

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 1**Câu 1.(2,0 điểm)**a) Giải bất phương trình: $x^2 - 6x + 2 \geq 2(2 - x)\sqrt{2x - 1}$.b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$$
Câu 2.(2,0 điểm)Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 - m = y(x + my) \\ x^2 - y = xy \end{cases}$$
Câu 3.(2,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $I(2;4)$ và các đường thẳng $d_1: 2x - y - 2 = 0$, $d_2: 2x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I sao cho (C) cắt d_1 tại A, B và cắt d_2 tại C, D thỏa mãn $AB^2 + CD^2 + 16 = 5AB \cdot CD$.

Câu 4. (2,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL và $\frac{CM}{AL} = \frac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Tính $\frac{b}{c}$ và $\cos A$.

2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: $(2+a)(1+b) = \frac{9}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{16+a^4} + 4\sqrt{1+b^4}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho $f(x) = x^2 - ax + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện: Tồn tại các số nguyên m, n, p đôi một phân biệt và $1 \leq m, n, p \leq 9$ sao cho: $|f(m)| = |f(n)| = |f(p)| = 7$. Tìm tất cả các bộ số $(a; b)$.

Câu 6: (2,0 điểm) Giải phương trình $2\cos^2 x (\tan^2 x + \tan x) = \sin x + \cos x$.

Câu 7 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ tâm I và điểm $M(3;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Câu 8 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 9 (2,0 điểm). Cho các số a, b, c không âm sao cho tổng hai số bất kì đều dương. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c} \geq 6.$$

Câu 10.(2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3;1), B(-3;9), C(2;-3)$.

a) Gọi D là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BC}$. Xác định tọa độ D .

b) Viết phương trình đường thẳng qua A , cắt đoạn thẳng CD tại M sao cho tứ giác $ABCM$ có diện tích bằng 24.

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN ĐỀ 01

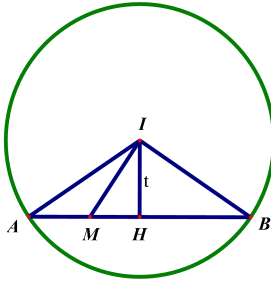
Câu1	Đáp án	Điểm
1 điểm	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1}$ ($t \geq 0$) thì $2x = t^2 + 1$. Khi đó ta có $x^2 - 6x + 2 - 2(2-x)t \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2tx - 4t - 3(t^2 + 1) + 2 \geq 0$	1.0
	$\Leftrightarrow (x+t)^2 - (2t+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3t+1)(x-t-1) \geq 0$	
	$\Leftrightarrow x-1 \geq t \text{ (do } x+3t+1 > 0; \forall x \geq \frac{1}{2}; \forall t \geq 0 \text{)}.$	
	Với $x-1 \geq t$ ta có $x-1 \geq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 + \sqrt{2}$. Đổi chiều điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2 + \sqrt{2}; +\infty)$.	
1 điểm	$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } x \geq -\frac{5}{4}$	1,0
	Th1: $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa mãn	
	Th2: $y \neq 0$ ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \Leftrightarrow (t-y)(t^4 + t^3y + t^2y^2 + ty^3 + y^4) = 0$ với $t=x/y$ $\Leftrightarrow (t-y)[(t^2+y^2)^2 + (t+y)^2(t^2-ty+y^2)+2] = 0 \Leftrightarrow t=y \text{ hay } y^2 = x$	
	Thay vào (2): $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 23-5x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{5} \\ x^2 - 42x + 41 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$	
	Đổi chiều đk ta được nghiệm hệ là: $(x; y) = \{(1;1); (-1;1)\}$	
Câu2	Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} my^2 - y + m = 0 & (1) \\ x^2 - yx - y = 0 & (2) \end{cases}$	2.0
	Phương trình (2) (ẩn x) có nghiệm là $\Delta_x = y^2 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -4 \end{cases}$	
	Th1: $m = 0$, ta có $y = 0, x = 0$. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn.	

3 điểm	12: $m \neq 0$. Phương trình (1) (ẩn y) không có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ (*) là (1) vô nghiệm hoặc (1) có 2 nghiệm đều thuộc $(-4; 0)$, điều kiện là $\begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 < 0 \\ \Delta = 1 - 4m^2 \geq 0 \\ -4 < y_1 < 0 \\ -4 < y_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 < 0 \\ \Delta = 1 - 4m^2 \geq 0 \\ -4 < \frac{1 - \sqrt{1 - 4m^2}}{2m} < 0 \\ -4 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4m^2}}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ -\frac{1}{2} \leq m < 0 \\ \sqrt{1 - 4m^2} > 1 + 8m \quad (A) \\ \sqrt{1 - 4m^2} < -1 - 8m \end{cases} \quad (B)$ (với y_1, y_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)).	
	$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m < -\frac{1}{8} \\ \sqrt{1 - 4m^2} < -1 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < -\frac{4}{17} \Rightarrow (B) \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\frac{4}{17}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$	
	Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) (ẩn y) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ hay (*) không xảy ra, điều kiện là $-\frac{4}{17} \leq m \leq \frac{1}{2}; m \neq 0$. Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $-\frac{4}{17} \leq m \leq \frac{1}{2}$.	
Câu 3 2 điểm	Gọi hình chiếu của I trên d_1, d_2 lần lượt là E, F. khi đó $IE = d_{(I; d_1)} = \frac{2}{\sqrt{5}}; IF = d_{(I; d_2)} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.	2,0
	Gọi R là bán kính của đường tròn (C) cần tìm ($R > \frac{6}{\sqrt{5}}$) $AB = 2AE = 2\sqrt{R^2 - \frac{4}{5}}; CD = 2CF = 2\sqrt{R^2 - \frac{36}{5}}$	
	Theo giả thiết ta có: $4\left(R^2 - \frac{4}{5}\right) + 4\left(R^2 - \frac{36}{5}\right) + 16 = 20\sqrt{R^2 - \frac{4}{5}}\sqrt{R^2 - \frac{36}{5}}$.	
	$\Leftrightarrow 8R^2 - 16 = 4\sqrt{(5R^2 - 4)(5R^2 - 36)} \Leftrightarrow 2R^2 - 4 = \sqrt{(5R^2 - 4)(5R^2 - 36)}$ $\Leftrightarrow (2R^2 - 4)^2 = (5R^2 - 4)(5R^2 - 36) \text{ (do } R > \frac{6}{\sqrt{5}}) \Leftrightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ (do } R > \frac{6}{\sqrt{5}})$	
	Vậy phương trình đường tròn (C) cần tìm là $(C): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 8$.	
4.a 1 điểm	Ta có: $\overrightarrow{AL} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$	1.0
	$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$	
	Theo giả thiết: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$	
	$\Leftrightarrow (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2 \cos A - 2cb^2 \cos A - 2cb^2 = 0$ $\Leftrightarrow (c - 2b)(1 + \cos A) = 0 \Rightarrow c = 2b \text{ (do } \cos A > -1)$	
	Khi đó: $CM^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{2}$	

	$AL^2 = \frac{1}{9}(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = \frac{2}{9}(9b^2 - a^2)$	
	$\frac{CM}{AL} = \frac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{CM^2}{AL^2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 - b^2}{9b^2 - a^2} = \frac{9}{4}(5-2\sqrt{5}) \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{9b^2 - a^2} = 5-2\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 6 - \sqrt{5}$	
	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5b^2 - a^2}{4b^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	
4.b 1 điểm	C/M được : $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$. áu bằng xảy ra khi: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	1.0
	Áp dụng (1) ta có : $\frac{p}{4} = \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2} + \sqrt{1+b^4} \geq \sqrt{4 + \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{(a^2 + 4b^2)^2}{16}}$	
	Mặt khác: $(1+2a)(1+b) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a+2b+ab = \frac{5}{2}$ (2)	
	Mà: $\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ 4b^2 + 1 \geq 4b \\ \frac{a^2 + 4b^2}{2} \geq 2ab \end{cases} \Rightarrow \frac{3(a^2 + 4b^2)}{2} + 2 \geq 2a + 4b + 2ab \Rightarrow a^2 + 4b^2 \geq 2 \quad (3)$	
	Từ (1) và (3) suy ra: $p \geq 2\sqrt{17}$.Dấu “=” xảy ra khi: a=1 và $b = \frac{1}{2}$ Vậy: $MinP = 2\sqrt{17}$ Đạt được khi a=1 và $b = \frac{1}{2}$.	
Câu 5 2 điểm	3 số f(m),f(n),f(p) hoặc cùng dương, âm hoặc có 2 số cùng dấu nên: Th1: f(m),f(n),f(p) cùng bằng 7 hoặc -7 $\Rightarrow$ loại vì phương trình f(x)-7=0 có 3 nghiệm phân biệt	2,0
	Th2: $f(m) = f(n) = 7$ và $f(p) = -7$ Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$ và $m-p \geq n-p$ ta có: m,n là nghiệm pt: $x^2 - ax + b - 7 = 0$ và p là nghiệm pt: $x^2 - ax + b + 7 = 0$ nên : $\begin{cases} m+n=a \\ (n-p)(n+p-a)=14 \Rightarrow (n-p)(p-m)=14 \Rightarrow \\ (m-p)(m+p-a)=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} n-p=2 \\ p-m=7 \end{cases} \Rightarrow n-m=9(l) \\ \begin{cases} n-p=-2 \\ p-m=-7 \end{cases} \Rightarrow n-m=-9(l) \end{cases}$	
	Th3: $f(m) = f(n) = -7$ và $f(p) = 7$, khi đó hoàn toàn tương tự ta có: $(p-n)(m-p) = -14 \Rightarrow \begin{cases} m-p=-7 \\ p-n=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m-p=7 \\ p-n=-2 \end{cases}$	
	Do m,n,p $\in [1;9]$ nên tìm được 4 bộ là: (a;b)= $\{(11;17), (13;29), (7;-1), (9;7)\}$.	

Câu 6		2,0
-------	--	-----

	Điều kiện: $\cos x \neq 0$ (*). PT đã cho tương đương $2 \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 2 \sin x (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$ $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \sin x - 1) = 0$	
	+) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	
	+ $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ Đối chiếu điều kiện (*), suy ra nghiệm của PT là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	

Câu 7		2,0
		
	(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$. Ta có $IM=2 < R$ nên M nằm trong đường tròn (C). Gọi H là hình chiếu của I trên AB và đặt $IH=t, 0 < t \leq 2$.	
	Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = t\sqrt{9-t^2}$. Xét hàm $f(x) = t\sqrt{9-t^2}; 0 < t \leq 2$.	
	Ta có $f'(t) = \frac{9-2t^2}{\sqrt{9-t^2}} > 0, \forall t \in (0;2]$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0;2] \Rightarrow f(t) \leq f(2)$	
	Vậy S_{IAB} lớn nhất khi $d(I; \Delta) = t = 2$, hay $H \equiv M$ Khi đó Δ nhận $\overline{IM}$ là vec tơ pháp tuyến, suy ra $\Delta: x-3=0$.	

Câu 8	2,0 điểm	
	Đặt $x+y=a, x-y=b$. Để cho tiện ta đặt $3=c^3$ Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có: $(ab)^3 = c^3 \Leftrightarrow ab=c$. Từ $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$, suy ra $x^4 - y^4 = \frac{ab}{2}(a^2 + b^2)$ và $2x-y = (a+b) - \frac{(a-b)}{2} = \frac{a+3b}{2} = \frac{a+c^3b}{2}$	0,25
	Phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $\frac{ab}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2 + b^2) = a + c^3b$ Ta có hệ $\begin{cases} c(a^2 + b^2) = a + c^3b \\ ab = c \end{cases}$, suy ra $c\left(a^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow ca^4 + c^3 = a^3 + ac^4 \Leftrightarrow (ca-1)(a^3 - c^3) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{c} \vee a = c$.	0,25

	- Nếu $a = c, b = 1$ thì $x = \frac{c+1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$. - Nếu $a = \frac{1}{c}, b = c^2$ thì $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + c^2\right) = \frac{1+c^3}{2c} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - c^2\right) = \frac{1-c^3}{2c} = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$	0,25
	Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}; \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right), \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}; \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.	0,25
Câu 9	2,0 điểm	
	Đặt $P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{9\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c}$ Giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $\sqrt{\frac{ab}{a+c}} + \sqrt{\frac{ac}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{bb}{b+c}} + \sqrt{\frac{cc}{c+b}} = \sqrt{b+c}$	0,25
	Suy ra $\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$.	0,25
	Đặt $t = b+c$ thì $P \geq \sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t}$.	0,25
	Ta có $\sqrt{\frac{a}{t}} + \sqrt{\frac{t}{a}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} = \frac{a+t}{\sqrt{at}} + \frac{9\sqrt{at}}{a+t} \geq 6$ (AM-GM). Do đó $P \geq 6$ (đpcm).	0,25
	Chú ý: Đẳng thức xảy ra khi $a+t = 3\sqrt{at}$ và chẳng hạn một bộ (a, b, c) thỏa mãn là $(a; b; c) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; 1; 0\right)$ (HS có thể không cần nêu bước này).	

