GD</math>.</p> <p>Ta có <math>XA + XB + XC + XD = \frac{XA \cdot GA + XB \cdot GB + XC \cdot GC + XD \cdot GD}{GA}</math></p> <p><math>\geq \frac{\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{XC} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{XD} \cdot \overrightarrow{GD}}{GA}</math></p> <p><math>= \frac{\overrightarrow{XG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + 4 \cdot GA^2}{GA} = 4GA</math>. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi <math>X</math> trùng với điểm <math>G</math>. Vậy <math>XA + XB + XC + XD</math> nhỏ nhất khi và chỉ khi <math>X</math> là trọng tâm của tứ</p> | 0,5  |
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1    |
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |

|  |               |  |
|--|---------------|--|
|  | diện $ABCD$ . |  |
|--|---------------|--|

SỐ GDĐT QUANG NAM  
TRƯỜNG THPT QUẾ SƠN

Người gửi : Ngô Văn Quyền

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN 11

NĂM HỌC 2016-2017

**Câu 1(4 điểm):**Giải phương trình:

a/  $\tan x + 4 \cos x = 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{\cos x}$

b/ Giải phương trình  $\cos 2x - 3 \sin 2x + 5\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{9\pi}{4} \right) = 3$ .

**Câu 2(4 điểm):**

a/ Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi : 
$$\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tìm công thức tính  $u_n$  theo  $n$ .

b/ Tính giới hạn sau: 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$$

**Câu 3(3 điểm):**

a/ Biết tổng các hệ số bậc chẵn trong khai triển của  $(1+x)^n$  là 512. Tìm hệ số của

$x^5$  trong khai triển  $x^2(1+3x)^n$ .

b/ Cho  $C = \{1, 2, 3, \dots, 119, 120\}$ . Chọn ngẫu nhiên 2 số từ  $C$ . Tính xác suất để chọn được

2 số có tích chia hết cho 7.

**Câu 4(3 điểm):**

a/ Cho  $a > 0, b > 0$ . Chứng minh rằng phương trình 
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+b} = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt thuộc  $(a; b)$

b/Tìm giới hạn sau:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{2x-3} - 3}{x^2 - 4}$

**Câu 5(4 điểm):** Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC đều cạnh bằng  $a$  ( $a > 0$ ) và tam giác BCD cân

tại D với  $DC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

a/ Chứng minh  $AD \perp BC$

b/ Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính góc giữa hai đường thẳng AG và CD

theo  $a$  biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) bằng  $30^\circ$ .

**Câu 6(2 điểm):** Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho

$MA + MB + MC$  nhỏ nhất.

Đáp án

| câu   | Nội dung                                                                                                                | Điểm |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1/a   | Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$                                                             | 0,25 |
| 2,0 đ | $pt \Leftrightarrow \sin x + 4 \cos^2 x = 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) \cos x + 2$                          | 0,25 |
|       | $\Leftrightarrow \sin x + 2(1 + \cos 2x) = (\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x) \cos x + 2$                                     | 0,25 |
|       | $\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x \cos x + 2 \cos 2x - \sqrt{3} \cos 2x \cos x = 0$                                     |      |
|       | $\Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos^2 x) + \cos 2x (2 - \sqrt{3} \cos x) = 0$                                           | 0,25 |
|       | $\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x + \cos 2x (2 - \sqrt{3} \cos x) = 0$                                                   |      |
|       | $\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2) = 0$                                                            | 0,25 |
|       | +) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$                                   | 0,25 |
|       | +) $\sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$                | 0,25 |
|       | $\Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ |      |
|       |                                                                                                                         | 0,25 |