Câu 10(2,0 điểm)

$a/ \overrightarrow{BC} = (5; -12)$	$D = T_{\overrightarrow{BC}}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$	
$\begin{cases} x_D - 3 = 5 \\ y_D - 1 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases} \Leftrightarrow D(8; -11)$		
$b/ \overrightarrow{AB} = (-6; 8) \Rightarrow AB = 10$; Pt(AB): $4x + 3y - 15 = 0 \Rightarrow d((CM), (AB)) = d(C, (AB)) = \frac{16}{5}$.		
$S_{\triangle ABCM} = \frac{(AB + CM) \cdot d((CM), (AB))}{2} = 24 \Rightarrow CM = 5$		
Do M thuộc đoạn thẳng CD, $CM = 5 = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$ suy ra M là trung điểm CD $\Rightarrow M(5; -7)$.		
Pt (AM) là: $4x + y - 13 = 0$		

-----Hết-----

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 2**Câu 1 (3,0 điểm)**

a) Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và hàm số $y = -x + m$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời khoảng cách từ trung điểm I của đoạn thẳng AB đến các trục tọa độ bằng nhau.

b) Giải bất phương trình: $\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} - \frac{1}{2x - 4} > 0$

Câu 2 (3,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có B(1;2). Đường thẳng Δ là đường phân giác trong của góc A có phương trình $2x + y - 1 = 0$; Khoảng cách từ C đến Δ gấp 3 lần khoảng cách từ B đến Δ . Tìm tọa độ của A và C biết C nằm trên trục tung.

b) Cho tam giác ABC vuông ở A, gọi α là góc giữa hai đường trung tuyến BM và CN của tam giác. Chứng minh rằng $\sin \alpha \leq \frac{3}{5}$

Câu 3 (3,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Tìm vị trí của điểm K trên AD sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng.

b) Cho tam giác ABC vuông ở A; $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Xác định điểm I thỏa mãn hệ thức: $b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} - 2a^2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$; Tìm điểm M sao cho biểu thức $(b^2MB^2 + c^2MC^2 - 2a^2MA^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $1 + (6x + 2)\sqrt{2x^2 - 1} = 2(5x^2 + 4x)$

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz.$$

Câu 5: (3,0 điểm)

a) Cho $\tan \frac{b}{2} = 4 \tan \frac{a}{2}$. Chứng minh: $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{3 \sin a}{5 - 3 \cos a}$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{7}{16} \cos 4x + \frac{35}{64}$.

Câu 6: (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos x + \cos^6 x = 1$

b) $12 \cos x + 5 \sin x + \frac{5}{12 \cos x + 5 \sin x + 14} + 8 = 0$.

c) $\frac{1 + \cot 2x \cdot \tan x}{\cos^2 x} + 1 = 6(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x)$;

Câu 7(1,0 điểm): Tìm các giá trị α để phương trình:

$$(\cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3})x^2 + (\sqrt{3} \cos \alpha - 3 \sin \alpha - 2)x + \sin \alpha - \cos \alpha + \sqrt{3} = 0 \text{ có nghiệm } x = 1.$$

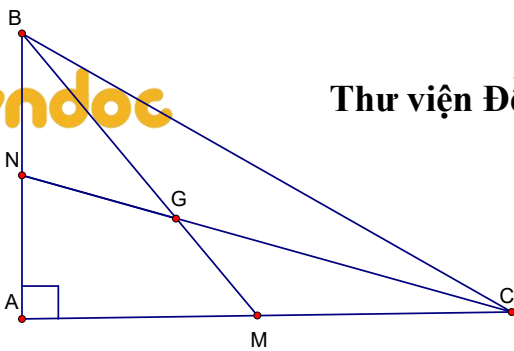
Câu 8(2,0 điểm):

a). Trong mặt phẳng Oxy , cho vector $\vec{v}=(-2;1)$, đường thẳng d có phương trình $2x-3y+3=0$. Hãy xác định phương trình của d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$.

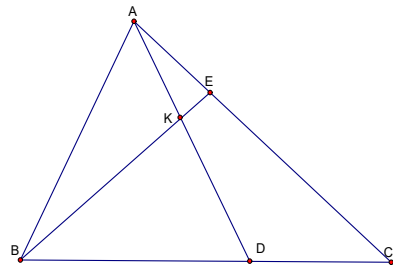
b) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}=(-2;5)$.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ 2

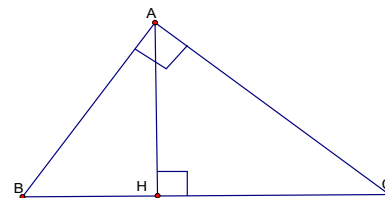
Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Cho hàm số $y=x^2-3x+2$ và hàm số $y=-x+m$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B đồng thời trung điểm của đoạn thẳng AB cách đều các trục tọa độ.	1,5
		Yêu cầu bài toán $\Rightarrow$ PT sau có hai nghiệm phân biệt $x^2-3x+2=-x+m$ hay $x^2-2x+2-m=0$ (*) có $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>1$	
		Gọi $x_A; x_B$ là 2 nghiệm của (*), I là trung điểm AB ta có $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = 1$; $y_I = -x_I + m = m-1$	
		Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_I = x_I \Leftrightarrow m-1 = 1 \Leftrightarrow m=2; m=0$	
		Kết hợp ĐK, kết luận $m=2$	
	b	Giải bất phương trình: $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} - \frac{1}{2x-4} > 0$ (1)	1,5
		TXĐ: $\begin{cases} -x^2+4x-3 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2; 2 < x < 3$	0,25
		(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} > \frac{1}{2x-4}$ Nếu $1 < x < 2$ thì $\sqrt{-x^2+4x-3} > 0 > 2x-4$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x : $1 < x < 2$	0,25
		Nếu $2 < x < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4 > 0 \\ \sqrt{-x^2+4x-3} > 0 \end{cases}$ bất pt đã cho $\Leftrightarrow 2x-4 > \sqrt{-x^2+4x-3}$	0,25
		$\Leftrightarrow 4x^2-16x+16 > -x^2+4x-3 \Leftrightarrow 5x^2-20x+19 > 0 \quad x > 2+\frac{\sqrt{5}}{5}; x < 2-\frac{\sqrt{5}}{5}$	0,25
		Kết hợp nghiệm, trường hợp này ta có: $2+\frac{\sqrt{5}}{5} < x < 3$ Tập nghiệm của bpt đã cho: $(1;2) \cup (2+\frac{\sqrt{5}}{5};3)$	0,25
2	a	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(1;2)$. Đường thẳng Δ là đường phân giác trong của góc A có phương trình $2x+y-1=0$; khoảng cách từ C đến Δ gấp 3 lần khoảng cách từ B đến Δ . Tìm tọa độ của A và C biết C nằm trên trục tung.	1,5



		$D(B; \Delta) = \frac{3}{\sqrt{5}}; C(0; y_0); D(C; \Delta) = \frac{ y_0 - 1 }{\sqrt{5}}$, theo bài ra ta có $\frac{ y_0 - 1 }{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow y_0 = 10; y_0 = -8$	0,25
		Vẽ hệ trục tọa độ, điểm B, chú ý C khác phía B đối với Δ suy ra $C(0; -8)$	0,25
		Gọi $B'(a; b)$ là điểm đối xứng với B qua Δ thì B' nằm trên AC. Do $BB' \perp u_{\Delta} = (1; -2)$ nên ta có: $a - 2b + 3 = 0$; Trung điểm I của BB' phải thuộc Δ nên có: $2a + b + 2 = 0$ Từ đó ta có: $a = -7/5; b = 4/5$	0,25
		Theo định lý Ta - Let suy ra $\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB'}$ $A(x; y); \overrightarrow{CA} = (x; y + 8); \overrightarrow{CB'} = \left(-\frac{7}{5}; \frac{44}{5}\right)$	0,25
		Từ đó suy ra $A\left(-\frac{21}{10}; \frac{26}{5}\right); C(0; -8)$	0,25
	b	Xét các tam giác vuông ABC vuông ở A, gọi α là góc giữa hai đường trung tuyến BM và CN của tam giác. Chứng minh rằng $\sin \alpha \leq \frac{3}{5}$	1,5
		Gọi a, b và c tương ứng là độ dài các cạnh đối diện các góc A, B và C của tam giác. Có $CN^2 = b^2 + \frac{c^2}{4}$ $BM^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}$	
		Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có $\cos \widehat{BGC} = \frac{BG^2 + CG^2 - BC^2}{2BG \cdot CG}$ $= \frac{-2(b^2 + c^2)}{\sqrt{(4c^2 + b^2)(4b^2 + c^2)}}$; Do đó $\cos \alpha = \frac{2(b^2 + c^2)}{\sqrt{(4c^2 + b^2)(4b^2 + c^2)}}$	
		Có $\sqrt{(4c^2 + b^2)(4b^2 + c^2)} \leq \frac{5(b^2 + c^2)}{2}; "=" \Leftrightarrow 4c^2 + b^2 = 4b^2 + c^2 \Leftrightarrow b = c$	
		Do đó $\cos \alpha = \frac{2(b^2 + c^2)}{\sqrt{(4c^2 + b^2)(4b^2 + c^2)}} \geq \frac{2(b^2 + c^2) \cdot 2}{5(b^2 + c^2)} = \frac{4}{5}$	
		Hay $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \leq \frac{3}{5}$. Dấu bằng có khi tam giác vuông cân đỉnh A	
3	a	Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Tìm vị trí của điểm K trên AD sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng.	1,5



		Vì $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ (1) Giả sử $\overrightarrow{AK} = x.\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = x.\overrightarrow{BD} + (1-x)\overrightarrow{BA}$	
		Mà $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AK} = x.\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BD} + (1-x)\overrightarrow{BA}$	
		Vì B, K, E thẳng hàng ($B \neq E$) nên có m sao cho $\overrightarrow{BK} = m\overrightarrow{BE}$ Do đó có: $\frac{m}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3m}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}$ Hay $\left(\frac{m}{4} - \frac{2x}{3}\right)\overrightarrow{BC} + \left(1-x - \frac{3m}{4}\right)\overrightarrow{BA} = \vec{0}$	
		Do $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên $\frac{m}{4} - \frac{2x}{3} = 0$ & $1-x - \frac{3m}{4} = 0$ Từ đó suy ra $x = \frac{1}{3}; m = \frac{8}{9}$. Vậy $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$	
3	b	Cho tam giác ABC vuông ở A; $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Xác định điểm I thỏa mãn hệ thức: $-2a^2\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; Tìm điểm M: biểu thức $-2a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.	1,5
		Kẻ đường cao AH, ta có $b^2 = a.CH$; $c^2 = a.BH$ nên $b^2.BH = c^2.CH$. Do đó: $b^2.\overrightarrow{BH} + c^2.\overrightarrow{CH} = \vec{0}$	
		Suy ra $b^2.\overrightarrow{IB} + c^2.\overrightarrow{IC} = b^2.\overrightarrow{IH} + c^2.\overrightarrow{IH} = a^2.\overrightarrow{IH}$	
		Kết hợp giả thiết suy ra $2a^2.\overrightarrow{IA} = a^2.\overrightarrow{IH}$ hay $2.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IH}$ Do đó điểm I thỏa mãn gt là I thỏa mãn A là trung điểm IH	



		Với x, y, z tùy ý thỏa mãn: $x.\overrightarrow{IA} + y.\overrightarrow{IB} + z.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*) bình phương vô hướng 2 vế (*), chú ý rằng $2\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IA^2 + IB^2 - AB^2$ ta có: $(x.IA^2 + y.IB^2 + z.IC^2)(x + y + z) = xyc^2 + xzb^2 + yza^2$ Từ đó có $(-2a^2.IA^2 + b^2.IB^2 + c^2.IC^2) = 3b^2c^2$	
--	--	---	--

		Mặt khác $xMA^2 = x(\overline{IA} - \overline{IM})^2 = x(IM^2 + IA^2 - 2\overline{IA} \cdot \overline{IM})$ Tương tự cho yMB^2; zMC^2 rồi cộng các đẳng thức đó lại ta có $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = (x + y + z)IM^2 + xIA^2 + yIB^2 + zIC^2$ Thay số có: $-2a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = -a^2IM^2 + 3b^2c^2 \leq 3b^2c^2$ Dấu bằng xảy ra khi M trùng I	
4	a	Giải phương trình: $1 + (6x + 2)\sqrt{2x^2 - 1} = 2(5x^2 + 4x)$ (*)	1,5
		ĐK: $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$	
		(*) $\Leftrightarrow (3x + 1)^2 + (2x^2 - 1) - 2(3x + 1)\sqrt{2x^2 - 1} - 1 = (3x + 1)^2 + (2x^2 - 1) - (10x^2 + 8x)$ $\Leftrightarrow (3x + 1 - \sqrt{2x^2 - 1})^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1} = 2x + 2(a) \\ \sqrt{2x^2 - 1} = 4x(b) \end{cases}$	
		Giải(a) và đối chiếu ĐK có 1 nghiệm $x = \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}$	
		Giải (b) vô nghiệm. Kết luận (*) có 1 nghiệm $x = \frac{-4 + \sqrt{6}}{2}$	
	b	Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$ (I)	1,5
		Giả thiết suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Ta Có: $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$	
		Viết hai BĐT tương tự rồi cộng lại ta được: $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$	
		Ta sẽ CM: $3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz \Leftrightarrow 3(xy + yz + zx) \leq (xyz)^2 = (x + y + z)^2$	
		$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ Điều này luôn đúng	
		Dấu bằng có khi và chỉ khi $x = y = z$	
		Vậy (I) được CM, dấu bằng có khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$	

Câu 5(2,0 điểm)

a) Đặt $\tan \frac{a}{2} = t$ thì $\tan \frac{b}{2} = 4t$, do đó : $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{\tan \frac{b}{2} - \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2}} = \frac{3}{1 + 4t^2}$

Mặt khác : $\tan \frac{b-a}{2} = \frac{3 \sin a}{5-3 \cos a} = \frac{3 \frac{2t}{1+t^2}}{5-3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{3t}{1+4t^2}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{b) VT} &= \frac{1}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \sin 70^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ (dpcm)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) VT} &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x = (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x \\ &= 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 = \dots \\ &= \frac{1}{64} \cos 8x + \frac{7}{16} \cos 4x + \frac{35}{64} \end{aligned}$$

Câu 6(2,0 điểm): a) $\sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^6 x = 1$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 0 \text{ giải phương trình này ta được nghiệm } x = \frac{k\pi}{2}.$$

b) Đặt $y = 12 \cos x + 5 \sin x + 14$, ta có phương trình $y + \frac{5}{y} - 6 = 0$ giải phương trình này ta được $y = 1$ và $y = 5$. Do đó :

$$12 \cos x + 5 \sin x + \frac{5}{12 \cos x + 5 \sin x + 14} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cos x + 5 \sin x + 14 = 1 \\ 12 \cos x + 5 \sin x + 14 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \cos x + 5 \sin x = -13 & (1) \\ 12 \cos x + 5 \sin x = -9 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) và (2) ta được : $x = \alpha + \pi + k2\pi$; $x = \alpha \pm \arccos\left(-\frac{9}{13}\right) + k2\pi$ với $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

c) **ĐK:** $x \neq k \frac{\pi}{2}$; $\frac{1 + \cot 2x \cdot \tan x}{\cos^2 x} + 1 = 6(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin 2x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x} + 1 = 6 - 3 \sin^2 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 2x} = 5 - 3 \sin^2 2x \Leftrightarrow 3t^2 - 5t + 2 = 0 \text{ (} t = \sin^2 2x \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 1 \\ \sin^2 2x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x = 0 \\ \cos 4x = -\frac{1}{3} = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\alpha}{4} + k \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\alpha}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 7(1,0 điểm) $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi ta có đẳng thức $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 2$

hay $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 8(2,0 điểm)

a) Lấy $M(0;1)$ thuộc d . Khi đó $M' = T_v(M) = (-2; 2) \in d'$. Vì d' song song với d nên d' có phương trình dạng: $2x - 3y + C = 0$. Thay toạ độ M' vào pt d' ta được $C = 10$. Vậy phương trình d' : $2x - 3y + 10 = 0$.

b) Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, $R = 3$. Gọi $I' = T_v(I) = (-1; 3)$ và (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thì (C') có tâm I' bán kính $R' = 3$ có pt: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 3

Câu 1 (2 điểm)

a. Cho hàm số $y = x^2 + 2mx - 3m$ và hàm số $y = -2x + 3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm phân biệt và hoành độ của chúng đều dương.

b. Giải bất phương trình: $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > 10 - 2x$

Câu 2 (2 điểm)

a. Giải phương trình: $(4x^3 - x + 3)^3 - x^3 = \frac{3}{2}$

b. Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 23 = 4\sqrt{x+1}$

Câu 3 (2 điểm)

a. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1; 4)$. Đường thẳng d qua M , d cắt trục hoành tại A (hoành độ của A dương), d cắt trục tung tại B (tung độ của B dương). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác OAB .

b. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ và điểm $A(1; -2)$. Đường thẳng Δ qua A , Δ cắt (C) tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN .

Câu 4 (3 điểm)

a. Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

b. Tìm tất cả các tam giác ABC thỏa mãn: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (trong đó $AB = c$; $AC = b$; đường cao qua A là h_a).

Câu 5 (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3 + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$$

Câu 6 (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) \tan^2(3\pi - x) - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

Câu 7 (2,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{16}{3} \\ 2(x^2 + y^2) + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{100}{9} \end{cases}$$

Câu 8: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, phía bên ngoài của tam giác ABC dựng hai tam giác đều ABM và ACN. Tìm một phép dời hình biến đoạn thẳng MC thành đoạn BN. Từ đó suy ra $MC=BN$.

Câu 9: (2,0 điểm)

Khảo sát tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin(\pi|\sin x|)$.

Câu 10: (2.0 điểm)

Trong mp phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và điểm $A(2;-3)$, $B(3;-2)$ trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng (d): $3x - y - 8 = 0$. Tìm toạ độ điểm C.

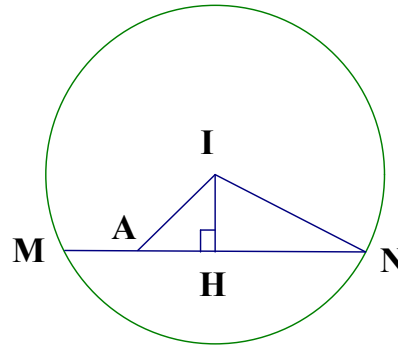
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN SỐ 03

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Tìm m: $y = x^2 + 2mx - 3m$ và $y = -2x + 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt và hoành độ dương	1,00
		Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ PT sau có hai nghiệm dương phân biệt $x^2 + 2mx - 3m = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x - 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3(m+1) > 0 \\ -2(m+1) > 0 \end{cases}$	0,25
		$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -4 \end{cases}$	0,25
		Kết hợp nghiệm, kết luận $m < -4$	0,25
	b	Giải bất phương trình: $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > 10 - 2x$	1,00
		TXĐ: $-x^2 + 8x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$	0,25
		Nếu $5 < x \leq 6$ thì $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} \geq 0 > 10 - 2x$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x: $5 < x \leq 6$	0,25
		Nếu $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{-x^2 + 8x - 12} \geq 0 \end{cases}$ bất pt đã cho $\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 > 4x^2 - 40x + 100 \Leftrightarrow 5x^2 - 48x + 112 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < \frac{28}{5}$	0,25
		Kết hợp nghiệm, trường hợp này ta có: $4 < x \leq 5$ Tập nghiệm của bpt đã cho: $(4; 6]$	0,25
2	a	Giải phương trình: $(4x^3 - x + 3)^3 - x^3 = \frac{3}{2} (1)$	1,00
		Đặt $y = 4x^3 - x + 3$. (1) có dạng: $\begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 4x^3 - x + 3 = y \end{cases} (I)$ Khi đó nghiệm của (1) là x ứng với (x;y) là nghiệm của (I)	0,25

		$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 2x^3 + 2y^3 - (x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3(2) \\ (x+y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1) = 0(3) \end{cases}$	0,25
		TH1: $y = -x$ kết hợp (2), có nghiệm của (1): $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	0,25
		TH2: $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0; \Delta'_x = 2 - 3y^2$. Nếu có nghiệm thì $ y \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Tương tự cũng có $ x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Khi đó VT (2) $\leq 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 3$. Chứng tỏ TH2 vô nghiệm. KL (1) có 1 nghiệm $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	0,25
	b	Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 23 = 4\sqrt{x+1}$	1,00
		ĐK: $x \geq -1$. (1) $\Leftrightarrow 2(x^2 - 6x + 9) + (x+1 - 4\sqrt{x+1} + 4) = 0$	0,25
3	a	$2(x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 = 0 (*)$	0,25
		Do $a^2 \geq 0 (\forall a)$ nên pt(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}-2=0 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow x=3$. Vậy pt đã cho có 1 nghiệm $x=3$	0,25
		$M(1;4)$. Đường thẳng d qua M , d cắt trục hoành tại A ; d cắt trục tung tại B . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác $OAB (x_A; y_B > 0)$	1,00
		Giải sử $A(a;0); B(0;b), a>0; b>0$. PT đường thẳng $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	0,25
		Vì AB qua M nên $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Rightarrow 1 \geq \frac{16}{ab}$	0,25
		$\Rightarrow \frac{ab}{2} \geq 8; "=" \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases}$	0,25
		Diện tích tam giác vuông OAB (vuông ở O) là $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}ab \geq 8$. Vậy S nhỏ nhất bằng 8 khi d qua $A(2;0), B(0;8)$	0,25
		b (C): $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$; $A(1;-2)$. Δ qua A , Δ cắt (C) tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN .	1,0
		(C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=3$. Có A nằm trong đường tròn (C) vì $IA^2 = (1-2)^2 + (-2+3)^2 = 2 < 9$	0,25
		Kẻ IH vuông góc với MN tại H ta có $IH^2 + HN^2 = IN^2 = 9 \Rightarrow MN^2 = 4HN^2 = 4(9 - IH^2)$	0,25
		Mà $IH \perp AH \Rightarrow IH \leq IA = \sqrt{2} \Rightarrow MN^2 \geq 4(9 - 2) = 28 \Rightarrow MN \geq 2\sqrt{7}$	0,25
		Vậy MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{7}$ khi H trùng A hay MN vuông góc với IA tại A	0,25
	a	Chứng minh rằng tứ giác lồi $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$	1,5

		Tứ giác lồi ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$	0,25
		$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow AB^2 + DC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow AB^2 + DC^2 - (AB^2 + AC^2 - BC^2) + (AB^2 + AD^2 - BD^2) = 0 (*)$	0,25
		(vì $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \Rightarrow 2\vec{a}\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2$)	0,25
		(*) $\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ (Đpcm) (Chú ý: nếu chỉ làm được 1 chiều thì cho 0,75 đ)	0,25
4	b	Tìm tất cả các tam giác ABC thỏa mãn: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (1)	1,5
		Có $a.h_a = 2S = bc \sin A$	0,25
		$\Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2 \sin^2 A} = \frac{4R^2}{b^2 c^2}$	0,25
		(1) $\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4R^2 \Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C = 1$	0,25
		$\Leftrightarrow 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C = 2 \Leftrightarrow \cos 2B + \cos 2C = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow 2\cos(B+C)\cos(B-C) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C = \frac{\pi}{2} \text{ hay } A = \frac{\pi}{2} \\ B-C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (0 < B+C < \pi; 0 \leq B-C < \pi)$ Vậy tam giác ABC vuông ở A hoặc có $ B-C = \frac{\pi}{2}$	0,25
5		CMR: $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3 + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}; a, b, c > 0$	1,00
		Xét $M = \frac{2a}{b+c} - 1 + \frac{2b}{c+a} - 1 + \frac{2c}{a+b} - 1 = \frac{a-b+a-c}{b+c} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{a+b}$	0,25
		$= (a-b)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) + (b-c)\left(\frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b}\right) + (c-a)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c}\right)$	
		$= (a-b)^2 \frac{1}{(b+c)(c+a)} + (b-c)^2 \frac{1}{(c+a)(a+b)} + (c-a)^2 \frac{1}{(a+b)(b+c)}$	0,25
		Vì $\frac{1}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{4}{(a+b+2c)^2} > \frac{4}{(2a+2b+2c)^2} = \frac{1}{(a+b+c)^2};$	
		$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \frac{1}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}; "=" \Leftrightarrow a=b$	0,25
		Làm hoàn toàn tương tự với hai biểu thức còn lại Suy ra $M \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a+b+c)^2}$ (Đpcm); " $=$ " $\Leftrightarrow a=b=c$	0,25

Hình vẽ câu 3b:



Câu 6 2,0 đ	Đ/k: $\cos x \neq 0$. Pt đã cho $\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} (1 + \cos x) = 0$ $\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & \text{loại} \\ \cos x = -1 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$
Câu 7 2,0 điểm	ĐK: $x \neq \pm y$ Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x + y + x - y + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{16}{3} \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} = \frac{100}{9} \end{cases}$ Đặt $a = x + y + \frac{1}{x+y}$; $b = x - y + \frac{1}{x-y}$ ($a , b \geq 2$) Ta có: $\begin{cases} a + b = \frac{16}{3} \\ a^2 - 2 + b^2 - 2 = \frac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{10}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{10}{3} \\ b = 2 \end{cases}$ Từ đó suy ra hệ phương trình có bốn nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$
Câu 8 2,0 điểm	Qua phép quay $Q_{(A; 60^\circ)}$ thì điểm M biến thành B; điểm C biến thành điểm N. Do đó, qua phép quay $Q_{(A; 60^\circ)}$ thì đoạn MC biến thành đoạn BN. Vậy MC=BN

Câu 9 2,0 điểm	Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin(\pi \sin x)$ là $D = \mathbb{R}$ (đối xứng qua 0) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$. Vậy, f chẵn (f không lẻ vì nó không đồng nhất bằng 0) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$. Vậy, f tuần hoàn Tập giá trị của hàm số $t = \pi \sin x$ là $[0; \pi]$ nên $\min_{0 \leq t \leq \pi} f = \min_{0 \leq t \leq \pi} \sin t = 0, \quad \max_{0 \leq t \leq \pi} f = \max_{0 \leq t \leq \pi} \sin t = 1$
Câu 10 2,0 điểm	* Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) \Rightarrow d(C, AB) = \frac{2S_{ABC}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (1) * Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$ $\Rightarrow$ vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AB} = (-1; 1) \Rightarrow AB: x - y - 5 = 0$ Gọi điểm $G(x_G, y_G)$ thì $C(3x_G - 5; 3y_G + 5)$ $\text{Ta có } \frac{ 3x_G - 5 - 3y_G - 5 - 5 }{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{Ta có } \begin{cases} 3x_G - y_G = 8 \\ 3x_G - 3y_G - 15 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = -5 \\ x_G = 2 \\ y_G = -2 \end{cases}$ Vậy có hai điểm thỏa mãn $C_1(1; -1), C_2(-2; -10)$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 4

Câu 1. (4,0 điểm). Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là $x_1; x_2$.

- 1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.
- 2) Chứng minh rằng $|x_1^3 - x_2^3| \geq 2 (\forall k \in \mathbb{R})$

Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$

Câu 3. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1 \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A là điểm $D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $I\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Viết phương trình của đường thẳng BC .

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $BC = a; CA = b; BA = c$ ($b \neq c$) và diện tích là S . Kí hiệu $m_a; m_b; m_c$ lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C . Biết rằng $2m_a^2 \geq m_b^2 + m_c^2$.

- a) Chứng minh rằng $a^2 \leq 4S \cdot \cot A$
- b) Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC ; M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng góc $\angle MGO$ không nhọn.

Câu 6.(2,0 điểm). Cho $a; b; c$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức $M = \frac{1}{a^2 + b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 3}$.

Câu 6.(2.0 điểm) Giải phương trình $\sqrt{\cos x} + \cos^2 x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$

Câu 7. (2,0 điểm) Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases} 2(x^3 - ay^3) = (a+1)^2 \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm và mọi nghiệm của

nó thỏa mãn x, y là hai số đối nhau.

Câu 8. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Đề các vuông góc Oxy cho tam giác ABC, biết B(-3; 0); C(3; 0). Điểm A di động sao cho tam giác ABC thỏa mãn độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A tới BC bằng 3 lần bán kính đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A thay đổi thì điểm I thuộc một đường cong cố định.