|      |                                                                                                                                                                             |      |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|      | So với điều kiện ta được nghiệm của pt là : $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in Z$                                                       |      |
| 1/b  | PT $\Leftrightarrow \cos 2x - 3\sin 2x + 5(\cos x + \sin x) = 3$                                                                                                            | 0,5  |
| 2,0đ | $\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) - 3(1 + 2\sin x \cdot \cos x) + 5(\cos x + \sin x) = 0$                                                                              | 0,5  |
|      | $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(-2\cos x - 4\sin x + 5) = 0$                                                                                                             |      |
|      | $\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \quad (-2\cos x - 4\sin x + 5 = 0 \text{ VN})$                                                                                         | 0,5  |
|      | $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$                                                                                     | 0,5  |
| 2/a  | Ta có:                                                                                                                                                                      |      |
|      | $u_1 = 11 = 10 + 1$                                                                                                                                                         | 0,25 |
| 2,0đ | $u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 2$                                                                                                                                       | 0,25 |
|      | $u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3$                                                                                                                                  | 0,25 |
|      | Dự đoán: $u_n = 10^n + n \quad (1)$                                                                                                                                         | 0,25 |
|      | Chứng minh:                                                                                                                                                                 |      |
|      | Ta có: $u_1 = 11 = 10^1 + 1$ , công thức (1) đúng với $n=1$                                                                                                                 | 0,25 |
|      | Giả sử công thức (1) đúng với $n=k$ ta có : $u_k = 10^k + k$                                                                                                                | 0,25 |
|      | Ta có: $u_{k+1} = 10(10^k + k) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k + 1)$ . Công thức(1) đúng với $n=k+1$                                                                               | 0,25 |
|      | Vậy $u_n = 10^n + n, \forall n \in N$ .                                                                                                                                     | 0,25 |
| 2/b  | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$ |      |
| 2,0đ | $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$ |      |
|      | $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{-1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2} \right)$   | 0,5  |
|      | $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2\sqrt{n}}$                                                                                                           | 0,5  |
|      | $= \frac{\sqrt{2}}{2}$                                                                                                                                                      | 0,5  |
|      |                                                                                                                                                                             | 0,5  |
| 3/a  | Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + \dots + x^nC_n^n$                                                                                                             |      |
|      | Cho: $x=1$ : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$                                                                                                                          | 0,25 |
| 1,5đ | Cho: $x=-1$ : $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$                                                                                                                    | 0,25 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                         |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
|     | <p>Suy ra : <math>C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^{2k} + \dots = 2^{n-1}</math></p> <p>Theo giả thiết: <math>2^{n-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 10</math></p> <p>Từ đó ta có: <math>x^2(1+3x)^{10} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^k x^{k+2}</math></p> <p>Ta được hệ số của <math>x^5</math> là 3240</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>                                     |