Câu 9. (2,0 điểm) Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \cos A + \cos B + \cos C + \frac{4}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$



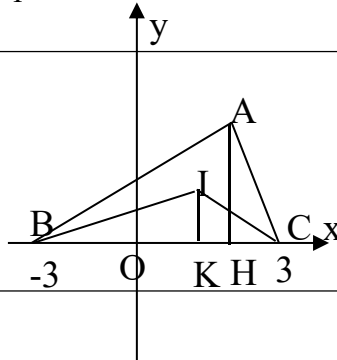
HƯỚNG DẪN ĐỀ SỐ 04

Câu	Nội dung	Điểm
I	Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là $x_1; x_2$.	2,0
	1) Tìm k để trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.	
	+ Đường thẳng (d) có pt: $y = kx - 1$	0,5
	+ PT tương giao (d) và (P): $-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0(*)$	0,5
	+ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ vì $\Delta = k^2 + 4 > 0 (\forall k)$	0,5
	+ Trung điểm M của AB có hoành độ là $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-k}{2}$; M nằm trên trục tung $\Leftrightarrow \frac{-k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 0$	0,5
	2) Chứng minh rằng $ x_1^3 - x_2^3 \geq 2 (\forall k \in R)$	2,0
	Theo Vi et có: $x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = -1$	0,5
	Ta có: $ x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = x_1 - x_2 \cdot (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 $	0,5
	Có $ x_1 - x_2 ^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4$	0,5

	$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = \sqrt{k^2 + 4}(k^2 + 1) \geq 2, \forall k \in R$. Đẳng thức xảy ra khi $k = 0$	0,5
2	Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = 3x^2 - x + 3$ (1)	2,0
3	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-1) + (\sqrt{5x+4}-2) = 3x^2 - x \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} \cdot \frac{5x}{\sqrt{5x+4}+2} = x(3x-1)$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0(TM) \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{5}{\sqrt{5x+4}+2} = 3x-1 (*) \end{cases}$	0,25
	Với $x=1$: VT(*) = 2 = VP(*) nên $x=1$ là một nghiệm của (*)	0,25
	Nếu $x>1$ thì VT(*) < 2 < VP(*)	0,25
	Nếu $x<1$ thì VT(*) > 2 > VP(*). Vậy (1) có 2 nghiệm $x=0$; $x=1$	0,25
	2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1(1) \\ x^4 + y^2 - xy(2x-1) = 1(2) \end{cases} (*)$	1,5
	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y) + xy(x^2 - y) + xy = 1 \\ (x^2 - y)^2 + xy = 1 \end{cases}$	0,25
	Đặt $\begin{cases} a = x^2 - y \\ b = xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a + ab + b = 1 \\ a^2 + b = 1 \end{cases} (*)$	0,25
	Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 2a = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 + a - 2) = 0 \\ b = 1 - a^2 \end{cases}$ Từ đó tìm ra $(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}$	0,25
	Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.	0,25
	Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0)$.	0,25
	Với $(a; b) = (-2; -3)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; y = 3$. Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}$.	0,25
4	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 6)$, chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A là điểm $D\left(2; -\frac{3}{2}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm $I\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. Viết phương trình	2,0

	của đường thẳng BC .	
	Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính IA	0,5
	Đường thẳng AD đi qua A và có VTCP $\overrightarrow{AD}\left(0; -\frac{15}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}(1; 0)$ là véc tơ pháp tuyến của AD PT đường thẳng AD là: $x = 2$	0,5
	$A' = AD \cap (C); A' \neq A \Rightarrow A'$ thuộc AD và $IA' = IA$, Tìm được $A'(2; -4)$	0,5
	A' là trung điểm cung $\widehat{BC}$ không chứa A nên $IA' \perp BC$	0,5
	đường thẳng BC đi qua D và có $\overrightarrow{A'I} = \left(-\frac{5}{2}; 5\right)$ là vectơ pháp tuyến	0,5
	Từ đó viết được pt đường thẳng BC là: $x - 2y - 5 = 0$	0,5
	Câu 5. Cho tam giác ABC có $BC = a; CA = b; BA = c$ ($b \neq c$) và diện tích là S . Kí hiệu $m_a; m_b; m_c$ lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C . Biết rằng $2m_a^2 \geq m_b^2 + m_c^2$ (*) a) Chứng minh rằng $a^2 \leq 4S \cdot \cot A$	2,0
	Viết được công thức các trung tuyến	0,25
	$(*) \Leftrightarrow b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \geq \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$	0,25
	$\Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2a^2$ (**)	0,25
	Ta có $4S \cdot \cot A = 2bc \cdot \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$	0,25
	Từ (**) $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 \geq a^2$ Hay $4S \cdot \cot A \geq a^2$	0,25
	2b) Gọi O và G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC ; M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng góc $\angle MGO$ không nhọn.	1,0
	Ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GO} \cdot \overrightarrow{GM} \geq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GM} \leq 0$	0.25
	Ta có $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $6\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}$ $\Rightarrow 3\overrightarrow{OG} \cdot 6\overrightarrow{GM} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA})$ $= OB^2 + OC^2 - 2OA^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	0.25
	* Mặt khác ta có $BC^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = OB^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \Rightarrow 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$ (trong đó $R = OA = OB = OC$). Tương tự có $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2R^2 - b^2$; $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$.	0.25
	Vậy $18 \cdot \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GM} = \frac{b^2 + c^2}{2} - a^2 \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GM} \geq 0$ (do có (**))	0.25
6	Cho $a; b; c$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $a + b + c = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của	2,0

	biểu thức $M = \frac{1}{a^2 + b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 3}$.	
	* Bđt phụ: Cho các số thực $x, y, z > 0$, a, b, c là các số thực bất kì. Khi đó $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*)$ Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. + Để thấy bđt trên suy ra từ bđt Bunhia * Vào bài chính Ta sẽ chứng minh $M = \frac{1}{a^2 + b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$. $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{a^2 + b^2 + 3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{b^2 + c^2 + 3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{c^2 + a^2 + 3}\right) \geq \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow P = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 3} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 3} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 3} \geq \frac{3}{2}$	0,5
	Giả sử $a \geq b \geq c$. Biến đổi $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 3} = \frac{(a+b)^2}{2(a^2 + b^2 + 3)} + \frac{(a-b)^2}{2(a^2 + b^2 + 3)}$. Biến đổi tương tự với 2 số hạng còn lại của P. Sau đó áp dụng bđt (*) ta có: $P \geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{4(a^2 + b^2 + c^2) + 18} + \frac{(a-b+b-c+a-c)^2}{4(a^2 + b^2 + c^2) + 18}$ $\Leftrightarrow P \geq \frac{4(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2}{4(a^2 + b^2 + c^2) + 18} \Leftrightarrow P \geq \frac{2(a+b+c)^2 + 2(a-c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 9}$	0,5
	Ta sẽ chứng minh $\frac{2(a+b+c)^2 + 2(a-c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 9} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) + 27$	
	$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^2 + 4(a-c)^2 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a+b+c)^2$ $\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2 + 2(a-c)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2$ $\Leftrightarrow -b^2 + ab + bc - ca \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-c) \geq 0$ Bđt cuối cùng đúng, suy ra đpcm.	0,5
7 2đ	Đ/K $\cos x \geq 0$ Phương trình tương đương với $\sqrt{\cos x} + \cos x = 1 - \cos^2 x + \sin x$ $\Leftrightarrow \sqrt{\cos x} + \cos x + \frac{1}{4} = \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\cos x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos x} + \frac{1}{2} = \sin x + \frac{1}{2} \\ \sqrt{\cos x} + \frac{1}{2} = -\sin x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\cos x} = \sin x & (1) \\ \sqrt{\cos x} + 1 = -\sin x & (2) \end{cases}$	0.5
	Giải (1) được nghiệm $x = \alpha + k2\pi$ với $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	0.50

	Giải (2) được nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \alpha + k2\pi$ với $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	0.5
8 2đ	Giả sử a thỏa mãn điều kiện bài toán và $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ đã cho, ta có $\begin{cases} 2(x_0^3 - ay_0^3) = (a+1)^2 & (1) \\ x_0^3 + ax_0^2y_0 + x_0y_0^2 = 1 & (2) \\ x_0 + y_0 = 0 & (3) \end{cases}$	0.25
	Từ (3) suy ra $y_0 = -x_0$ thay vào (1) và (2) ta được $\begin{cases} x_0^3(a+1) = \frac{1}{2}(a+1)^2 & (4) \\ x_0^3(2-a) = 1 & (5) \end{cases}$	0.25
	Từ (5) ta thấy $x_0 \neq 0; a \neq 2$ chia các vế của (4) cho (5) ta được: $\frac{a+1}{2-a} = \frac{1}{2}(a+1)^2$	0.25
	$\Leftrightarrow a = 0; a = -1; a = 1$	0.25
	+, a=0 hệ trở thành $\begin{cases} x^3 = \frac{1}{2} \\ x^3 + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ (loại) và $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$ Suy ra a = 0 (loại)	0.25
	+, a = -1 ta có hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$ thỏa mãn $x + y = 0$	0.25
	+, a = 1 ta có hệ: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 2 & (6) \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1 & (7) \end{cases}$ Nhân hai vế của (7) với 2 rồi trừ đi các vế tương ứng của (6) ta được: $(x+y)(x^2 + y^2 + xy) = 0$ (8)	0.25
	Từ (7) suy ra $x \neq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy = (y + \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2 > 0$ do đó từ (8) suy ra $x + y = 0$ Thay $y = -x$ vào (6) ta dễ dàng thấy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ thỏa mãn $x + y = 0$ Kết luận: $a = -1; a = 1$	0.25
8 2đ	Kẻ $AH \perp BC, IK \perp BC$, đặt $AH = h$, bán kính đường tròn nội tiếp là r và $I(x; y)$. 	0.25
	Có $h = 3r, S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2}BC.h \Leftrightarrow (AB + BC + CA)r = 3BC.r$	0.5

$\Leftrightarrow AB + CA = 2BC \Leftrightarrow \sin C + \sin B = 2\sin A \Leftrightarrow \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} = 3 \quad (*)$	0.5						
Mà $\cot \frac{B}{2} = \frac{BK}{IK}, \cot \frac{C}{2} = \frac{CK}{IK}$ Từ (*) suy ra $BK \cdot CK = 3IK^2 \quad (**)$	0.25						
Do I là tâm đường tròn nội tiếp suy ra $K \in BC$ nên $BK \cdot CK = (3+x)(3-x), IK^2 = y^2$	0.25						
Thay vào (**) ta có $x^2 + 3y^2 = 9$. Suy ra I thuộc elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$	0.25						
Chứng minh được $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1$	0.5						
Chứng minh được $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (1)$ Như vậy $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. Theo (1) ta có $0 < t \leq \frac{1}{8}$	0.5						
Xét $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{8}$ $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$	0.5						
Ta có BBT: t $f'(t)$ $f(t)$ <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\frac{1}{8}$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">$+$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$-$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">$+\infty$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$65/8$</td> </tr> </table> Suy ra $\min T = \frac{67}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều	0	$\frac{1}{8}$	$+$	$-$	$+\infty$	$65/8$	0.5
0	$\frac{1}{8}$						
$+$	$-$						
$+\infty$	$65/8$						

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 5

Câu 1.(3.0 điểm)

1) Xác định tính chẵn - lẻ của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} - \frac{x}{\sqrt{10+x}}$.

2) Cho các nửa khoảng $A = (a; a+1]$, $B = [b; b+2)$. Đặt $C = A \cup B$. Với điều kiện nào của các số thực a và b thì C là một đoạn? Tính độ dài của đoạn C khi đó.

Câu 2. (2,0 điểm) Tìm m để phương trình $|x^2 - 1| = m^4 - m^2 + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải và biện luận (theo tham số m) bất phương trình: $\frac{(m-1)x+2}{x-2} < m+1$.

Câu 4. (2,0 điểm) Giải phương trình $x^2 - 7x + 8 = 2\sqrt{x}$.

Câu 5. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ x-y + \sqrt{2x+y} = 1. \end{cases}$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC . Trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác đó, lần lượt lấy các điểm A', B' và C' . Gọi S_a, S_b, S_c và S tương ứng là diện tích của các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ và ABC . Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b} + \sqrt{S_c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Câu 8. (2,0 điểm) (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0, R$ không đổi). Gọi A và B lần lượt là các điểm di động trên trục hoành và trục tung sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn đó. Hãy xác định tọa độ của các điểm A, B để tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Câu 9. (2.0 điểm) Giải phương trình: $\sin 4x + \cos 4x = 4\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$. ($x \in \mathbb{R}$)

Câu 10. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^2 + 3} + \frac{b^3}{c^2 + 3} + \frac{c^3}{a^2 + 3} \geq \frac{3}{4}$.