| 3/b | <p>Viết được: <math> \Omega  = C_{120}^2</math>. Gọi A là biến cố chọn được 2 số có tích chia hết cho 7</p> <p>Số chia hết cho 7 có dạng: <math>7k</math> ( <math>k</math> nguyên dương) và</p> <p><math>1 \leq 7k \leq 120 \Rightarrow 1 \leq k \leq 17</math> hay có 17 số chia hết cho 7 và 103</p> <p>số không chia hết cho 7. Tích 2 số chia hết cho 7 xảy ra 1 trong 2 trường hợp sau:</p> <p>TH1: cả 2 số đều chia hết cho 7: Có <math>C_{17}^2</math> cách chọn</p> <p>TH2: 1 số chia hết 7 và một số không chia hết 7: có <math>C_{17}^1 \cdot C_{103}^1</math> cách chọn</p> <p>Suy ra: <math> \Omega_A  = C_{17}^2 + C_{17}^1 \cdot C_{103}^1</math>. Do đó:</p> <p><math>p(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{37}{140}</math></p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| 4/a | <p>Ta có</p> <p><math>\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \wedge x \neq a \wedge x \neq -b \\ (x-a)(x+b) + (x+b)x + x(x-a) = 0 \end{cases}</math></p> <p>Đặt <math>f(x) = (x-a)(x+b) + (x+b)x + x(x-a)</math> ta có hàm số <math>f(x)</math> xác định và liên tục trên <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>Ta có <math>f(-b) = b(b+a)</math>, <math>f(0) = -ab &lt; 0</math>, <math>f(a) = a(a+b)</math> nên</p> <p><math>f(-b) \cdot f(0) = -ab^2(b+a) &lt; 0</math> và <math>f(0) \cdot f(a) = -a^2b(b+a) &lt; 0</math></p> <p>Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt <math>x_1, x_2</math> thỏa</p> <p><math>-b &lt; x_1 &lt; 0 &lt; x_2 &lt; a</math></p>                             | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| 4/b | <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{2x-3} - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{3x-5} - 2}{x^2 - 4} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x-3} - 1}{x^2 - 4}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(3x-5) - 4}{(x^2 - 4)(x\sqrt{3x-5} + 2)} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3 - 1}{(x^2 - 4)(\sqrt[3]{2x-3} + 1)}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>0,25</p> <p>0,25</p>                                                 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                      |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|      | $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x^2+x+2)}{(x-2)(x+2)(x\sqrt{3x-5}+2)} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^2 + \sqrt[3]{2x-3}+1\right)}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2+x+2)}{(x+2)(x\sqrt{3x-5}+2)} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^2 + \sqrt[3]{2x-3}+1\right)} = \frac{16}{4.4} + \frac{2}{4.3} = \frac{7}{6}$                                                                                                                                                                                                   | 0,5<br>0,5                                           |
| 5    | <p>1) CM : <math>AD \perp BC</math></p> <p>Gọi M là trung điểm BC, ta có :</p> <p><math>\Delta ABC</math> đều nên <math>AM \perp BC</math>.</p> <p><math>\Delta BCD</math> cân nên <math>DM \perp BC</math></p> <p><math>\Rightarrow BC \perp (AMD) \Rightarrow BC \perp AD</math> (đpcm)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25<br>0,25<br>0,25                                 |
| 4,0đ | <p>1) Tính góc giữa AG và CD.</p> <p>-Ta có MA và MD cùng <math>\perp BC</math> nên góc giữa 2 mp (ABC) và (BCD) bằng góc giữa MA và MD . <math>\Rightarrow</math> Góc giữa MA và MD bằng <math>30^\circ</math></p> <p>-Trong <math>\Delta MCD</math> kẻ <math>GN \parallel CD</math>, nối AN.</p> <p>Thì góc giữa AG và CD bằng góc giữa AG và GN.</p> <p>*TH1 : Góc AMD bằng <math>30^\circ</math>.</p> <p>-<math>\Delta BCD</math> cân tại D nên tính được <math>MD = a \Rightarrow MG = \frac{1}{3}MD = \frac{a}{3}</math>.</p> <p>-<math>\Delta ABC</math> đều cạnh a nên <math>MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}</math></p> | 0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|      | <p>-Áp dụng định lí cosin cho <math>\Delta AMG</math>, ta tính được <math>AG = \frac{a\sqrt{13}}{6}</math>.</p> <p>-<math>\Delta MCD</math> có <math>GN = \frac{1}{3}CD = \frac{a\sqrt{5}}{6}</math>.</p> <p><math>\Delta ANC</math> có <math>NC = \frac{a}{3}; AC = a; C = 60^\circ \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}</math></p> <p><math>\Delta AGN</math> có <math>AN = \frac{a\sqrt{7}}{3}; GN = \frac{a\sqrt{5}}{6}; AG = \frac{a\sqrt{13}}{6}</math></p> <p>Áp dụng hệ quả định lí cosin tính được <math>\cos G = \frac{-5}{\sqrt{65}}</math>.</p> <p>Gọi góc <math>(AG; CD) = \alpha</math> thì <math>\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}</math></p> <p>* TH2 : Góc AMD bằng <math>150^\circ</math></p> <p>Hoàn toàn tương tự tính được : góc <math>(AG; CD) = \alpha</math> thì <math>\cos \alpha = \frac{26}{7\sqrt{6}}</math></p> <p>Vậy góc <math>(AG; CD) = \alpha</math> t/m : <math>\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{65}}</math> hoặc <math>\cos \alpha = \frac{26}{7\sqrt{6}}</math></p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| 6    | <p>Dùng phép quay quanh A với góc quay <math>60^\circ</math> biến M thành M'; C thành C'</p> <p>Ta có <math>MA+MB+MC = BM+MM'+M'C'</math></p> <p><math>MA+MB+MC</math> bé nhất khi bốn điểm B,M,M',C' thẳng hàng.</p> <p>Khi đó góc BMA=<math>120^\circ</math>, góc AMC=<math>120^\circ</math></p> <p>Ta được vị trí của M trong tam giác ABC.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>                            |
| 2,0đ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                     |

Xem tiếp tài liệu tại: <https://vndoc.com/tai-lieu-hoc-tap-lop-11>