---HẾT---

Câu	HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 05	Điểm
I	1) Xác định tính chẵn - lẻ của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} - \frac{x}{\sqrt{10+x}}$.	3.0
	2) Cho các nửa khoảng $A = (a; a+1]$, $B = [b; b+2)$. Đặt $C = A \cup B$. Với điều kiện nào của các số thực a và b thì C là một đoạn? Tính độ dài của đoạn C khi đó.	
1	Hàm số y có tập xác định $D = (-10; 10)$ là tập đối xứng qua điểm $x = 0$.	1.5
	Kiểm tra: $\forall x \in D, f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ chẵn	
	f không lẻ (vì nó không đồng nhất bằng 0 trên D), kết luận	
2	$C = [b; b+2) \cup (a; a+1]$ là một đoạn $\Leftrightarrow b \leq a < b+2 \leq a+1$	1.5
	$\Leftrightarrow b+1 \leq a < b+2$. (*)	
	Khi đó, $C = [b; b+2) \cup (a; a+1] = [b; a+1]$ là đoạn có độ dài $a-b+1$.	
Câu	Câu 2: Tìm m để phương trình $ x^2 - 1 = m^4 - m^2 + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.	4,0 đ

	Câu 3: Giải và biện luận (theo tham số m) bất phương trình: $\frac{(m-1)x+2}{x-2} < m+1$.	
2	Ta có: $m^4 - m^2 + 1 > 0$ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = m^4 - m^2 + 2 & (1) \\ x^2 = m^2 - m^4 = m^2(1 - m^2) & (2) \end{cases}$ (1) có 2 nghiệm phân biệt với mọi m vì $m^4 - m^2 + 2 > 0$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$ và $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ PT có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ và $m^4 - m^2 + 2 \neq m^2 - m^4$ $\Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \{0\}$ và $m^4 - m^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 1) \setminus \{0\}$, kết luận	2
3	BPT $\Leftrightarrow \frac{(m+1)(x-2) + (1-m)x - 2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - (m+2)}{x-2} > 0$ Nếu $m = 0$ thì BPT nghiệm đúng với mọi $x \neq 2$ Nếu $m > 0$ thì $m + 2 > 2$ nên BPT nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 2) \cup (m+2; +\infty)$ Nếu $m < 0$ thì $m + 2 < 2$ nên BPT nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; m+2) \cup (2; +\infty)$	2
Câu	Câu 4: Giải phương trình $x^2 - 7x + 8 = 2\sqrt{x}$. Câu 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ x - y + \sqrt{2x+y} = 1. \end{cases}$	4
4	Điều kiện: $x \geq 0$ PT $\Leftrightarrow x^2 - 1 - 7x + 7 + 2 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + x - 6\sqrt{x} - 8) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 8 + x - 6\sqrt{x} - 16) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4 + \sqrt{x} - 8) = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)(x - \sqrt{x} - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ x - \sqrt{x} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Kết luận	2
5	Điều kiện $\begin{cases} 7x + y \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$; Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{7x+y} \geq 0 \\ v = \sqrt{2x+y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 7x+y \\ v^2 = 2x+y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{u^2 - v^2}{5}$ và $y = \frac{7v^2 - 2u^2}{5}$ HPT trở thành: $\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 - v^2 - 7v^2 + 2u^2 + 5v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ 3u^2 - 8v^2 + 5v - 5 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ 3(5 - v)^2 - 8v^2 + 5v - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ -5v^2 - 25v + 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ v^2 + 5v - 14 = 0 (*) \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow v = 2$ (nhận) hoặc $v = -7$ (loại); nên HPT trên $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$ Do đó HPT đã cho trở thành $\begin{cases} 7x + y = 9 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ (phù hợp)	2
Câu	Câu 6: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi	4

	$\vec{MC} = -2\vec{MB}$ và $\vec{NB} = -2\vec{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau. Câu 7 : Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác đó, lần lượt lấy các điểm A', B' và C'. Gọi S_a, S_b, S_c và S tương ứng là diện tích của các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ và ABC. Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b} + \sqrt{S_c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?	
6	Ta có: $\vec{MC} = -2\vec{MB} \Leftrightarrow \vec{AC} - \vec{AM} = -2(\vec{AB} - \vec{AM}) \Leftrightarrow 3\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ Tương tự ta cũng có: $3\vec{CN} = 2\vec{CA} + \vec{CB}$ Vậy: $AM \perp CN \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\vec{AB} + \vec{AC})(2\vec{CA} + \vec{CB}) = 0$ $\Leftrightarrow (2\vec{AB} + \vec{AC})(\vec{AB} - 3\vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ $\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$	2
7	Ta có các công thức tính diện tích: $2S_a = AC' \cdot AB' \sin A$; $2S = AB \cdot AC \sin A$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{S_a}{S}} = \sqrt{\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{AB'}{AC}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AC'}{AB} + \frac{AB'}{AC} \right)$ (BDT Cauchy) Tương tự ta cũng có: $\sqrt{\frac{S_b}{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{BA'}{BC} + \frac{BC'}{BA} \right)$ và $\sqrt{\frac{S_c}{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{CB'}{CA} + \frac{CA'}{CB} \right)$ Do đó: $\sqrt{\frac{S_a}{S}} + \sqrt{\frac{S_b}{S}} + \sqrt{\frac{S_c}{S}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{AC'}{AB} + \frac{BC'}{BA} + \frac{BA'}{BC} + \frac{CA'}{CB} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AB'}{AC} \right) = \frac{3}{2}$ (đpcm) Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC} \\ \frac{BA'}{BC} = \frac{BC'}{BA} \\ \frac{CB'}{CA} = \frac{CA'}{CB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C'B' \parallel BC \\ A'C' \parallel CA \\ B'A' \parallel AB \end{cases} \Leftrightarrow A', B', C' \text{ là trung điểm của } BC, CA, AB$	2
8	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$, R không đổi). Gọi A và B lần lượt là các điểm di động trên trục hoành và trục tung sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn đó. Hãy xác định tọa độ của các điểm A, B để tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.	2,0
	Dựa vào tính đối xứng, ta giả sử $A(a; 0), B(0; b)$ với $a > 0, b > 0$. (*) Suy ra $S_{OAB} = \frac{ab}{2}$. Mà $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2}$ (**) $\Rightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \Rightarrow a^2 b^2 = R^2 (a^2 + b^2) \geq 2R^2 ab$ $\Rightarrow S_{OAB} = \frac{ab}{2} \geq R^2$ không đổi (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$) Kết hợp với (*) và (**): dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = R\sqrt{2}$ Kết luận: $A(\pm R\sqrt{2}; 0); B(0; \pm R\sqrt{2})$ (4 cặp điểm)	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
9	2. PT $\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 4(\sin x + \cos x)$ $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x) = 2(\sin x + \cos x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ (\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x) = 2 \end{cases}$	2,0

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cos 3x - \sin x = 2 \end{cases}$	
	Chứng minh được phương trình $\cos 3x - \sin x = 2$ vô nghiệm KL: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	
10	$\frac{a^3}{b^2+3} + \frac{b^3}{c^2+3} + \frac{c^3}{a^2+3} \geq \frac{3}{4}$ (***) Do $ab + bc + ca = 3$ nên VT (***) = $\frac{a^3}{b^2+ab+bc+ca} + \frac{b^3}{c^2+ab+bc+ca} + \frac{c^3}{a^2+ab+bc+ca}$ = $\frac{a^3}{(b+c)(a+b)} + \frac{b^3}{(c+a)(b+c)} + \frac{c^3}{(a+b)(c+a)}$ Theo BĐT AM-GM ta có $\frac{a^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{a+b}{8} \geq \frac{3a}{4} \Rightarrow \frac{a^3}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{5a-2b-c}{8}$ (1)	0,5
	Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $\frac{b^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{5b-2c-a}{8}$ (2), $\frac{c^3}{(a+b)(c+a)} \geq \frac{5c-2a-b}{8}$ (3) Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được $VT(***) \geq \frac{a+b+c}{4}$ Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} = 3$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ (Đpcm)	0,5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 6

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$, trong đó x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $4a + c \geq 2b$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x-2} - \sqrt{3x} = 1 - \sqrt{2x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$)

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+3} = -x^2+2x+8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

2. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{3-x} \geq 1 - \sqrt{x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Câu 4 (3,0 điểm)

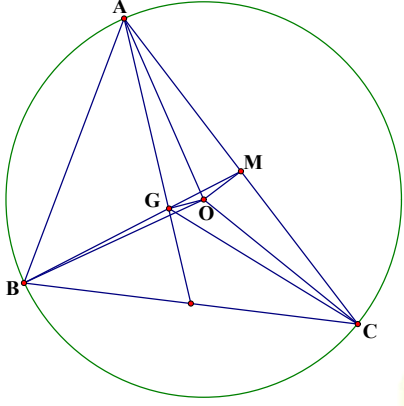
1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) , trọng tâm G và $a = BC, b = CA, c = AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh rằng nếu bốn điểm A, O, M, G cùng nằm trên một đường tròn thì $b^2 + c^2 = 2a^2$.
2. Cho tam giác ABC không vuông và $a = BC, b = CA, c = AB$. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan B = 2 \tan C$ thì ABC là một tam giác cân.
3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy ; cho tam giác ABC có tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm lần lượt có tọa độ là $I(4;0), G\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC biết rằng đỉnh B nằm trên đường thẳng $(d): 2x + y - 1 = 0$ và điểm $M(4;2)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC .

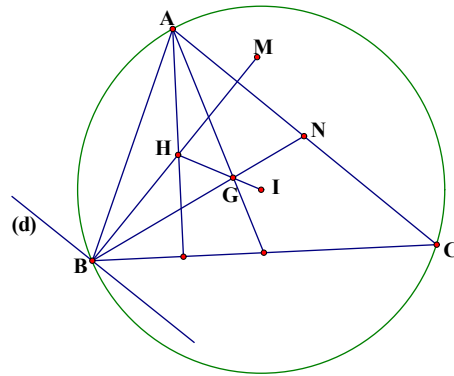
Câu 5;(1,0 điểm) Giải phương trình:
$$\frac{\sqrt{2}(\sin x - \cos x)^2(1 + 2\sin 2x)}{\sin 3x + \sin 5x} = 1 - \tan x.$$

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM ĐỀ 06

Câu	Nội dung trình bày	Điểm										
1	(3,0 điểm)											
	1a (2,0 điểm)											
	Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Delta' = m^2 - 3m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq 1 \end{cases}$	0,5										
	Theo định lí Vi – ét ta có $x_1 + x_2 = 2m, x_1x_2 = 3m - 2$	0,25										
	Do đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2(3m - 2) = 4m^2 - 6m + 4$	0,5										
	Lập bảng biến thiên của hàm số $f(m) = 4m^2 - 6m + 4$ trên $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ ta được <table><tr><td>m</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(m)</td><td>$+\infty$</td><td>2</td><td>8</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	m	$-\infty$	1	2	$+\infty$	f(m)	$+\infty$	2	8	$+\infty$	0,75
m	$-\infty$	1	2	$+\infty$								
f(m)	$+\infty$	2	8	$+\infty$								
	Từ bảng biến thiên ta được $f(m) = 4m^2 - 6m + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = 1$.											
	1b (1,0 điểm)											

	Do $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $f(0) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$. Mặt khác $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 \leq 4ac \end{cases}$	0,5
	Ta có $4a + c \geq 2\sqrt{4ac} \geq 2\sqrt{b^2} = 2 b \geq 2b$.	0,5
2	(2,0 điểm)	
	2a (1,0 điểm)	
	Đkxđ $\begin{cases} 3x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$ Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow x-2 + 2x+3 + 2\sqrt{(x-2)(2x+3)} = 3x+1 + 2\sqrt{3x}$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(2x+3)} = \sqrt{3x}$ $\Leftrightarrow (x-2)(2x+3) = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp với đkxđ ta được $x = 3$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.	0,25
	2b (1,0 điểm)	
	Đkxđ: $x \geq -6, y \geq -3$ Từ phương trình đầu của hệ ta có: $(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2$ $\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y) = 3x^2 + 3y^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3x^2 + 3y^2 + 2$ $\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2 \Rightarrow x \geq -1$	0,5
	Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = -x^2 + 2x + 8 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 3 + \sqrt{x+1} - 2 + x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + x+1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ So sánh với đkxđ ta được $(x, y) = (3, 1)$.	0,5
3	(2,0 điểm)	
	3a (1,0 điểm)	
	Ta có $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow 4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) \geq 3(a+1)(b+1)(c+1)$	0,25
	$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) \geq 3abc + 3 + 3(ab+bc+ca) + 3(a+b+c)$ $\Leftrightarrow ab+bc+ca + a+b+c \geq 6$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô Si cho ba số dương ta được: $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3$ $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$	0,25
	Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca + a+b+c \geq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. Vậy bất được chứng minh.	0,25
	3b (1,0 điểm)	

	Đkxđ $x \geq 2$. Đặt $t = \sqrt{x-2}$, $t \geq 0$ suy ra $x = t^2 + 2$, thay vào bất phương trình ta được:	0,25
	$\sqrt[3]{1-t^2} \geq 1-t \Leftrightarrow 1-t^2 \geq (1-t)^3$ $\sqrt[3]{1-t^2} \geq 1-t \Leftrightarrow 1-t^2 \geq (1-t)^3 \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + 3t \geq 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t-3) \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} \geq 3 \\ 0 \leq \sqrt{x-2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 11 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp với đkxđ ta được tập nghiệm là $S = [2; 3] \cup [11; +\infty)$.	0,25
4	(3,0 điểm)	
	4a (1,0 điểm)	
		
	Ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG} \Rightarrow 9.OG^2 = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2$ $= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\vec{OA}.\vec{OB} + 2\vec{OB}.\vec{OC} + 2\vec{OC}.\vec{OA}$ $= 3R^2 + OA^2 + OB^2 - AB^2 + OB^2 + OC^2 - BC^2 + OC^2 + OA^2 - CA^2$ $= 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$. Do 4 điểm A, G, O, M cùng nằm trên một đường tròn nên OG vuông góc với GA hay $OG^2 + GA^2 = OA^2 \Leftrightarrow \frac{1}{9}(9R^2 - a^2 - b^2 - c^2) + \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = R^2$ $\Leftrightarrow 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 9R^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$	0,25
	4b (1,0 điểm)	
	Ta có $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{2S}{bc}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}$. Tương tự ta tính được $\tan B$, $\tan C$	0,5
	Theo giả thiết $\tan A + \tan B = 2 \tan C \Leftrightarrow \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{4S}{c^2 + a^2 - b^2} = 2 \frac{4S}{a^2 + b^2 - c^2}$ $\Leftrightarrow a^4 - (b^2 - c^2)^2 + b^4 - (c^2 - a^2)^2 = 2(c^4 - (a^2 - b^2)^2)$ $\Leftrightarrow a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + b^4 - c^4 - a^4 + 2c^2a^2 = 2c^4 - 2a^4 - 2b^4 + 4a^2b^2$ $\Leftrightarrow 2c^4 - (a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2c^4 - (a^2 - b^2)^2 = 2c^4 \Leftrightarrow a = b$. Hay tam giác ABC cân	0,25
	4c (1,0 điểm)	



Ta chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$

0,25

Suy ra $H(3;1) \Rightarrow pt MH: \frac{x-4}{3-4} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow x-y-2=0$.

Do B là giao của (d) và đường thẳng MH nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(1;-1).$$

0,25

Gọi N là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Rightarrow N(5;1)$

Ta có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{u_{MN}} = (1;1) \Rightarrow pt AC: 1(x-5)+1.(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$.

Do A thuộc đường thẳng AC nên $A(t;6-t)$, kết hợp với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

0,25

$$ABC \text{ nên } IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (t-4)^2 + (6-t)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=7 \end{cases}$$

+) Với $t=3 \Rightarrow A(3;3), C(7;-1)$

+) Với $t=7 \Rightarrow A(7;-1), C(3;3)$

Vậy $A(3;3), B(1;-1), C(7;-1)$ hoặc $A(7;-1), B(1;-1), C(3;3)$

0,25

Câu 5

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin 3x + \sin 5x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 (*)$$

0.5

$$\text{Biến đổi được (1)} \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 (1 + 2 \sin 2x) = \sqrt{2} \sin 4x (\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 (2) \\ (\cos x - \sin x)(1 + 2 \sin 2x) = \sqrt{2} \sin 4x (3) \end{cases}$$

0.5

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (Loại)}$$

0.5

$$(3) \Leftrightarrow \cos x - \sin x + \sin 3x + \sin x + \cos 3x - \cos x = \sqrt{2} \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

0.5

Kết hợp với điều kiện (*) ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{k2\pi}{7} \ (k \neq 7m - 3, k, m \in \mathbb{Z})$

0.5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 7

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^4-1}$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + y = 3 - xy \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases}$$
.

3. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-x-12} < 7-x$.

Câu 2. (2 điểm) Cho phương trình: $x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) = 0$.

Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

Khi đó tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Câu 3. (1,0 điểm) Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1.$$

Câu 4. (1 điểm)

Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính các góc của tam giác ABC .

Câu 5. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có

$B(-2;1); C(1;-3)$ trung điểm I của cạnh AC thuộc đường thẳng $(d): 2x + y = 0$. Xác định tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 3.

Câu 6. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A lần lượt là: $x - 2y - 13 = 0$ và $13x - 6y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(-5;1)$.

Câu 7. (2,0 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in [1;2]$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 27$.

-----Hết-----

Câu	 Đáp án Thư viện Đề thi - Trắc nghiệm - Tài liệu học tập miễn phí	Điểm
I	1. (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^4-1}$. 2,0	
	ĐKXD: $x \geq 1$	
	Đặt $\sqrt{x-1} = a (a \geq 0)$; $\sqrt{x^3+x^2+x+1} = b (b > 0) \Rightarrow ab = \sqrt{x^4-1}$ Phương trình đã cho trở thành: $a + b = 1 + ab \Leftrightarrow (a-1)(1-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$	
	Với $a = 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (t/m ĐKXD)	
	Với $b = 1 \Rightarrow \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow x(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại)	
	KL: $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.	
	2. (1 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + y = 3 - xy(1) \\ xy + x + 2y = 1(2) \end{cases}$. 2,0	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + y + xy = 3 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y - 4 = 0$	
	$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 3(x+y) - 4 = 0 \Leftrightarrow x+y = 1$ hoặc $x+y = -4$	
	Với $x+y = 1 \Rightarrow x = 1-y$. Thay vào (2) ta được $-y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$	
	Với $x+y = -4 \Rightarrow x = -4-y$. Thay vào (2) ta được $y^2 + 3y + 5 = 0$ (VN) KL: Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : (1;0) và (-1;2)	
	1. (1 điểm) Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-x-12} < 7-x$	1.0

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 7

	$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \\ x^2 - x - 12 < (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0 \\ 7 - x > 0 \\ 13x - 61 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 4 \\ x < 7 \\ x < \frac{61}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 4 \leq x < \frac{61}{13} \end{cases}$ KL: Bất phương trình đã cho có tập nghiệm $T = (-\infty; -3] \cup [4; \frac{61}{13})$	
2	Cho phương trình $x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) = 0$ (1) Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Khi đó tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. 2,0	
	$(1) \Leftrightarrow (x-2)[x^2 - (m-1)x - m(2m-1)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - (m-1)x - m(2m-1) = 0 (*) \end{cases}$ Đặt: $f(x) = x^2 - (m-1)x - m(2m-1)$ Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{3} \\ m \neq -2 \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$ Đặt $x_3 = 2 \Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm pt(*). Ta có: $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 4 = 5m^2 - 4m + 5 = 5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{21}{5} \geq \frac{21}{5}$ Vậy $\min S = \frac{21}{5}$ đạt được khi $m = \frac{2}{5}$ (t/m)	
	Câu 3(1điểm) Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (m-4)x^2 + (m+1)x + 2m-1$	
3	Nếu $m = 4$ thì $f(x) = 5x + 7$ $f(x) > 0 \Leftrightarrow 5x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{5} \Rightarrow m = 4(L)$	0,25
	Nếu $m \neq 4$ thì $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ -7m^2 + 38m - 15 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < \frac{3}{7} \Leftrightarrow m > 5 \\ m > 5 \end{cases}$	0,25
	KL: $m > 5$ là giá trị cần tìm.	0.25
4)	Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính các góc của tam giác ABC.	

	2.0	
	Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$	0,25
	Tương tự có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ$	0,25
	$C = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$	0,25
	KL: Các góc của tam giác ABC là $A = 120^\circ; B = 45^\circ; C = 15^\circ$	0,25
5	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $B(-2;1); C(1;-3)$ trung điểm I của AC thuộc đường thẳng (d): $2x + y = 0$. Xác định tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 3.	2,0
	Do $I \in (d) \Rightarrow I(x; -2x)$ vì I là trung điểm của AC nên $A(2x-1; -4x+3)$	0,5
	$\overrightarrow{BC} = (3; -4) \Rightarrow BC = 5$ Phương trình đường thẳng BC là: $4x + 3y + 5 = 0$ $d(A; BC) = \frac{ -4x+10 }{5}$	0,5
	$S_{ABC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(A; BC).BC = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{ -4x+10 }{5} \cdot 5 = 3 \Leftrightarrow 5-2x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; -1) \\ A(7; -13) \end{cases}$ KL.	0,5
6	Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A lần lượt là: $x - 2y - 13 = 0$ và $13x - 6y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(-5;1)$.	2,0
	Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - 13 = 0 \\ 13x - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow A(-3; -8)$	
	Gọi AH; AM lần lượt là các đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A $\Rightarrow IM \parallel AH$ Phương trình của IM là: $x - 2y + 7 = 0$	
	Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 13x - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3; 5)$ $BC \perp AH$ nên phương trình BC có dạng $2x + y + c = 0$	
	Mà $M \in BC$ nên có $2.3 + 5 + c = 0 \Rightarrow c = -11$ Phương trình đường thẳng BC là: $2x + y - 11 = 0$	
	$B \in BC \Rightarrow B(a; 11 - 2a)$ $\overrightarrow{IA} = (2; -9); \overrightarrow{IB} = (a + 5; 10 - 2a)$	
	Lại có: $IA = IB \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases}$ Với $a = 4 \Rightarrow B(4; 3); C(2; 7)$ Với $a = 2 \Rightarrow B(2; 7); C(4; 3)$ KL: B(4;3);C(2;7) hoặc B(2;7);C(4;3)	

7	Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 27$. 2.0 Vì $a \in [1; 2] \Rightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$ Tương tự ta cũng có: $b + \frac{2}{b} \leq 3$ và $c + \frac{2}{c} \leq 3$ Cộng ba bất đẳng thức trên ta được: $9 \geq (a+b+c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ $9 \geq 3\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 27$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ $a = b = c = 1$	
---	--	--

---HẾT---

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI SỐ 8

Câu 1. (3,0 điểm)

- a) Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$
- b) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - 2y = 0 \\ 2x - xy + y = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 10$$

Câu 4. (3,0 điểm)

- a) Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC . Chứng minh nếu đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM thì $AC^2 + AB^2 + 2BC^2 = 12R^2$.
- b) Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là m, n, p . Tính độ dài các cạnh AB, BC, CA theo m, n, p .
- c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt có phương trình là

$$x - 2y = 0, x - 2 = 0, x + y - 3 = 0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C , biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{10}$ và đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ và một điểm M nằm bên trong tứ giác đó (M không nằm trên các cạnh của tứ giác $ABCD$). Chứng minh tồn tại ít nhất một trong các góc $\widehat{MAB}, \widehat{MBC}, \widehat{MCD}, \widehat{MDA}$ có số đo không lớn hơn 45° .

Câu 6. (1,0 điểm) Giải phương trình
$$\frac{\sin 2x + \cos 2x - 3\sqrt{2} \sin x - 2}{(\sin x + \cos x)^2} = 1.$$

-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ 08

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1(3đ)	1.a (1,5 điểm)	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2})$ Đặt $y = \sqrt{2 - x^2} > 0$. Thay vào ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$. Do đó ta có hệ phương trình:	0,25
	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 2 \\ x + y = 2xy \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} (x + y)^2 - (x + y) - 2 = 0 \\ x + y = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -0,5 \end{cases} \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ 2y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \text{ (do } y > 0)$ Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$	0,25
	1.b (1,5 điểm)	

	Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (1) có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$	0,75
	Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4$. Do đó $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$	0,5
	Do $m \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq \sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$.	0,25
2(2đ)	Đặt $z = y - 1$, thay vào hệ ta được: $\begin{cases} x^2 - xz + z^2 = 1 \\ x - xz + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2 - 3xz = 1 \\ x+z-1 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2 - 3(x+z) + 2 = 0 \\ x+z-1 = xz \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ x+z=1 \\ xz=x+z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ xz=1 \\ x+z=1 \\ xz=0 \end{cases}$	0,5
	+) $\begin{cases} x+z=2 \\ xz=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} x+z=1 \\ xz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, z=0 \\ x=0, z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=1 \\ x=0, y=2 \end{cases}$	0,5
	Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S = \{(1;2), (1;1), (0;2)\}$	0,25
3(1đ)	Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn nên có một trong các bất đẳng thức sau xảy ra: $a^2 \geq b^2 + c^2, b^2 \geq c^2 + a^2, c^2 \geq a^2 + b^2$. Giả sử $a^2 \geq b^2 + c^2$, khi đó ta có:	0,25
	$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 1 + a^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{b^2 + c^2}{a^2} + (b^2 + c^2) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$ $\geq 1 + a^2 \cdot \frac{4}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + c^2}{a^2} + 4$	0,25
	$= 1 + \frac{3a^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + c^2}{a^2} + 4 \geq 1 + 3 + 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{a^2}} + 4 = 10.$ Do đó $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 10.$	0,5
4(3đ)	4.a (1,0 điểm) Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}.$ Khi đó	0,25
	$OG \perp OM \Rightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 0$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2R^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2R^2 - AB^2) + \frac{1}{2}(2R^2 - AC^2) + 2R^2 - BC^2 + 2R^2 = 0 \text{ (chú ý } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2}{2})$	0,25

	$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2BC^2 = 12R^2$	0,25
	4.b(1,0 điểm)	
	Kí hiệu $a = BC, b = CA, c = AB, p = \frac{a+b+c}{2}$. Khi đó ta có $a = \frac{2S}{m}, b = \frac{2S}{n}, c = \frac{2S}{p}$	0,25
	Theo công thức Hê – rông ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\Leftrightarrow 4S = \sqrt{2S\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)}$	0,25
	$\Leftrightarrow 4S = 4S^2.k \Leftrightarrow S = \frac{1}{k}$, trong đó $k = \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)}$	0,25
	Do đó $a = \frac{2}{mk}, b = \frac{2}{nk}, c = \frac{2}{pk}$.	0,25
	4.c (1,0 điểm)	
	Do BC vuông góc với đường cao kẻ từ A nên BC có dạng $2x + y + c = 0$. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -c - 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; -c - 4)$, tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c - 3 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow C(-c - 3; c + 6)$.	0,25
	AB đi qua $B(2; -c - 4)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ C nên $AB: 1.(x - 2) - 1.(y + c + 4) = 0 \Leftrightarrow x - y - c - 6 = 0$. Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y - c - 6 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c + 12 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow A(2c + 12; c + 6)$.	0,25
	Theo giả thiết ta có $\sqrt{10} = \frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{AB.AC.BC}{2.d(A, BC).BC} \Leftrightarrow \frac{AB.AC}{d(A, BC)} = 2\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2c+10)^2 + (2c+10)^2} \cdot 3c+15 }{\sqrt{4c+24+c+6+c}} = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow c+5 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -7 \\ c = -3 \end{cases}$	0,25
	+) Nếu $c = -7 \Rightarrow A(-2; -1), B(2; 3), C(4; -1)$. +) Nếu $c = -3 \Rightarrow A(6; 3), B(2; -1), C(0; 3)$ không thỏa mãn hoành độ của A âm. Vậy $A(-2; -1), B(2; 3), C(4; -1)$.	0,25
5(1đ)	Giả sử $\min\{\widehat{MAB}, \widehat{MBC}, \widehat{MCD}, \widehat{MDA}\} > 45^\circ$ (1).	
	Ta có $\cot \widehat{MAB} = \frac{\cos \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAB}} = \frac{MA^2 + AB^2 - MB^2}{2.MA.AB.\sin \widehat{MAB}} = \frac{MA^2 + AB^2 - MB^2}{4S_{MAB}}$.	0,25
	Kết hợp với (1) ta được $\frac{MA^2 + AB^2 - MB^2}{4S_{MAB}} < \cot 45^\circ = 1 \Rightarrow MA^2 + AB^2 - MB^2 < 4S_{MAB}$ (2) Tương tự ta được các bất đẳng thức sau đây : $MB^2 + BC^2 - MC^2 < 4S_{MBC}$ (3)	0,25

	$MC^2 + CD^2 - MD^2 < 4S_{MCD} \quad (4)$ $MD^2 + DA^2 - MA^2 < 4S_{MDA} \quad (5)$	
	Cộng theo về các bất đẳng thức (2), (3), (4), (5) ta được: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 < 4(S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCD} + S_{MDA}) = 4S_{ABCD} \quad (6)$	0,25
	Mặt khác ta lại có: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geq 2AB \cdot BC + 2CD \cdot DA \geq 4S_{ABC} + 4S_{CDA} = 4S_{ABCD}$, mâu thuẫn với (6). Do đó giả sử ban đầu là sai suy ra tồn tại ít nhất một trong các góc $\widehat{MAB}, \widehat{MBC}, \widehat{MCD}, \widehat{MDA}$ có số đo không lớn hơn 45° .	0,25
Câu 6	ĐK: $\sin x + \cos x \neq 0$.	0,5
	Phương trình tương đương: $\sin 2x + \cos 2x - 3\sqrt{2} \sin x - 2 = 1 + \sin 2x$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\sqrt{2}(\text{loại}) \\ \sin x = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	0,5
	$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ Từ đó tìm được nghiệm $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	1,0

-----Hết-----

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 9

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m - 2$.

- Tìm m để $f(x)$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
- Tìm m để trên đồ thị của $f(x)$ có hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thỏa mãn :
 $2x_A - y_A - 3 = 0, 2x_B - y_B - 3 = 0$ và $AB = \sqrt{5}$.

Câu 2. (3,0 điểm)

- Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4, \quad (x \in \mathbb{R}).$
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{2x}{y} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 3. (3,0 điểm)

- Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x-1}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}, \quad (x \in \mathbb{R}).$
- Tìm k bé nhất để bất PT sau luôn đúng : $2\sqrt{x^2 - x^4} + (1-k)(|x| + \sqrt{1-x^2}) + 2 - k \leq 0,$

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , E, F lần lượt là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ B và C ; H là trực tâm. K là giao điểm của FE và BC . Chứng minh: HK vuông góc với AM .

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt đi qua các điểm $P(0;-5), Q(-2;5), M(1;-2), N(3;6)$. Viết phương trình các cạnh của hình vuông.

3) Cho tam giác ABC có trọng tâm G thỏa mãn :

$$\cot \widehat{GAB} + \cot \widehat{GBC} + \cot \widehat{GCA} = 3\sqrt{3}. \text{ Chứng minh : tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$S = \frac{a^3}{(b+c)(b+2c)} + \frac{b^3}{(c+a)(c+2a)} + \frac{c^3}{(a+b)(a+2b)}.$$

Câu 6. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có góc A nhọn, điểm $I(4;2)$ là trung điểm đoạn BC , điểm A nằm trên đường thẳng $d: 2x - y - 1 = 0$. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác ABD, ACE vuông cân tại A . Biết phương trình đường thẳng $DE: x - 3y + 18 = 0$ và $BD = 2\sqrt{5}$ điểm D có tung độ nhỏ hơn 7. Xác định tọa độ các điểm A, B, C .

Câu 7. (1,0 điểm) Giải phương trình $\frac{4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x \right) - \sqrt{3}\cos(2x - 3\pi) - 3}{1 - 2\sin x} = 0$

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu I	1) Ta có $m=0$ tm	0,5
	$m > 0$ hs đồng biến trên $(-2; +\infty)$ khi..... khi $m \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$	1
	KL : $m \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$	0,5
	2) Yêu cầu bài toán tương đương với ĐT hs cắt đường $y = 2x - 3$ tại A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{5}$. Khi đó, ta có pt hoành độ gđ : $m x^2 - 2m x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$	0,5
	$AB = \sqrt{5} \dots \Leftrightarrow m = -4$ Tìm được $m = -4$.	1 0,5
Câu II	Nhận xét nhân liên hợp giải pt được nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 8/9$	2
	Đặt ẩn phụ $a = x^2 + y^2 - 1, b = x/y$. Tìm được nghiệm $(1; -1), (-1; 1), (3; 1), (-3; -1)$	2
Câu III	1) Điều kiện $x \geq 3$ Nhận xét hai mẫu luôn dương, nên quy đồng bỏ mẫu, bình phương ta được tập nghiệm $S = [4; 5]$	2
	2) Ta có $x \in [-1; 1]$. Đặt $t = (x + \sqrt{1-x^2})$, Đk $t \in [1; \sqrt{2}]$ Đưa về BPT ẩn t . Tìm ĐK được k bé nhất bằng $\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$	2

Câu IV	1) gán hệ trục tọa độ được ĐPCM 2) Gọi vecto PT của AB (a ;b) ta có PT đường AB, AD. Ta có d(M ;AB)= d(Q ;AD) tìm được b = 0 hoặc a = -b . KL : có 2 hình vuông AB : x+y+5=0, BC : x-y+7=0, CD : x+y+1=0, DA : x-y+3=0 Hoặc AB : x=0, BC : y=5, CD : x=1, DA : y=6 3) Áp dụng định lí cos, sin ta tính được : $VT = 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ Mà : $S_{ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{36} (a+b+c)^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{36} (a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy : $VT \geq 3\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ĐPCM	2 2 2
Câu V	Áp dụng BĐT CoSi ta có $\frac{a^3}{(b+c)(b+2c)} + \frac{b+c}{12} + \frac{b+2c}{18} \geq \frac{a}{2}$. Tương tự..... Vậy $S \geq \frac{a+b+c}{6} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{6} = 1$ Min S = 1 khi a = b = c = 2	2
Câu 6: Ta có $2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow AI \perp DE$		0,5



Phương trình đường thẳng AI : $3(x-4) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 14 = 0$ Tọa độ điểm A thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(3;5).$	0,5
$BD = 2\sqrt{5} \Rightarrow AD = \sqrt{10}$. Gọi $D(3a-18;a)$ ta có $AD = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3a-21)^2 + (a-5)^2 = 10 \Leftrightarrow 10a^2 - 136a + 456 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{38}{5} (loại) \\ a = 6 \end{cases}$ $a = 6 \Rightarrow D(0;6)$	0,5
Đường thẳng AB đi qua $A(3;5)$, vtpt là $\overrightarrow{AD} = (-3;1)$ có phương trình $-3(x-3) + y - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$ Gọi tọa độ điểm B(b;3b-4) ta có $AB = \sqrt{10} \Rightarrow (b-3)^2 + (3b-9)^2 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ b = 2 \end{cases}$	0,5

Với $b = 4$ $B(4;8)$ $C(4;-4)$, loại do góc $\widehat{BAC}$ tù. Với $b = 2$ $B(2;2)$ $C(6;2)$, thỏa mãn. *Lưu ý: Nếu học sinh không chứng minh được $AI \perp DE$ mà sử dụng luôn thì cả bài cho 1,0 điểm	0,5
Câu 7. Giải phương trình $\frac{4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x \right) - \sqrt{3}\cos(2x - 3\pi) - 3}{1 - 2\sin x} = 0$	1,5 điểm
Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi; x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. Khi đó $pt \Leftrightarrow 4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x \right) - \sqrt{3}\cos(2x - 3\pi) - 3 = 0$	0.5
$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 \frac{x}{2} - 1\right) + \left[2\cos^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - 1\right] + \sqrt{3}\cos 2x = 0$ $\Leftrightarrow 2\cos x + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - 2x\right) + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$	0.5
$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0.25
Kết hợp với điều kiện ta có; pt có nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$	0.25

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 10

Câu 1. (1,0 điểm).

Giải phương trình: $19 + 3x + 4\sqrt{-x^2 - x + 6} = 6\sqrt{2 - x} + 12\sqrt{3 + x}$.

Câu 2. (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm).

Tìm tất cả các giá trị của m sao cho bất phương trình $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + 2m+2 \geq 0$ vô nghiệm (x là ẩn, m là tham số).

Câu 4. (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O và G là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm tam giác MNP . Chứng minh rằng O, G, G' thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC không vuông và có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan C = 2 \tan B$ thì tam giác ABC đều.

Câu 6. (1,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC không là tam giác vuông và nội tiếp đường tròn (I) (đường tròn (I) có tâm là I); điểm $H(2;2)$ là trực tâm tam giác ABC . Kẻ các đường kính AM , BN của đường tròn (I) . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $M(5;3)$, $N(1;3)$ và đường thẳng BC đi qua điểm $P(4;2)$.

Câu 7. (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2015$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2015a - a^2}{bc} + \frac{2015b - b^2}{ca} + \frac{2015c - c^2}{ab} + 6 \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{2015-a}{a}} + \sqrt{\frac{2015-b}{b}} + \sqrt{\frac{2015-c}{c}} \right).$$

Câu 8. (1,0 điểm) Giải phương trình:
$$\frac{\sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x}{\tan(x - \frac{\pi}{6}) \tan(x + \frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{8}$$

Câu 9. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;3)$, $B(7;0)$, $C(2;5)$. Lập phương trình đường tròn (T) có bán kính nhỏ nhất sao cho A, B, C nằm trên hoặc nằm trong (T) .

Câu 10. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y - 4 + \sqrt{2x-1} - \sqrt{2y+3} = 0 \\ (4x^2 - 4x - 4)\sqrt{2x-1} + (x-1)\sqrt{-y-1} = 3x-7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

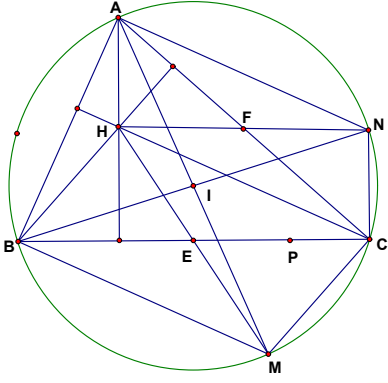
-----Hết-----

HƯỚNG DẪN ĐỀ SỐ 10

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	Điều kiện xác định: $\begin{cases} -x^2 - x + 6 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ 3 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2.$ Bất phương trình đã cho tương đương với: $19 + 3x + 4\sqrt{(2-x)(3+x)} = 6(\sqrt{2-x} + 2\sqrt{3+x})$	
	Đặt $t = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{3+x}$, $t > 0$ ta có: $t^2 = 2 - x + 4(3+x) + 4\sqrt{(2-x)(3+x)} = 14 + 3x + 4\sqrt{(2-x)(3+x)}$	0,25

	Thay vào phương trình trên ta được: $5 + t^2 = 6t \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$	
	$+) t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + 2\sqrt{3+x} = 1 \Leftrightarrow 2-x + 4(3+x) + 4\sqrt{(2-x)(3+x)} = 1$ $\Leftrightarrow 3x + 13 + 4\sqrt{-x^2 - x + 6} = 0 \text{ vô nghiệm do } -3 \leq x \leq 2$	0,25
	$+) t = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} + 2\sqrt{3+x} = 5 \Leftrightarrow 2-x + 4(3+x) + 4\sqrt{(2-x)(3+x)} = 25$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2 - x + 6} = 11 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 16(-x^2 - x + 6) = (11 - 3x)^2 \\ 11 - 3x \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 50x + 25 = 0 \\ x \leq \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1\}$.	0,25
2	$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy - y - 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - y - 3 = 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$ Ta có $(1) \Leftrightarrow (x - y + 1)(x - 2y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$	0,25
	Với $x = y - 1$ thay vào (2) ta được $2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $+) y = 2 \Rightarrow x = 1.$ $+) y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$	0,25
	Với $x = 2y + 1$ thay vào (2) ta được $5y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$ $+) y = -1 \Rightarrow x = -1.$ $+) y = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{5}.$	0,25
	Vậy, hệ (I) có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 2), (-1; -1), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right).$	0,25
3	Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + 2m+2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$	0,25
	TH1. Nếu $m = 1$ thì $6x + 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$ vô lí.	0,25
	TH2. Nếu $m \neq 1$ thì $(m-1)x^2 + 2(m+2)x + 2m+2 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m+2)^2 - (m-1)(2m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -m^2 + 4m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow m < 2 - \sqrt{10} \\ m < 2 - \sqrt{10} \end{cases}$	0,25

	Vậy tập hợp các giá trị của m là $S = (-\infty; 2 - \sqrt{10})$.	0,25
4	(1,0 điểm) Bài này học sinh không nhất thiết phải vẽ hình.	
	Kết quả cơ bản: cho tam giác ABC trọng tâm G . Khi đó với mọi điểm O ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$. Do M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB nên: $\vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OM} \quad \vec{OC} + \vec{OA} = 3\vec{ON} \quad \vec{OA} + \vec{OB} = 3\vec{OP}$	0,5
	Cộng từng vế 3 hệ thức trên ta được: $2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = 3(\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP})$ $\Leftrightarrow 2.3.\vec{OG} = 3.3.\vec{OG'} \Leftrightarrow 2.\vec{OG} = 3.\vec{OG'} \Rightarrow O, G, G'$ thẳng hàng.	0,5
5	(1,0 điểm)	
	Theo định lí hàm số sin và cosin ta có: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R(b^2 + c^2 - a^2)}$	0,25
	Tương tự ta có $\tan B = \frac{abc}{R(c^2 + a^2 - b^2)}, \tan C = \frac{abc}{R(a^2 + b^2 - c^2)}$. $\Rightarrow \tan A + \tan C = 2.\tan B \Leftrightarrow \frac{abc}{R(b^2 + c^2 - a^2)} + \frac{abc}{R(a^2 + b^2 - c^2)} = 2.\frac{abc}{R(a^2 + c^2 - b^2)}$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = 2.\frac{1}{a^2 + c^2 - b^2}$ $\Leftrightarrow (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)$ $= 2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^4 - (b^2 - c^2)^2 + c^4 - (a^2 - b^2)^2 = 2(b^4 - (a^2 - c^2)^2)$	0,25
	$\Leftrightarrow a^2(a^2 + b^2 - 2c^2) + (c^2 - b^2)(c^2 + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow b = c$ (do $a^2 + b^2 = 2c^2$), kết hợp với $a^2 + b^2 = 2c^2 \Rightarrow a = b = c$. Vậy tam giác ABC đều.	0,25
6	(1,0 điểm)	
	Nhận xét. Các tứ giác $BHCM, AHCN$ là các hình bình hành suy ra nếu gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA thì E, F cũng tương ứng là trung điểm của HM, HN . Do đó $M\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.	
	Đường thẳng BC đi qua điểm $P(4;2), M\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ nên: $BC: \frac{x-4}{\frac{7}{2}-4} = \frac{y-2}{\frac{5}{2}-2} \Leftrightarrow x+y-6=0$. AH vuông góc với BC suy ra AH có vptpt $\vec{n}_{AH} = (1; -1)$, kết hợp với AH đi qua điểm $H(2;2)$ suy ra: $AH: 1(x-2) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow x-y=0$.	0,25
	$A \in AH \Rightarrow A(a; a), C \in BC \Rightarrow C(b; 6-b)$. Do F là trung điểm AC nên:	0,5

	$\begin{cases} x_F = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_F = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a + 6 - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1;1), C(2;4). \text{ Do } E \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên:}$ $\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_E = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_E - x_C \\ y_B = 2y_E - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1).$ Vậy $A(1;1), B(5;1), C(2;4)$.	
		0,25
7	(1,0 điểm)	
	Thay $2015 = a + b + c$ thì bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} + \frac{c(a+b)}{ab} + 6 \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \right)$	0,25
	Ta có $\frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} + \frac{c(a+b)}{ab} + 6 = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 6$ $= \frac{b+c}{a} + 2 + \frac{c+a}{b} + 2 + \frac{a+b}{c} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 2 + 2\sqrt{\frac{c+a}{b}} \cdot 2 + 2\sqrt{\frac{a+b}{c}} \cdot 2$	0,5
	$= 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}} \right). \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{2015}{3}.$	0,25
8	Điều kiện: $\begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + m\frac{\pi}{2} \ (m \in \mathbb{Z}) \ (*)$ Ta cần $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow \sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin^2 x [\sin x \sin 3x] + \cos^2 x [\cos x \cos 3x] = \frac{1}{8}$	

	$\Leftrightarrow \sin^2 x [\cos 2x - \cos 4x] + \cos^2 x [\cos 2x + \cos 4x] = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow [\sin^2 x + \cos^2 x] \cos 2x + [\cos^2 x - \sin^2 x] \cdot \cos 4x = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x [1 + \cos 4x] = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ $\text{KL: } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$	
9	Mọi đường tròn chứa bên trong hoặc trên nó cả 3 điểm A, B, C có đường kính d không thể nhỏ hơn 3 đoạn AB, BC, CA	
	Chỉ ra tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow BC = 5\sqrt{2}$ là cạnh lớn nhất. $d \geq \max \{AB, BC, AC\} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \min d = 5\sqrt{2}$ Suy ra đường tròn đường kính BC có bán kính nhỏ nhất thỏa mãn bài toán	
	Tâm đường tròn là $I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$, bán kính là $R = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{\sqrt{2}}$ Vậy pt (T): $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$	
	$\begin{cases} x^2 - xy - 2y - 4 + \sqrt{2x-1} - \sqrt{2y+3} = 0 \quad (1) \\ (4x^2 - 4x - 4)\sqrt{2x-1} + (x-1)\sqrt{-y-1} = 3x-7 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$ Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \geq y \geq -1$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-y-2)(x+2) + (\sqrt{2x-1} - \sqrt{2y+3}) = 0$ Trường hợp 1: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y+3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$, không thỏa mãn hệ phương trình Chú ý: Nếu không xét trường hợp $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y+3} = 0$ thì trừ 0,25đ	0,5
	Trường hợp 2: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y+3} \neq 0$ $(1) \Leftrightarrow (x-y-2)(x+2) + \frac{2(x-y-2)}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y+3}} = 0$ $\Leftrightarrow x-y-2=0 \quad (\forall (x+2) + \frac{2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y+3}} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \geq y \geq -1)$	0,5
	Thế vào phương trình (2) ta được $(4x^2 - 4x - 4)\sqrt{2x-1} + (x-1)\sqrt{1-x-3x+7} = 0 \quad (3), \text{ ĐK } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$	1,0

Với $x \in \frac{1}{2}; 1$ ta có $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 4 < 0 \\ \sqrt{2x-1} \cdot 1 \leq \frac{2x-1+1}{2} = x \end{cases}$ (Theo bất đẳng thức Cauchy) Kết hợp với phương trình (3) ta có $0 \geq x(4x^2 - 4x - 4) - 3x + 7 + (x-1)\sqrt{1-x}$	
$0 \leq 4x^3 - 4x^2 - 7x + 7 + (x-1)\sqrt{1-x} \leq 0 \quad (1-x)(7-4x^2-\sqrt{1-x})$ $\Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } 7-4x^2-\sqrt{1-x} > 0; 1-x \geq 0, \forall x \in \frac{1}{2}; 1 \text{)}$ Với $x = 1$ thỏa mãn phương trình (3) $\Rightarrow y = -1$ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -1)$.	0,5

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 11

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình

$$\frac{\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x \cdot \cos x - 2\cos^2 x + 2}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0.$$

Câu 2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x-6 \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y + m \leq 0 \\ 6x + 3y + 5m \geq 0 \end{cases}$.

Gọi Ω là tập hợp nghiệm của hệ đã cho. Trong mặt phẳng tọa độ, xét 2 điểm $A(0;9)$ và $B(3;6)$. Tìm các giá trị của m để đoạn thẳng AB nằm trọn trong Ω .

Câu 4. (1,0 điểm)

Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho các chữ số 1; 2; 3 không đứng cạnh nhau từng đôi một.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho đường tròn (C) tâm I , bán kính bằng 2. Điểm $M \in \Delta : x + y = 0$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Đường thẳng $AB : 3x + y - 2 = 0$, $d(I, \Delta) = 2\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn (C) .

Câu 6. (1,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$.

Chứng minh rằng:
$$P = \frac{2xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{3zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{5}{3}$$

Câu 7. (3,0 điểm)

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

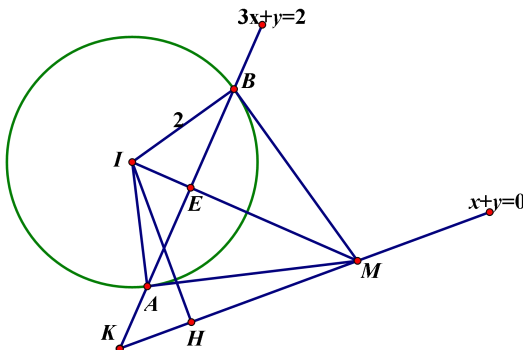
a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .

b) Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

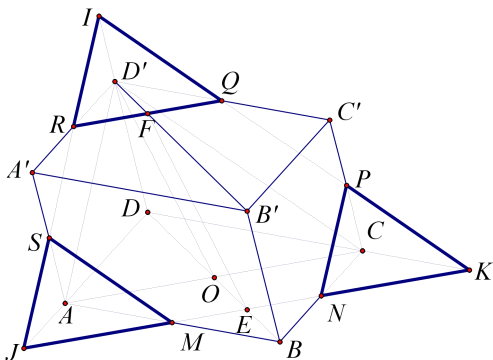
----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 11

Câu	NỘI DUNG	Điểm
1	$\frac{\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4 \cos 2x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x + 2}{2 \sin x - \sqrt{3}} = 0.$	1,0
	ĐKXĐ: $\sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}$	
	$(*) \Rightarrow \sqrt{3} \sin x(2 \cos x + 1) - 4(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos^2 x + \cos x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x(2 \cos x + 1) = (2 \cos x + 1)(4 \cos^2 x - \cos x - 2)$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \cos 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos 2x \end{cases}$	
	Giải ra sau đó kiểm tra lại ta được phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$	
2	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x-6 \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} \end{cases}$	1,0
	Ta có $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = (x+y)^3 + 4(x+y)xy \geq 2\sqrt{(x+y)^3 4(x+y)xy}$ $= 4(x+y)^2 \sqrt{xy} = 4\sqrt{xy} [x^2 + y^2 + 2xy] \geq 4\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{(x^2+y^2)2xy} = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$ đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x+y = 2\sqrt{xy} \\ x^2 + y^2 = 2xy \end{cases} \Leftrightarrow x = y$	
	Từ đó giải ra nghiệm được $(x; y) = (3; 3)$.	
3	Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y + m \leq 0 & (1) \\ 6x + 3y + 5m \geq 0 & (2) \end{cases}$ Gọi Ω là tập hợp nghiệm của hệ đã cho. Trong mặt phẳng tọa độ, xét 2 điểm $A(0;9)$ và $B(3;6)$. Tìm các giá trị của m để đoạn thẳng AB nằm trọn trong Ω .	1,0
	*) Điều kiện cần: Giả sử đoạn AB nằm trong Ω . Vì $A(0;9) \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ, suy ra $-\frac{27}{5} \leq m \leq 9$.	

	Vì $B(3;6) \in \Omega$ nên suy ra $-\frac{36}{5} \leq m \leq 0$. Do đó, điều kiện để đoạn AB nằm trong Ω là $-\frac{27}{5} \leq m \leq 0$.	
	*) Điều kiện đủ: Giả sử $-\frac{27}{5} \leq m \leq 0$. Ta có đường thẳng AB có phương trình là $y = -x + 9$, điểm $M(x_0; 9 - x_0)$ ($0 \leq x_0 \leq 3$) là một điểm bất kỳ thuộc đoạn AB. +) Thay $x = x_0, y = 9 - x_0$ vào (1) ta được $VT = 2x_0 - 9 + x_0 + m = 3x_0 + m - 9 = 3(x_0 - 3) + m \leq 0 \quad \forall x_0 \in [0; 3] \text{ và } -\frac{27}{5} \leq m \leq 0.$ +) Thay $x = x_0, y = 9 - x_0$ vào (2) ta được $VT = 6x_0 + 27 - 3x_0 + 5m = 3x_0 + 27 + 5m \geq 27 + 5 \cdot \left(-\frac{27}{5}\right) \geq 0$ Do đó điểm $M(x_0; 9 - x_0)$ thuộc tập nghiệm Ω của hệ đã cho. Vậy $m \in \left[-\frac{27}{5}; 0\right]$ là giá trị cần tìm.	
4	Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho các chữ số 1; 2; 3 không đứng cạnh nhau từng đôi một Trước hết chọn và xếp vị trí theo hàng ngang cho 3 chữ số 4, 5, 6 ta có P_3 cách. Mỗi cách xếp vị trí cho các chữ số 4, 5 và 6 như thế thì có 4 khoảng trống gồm 1 vị trí ở đầu (bên trái), một vị trí cuối cùng (bên phải) và 2 vị trí xen giữa. Do các chữ số 1, 2, 3 không đứng cạnh nhau từng đôi một nên chúng sẽ được xếp vào các khoảng trống do các chữ số 4, 5 và 6 tạo ra. Khi đó có A_4^3 cách xếp vị trí cho các chữ số 1, 2, 3 vào 4 khoảng trống đó. Vậy có cả thảy $P_3 \cdot A_4^3 = 144$ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán.	1,0
5	Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính bằng 2. Điểm $M \in \Delta : x + y = 0$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm. Đường thẳng $AB : 3x + y - 2 = 0, d(I, \Delta) = 2\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn (C).	
		
	+) Gọi K là giao điểm của Δ và AB E là giao điểm của IM và AB H là hình chiếu của I lên Δ +) $I(a;b) \Rightarrow d(I, \Delta) = IH = 2\sqrt{2} \Rightarrow a + b = 4$ (1) AB có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(3;1)$ Δ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1;1)$	

	Góc giữa AB và Δ chính là góc $\widehat{AKM} \Rightarrow \cos \widehat{AKM} = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$	
	Nhận xét: $\widehat{HIM} = \widehat{AKM}$ (cùng phụ với góc $\widehat{IMH}$). Suy ra $\cos \widehat{HIM} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ Ta có: $IM = \frac{IH}{\cos \widehat{HIM}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}$; $IB^2 = IE \cdot IM \Rightarrow IE = \frac{IB^2}{IM} = \frac{4}{\sqrt{10}}$	
	Vậy $d(I, AB) = \frac{4}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{ 3a+b-2 }{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 3a+b-2 = 4 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a+b = 4 \\ 3a+b-2 = 4 \end{cases}$ Giải hệ phương trình ta tìm được nghiệm $(a; b)$ lần lượt là: $(-3; 7), (1; 3), (1; -5), (5; -9)$	
	Thử lại ta được 2 phương trình đường tròn (C) thỏa mãn: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$; $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 4$	
6	Đặt: $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ Khi đó: a, b, c là ba cạnh của một tam giác ABC. Ta có: $\frac{xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab}$ $= \frac{c^2 - a^2 - b^2}{4ab} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cos C + \frac{1}{2}$ Tương tự ta có: $\frac{yz}{(x+y)(x+z)} = -\frac{1}{2} \cos A + \frac{1}{2}$ $\frac{zx}{(y+z)(y+x)} = -\frac{1}{2} \cos B + \frac{1}{2}$	1,0
	Suy ra: $P = -\left(\cos C + \cos A + \frac{3}{2} \cos B\right) + \frac{7}{2}$ Ta có: $\cos C + \cos A + \frac{3}{2} \cos B = 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} + \frac{3}{2} \cos B$ $= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} + \frac{3}{2} (1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2}) \leq -3 \sin^2 \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} + \frac{3}{2}$ $= -3 \left(\sin^2 \frac{B}{2} - \frac{2}{3} \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{9} \right) + \frac{11}{6} = -3 \left(\sin \frac{B}{2} - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{11}{6} \leq \frac{11}{6}$ Suy ra: $P \geq \frac{7}{2} - \frac{11}{6} = \frac{5}{3}$. Dấu bằng xảy ra và chỉ khi $\begin{cases} \sin \frac{B}{2} = \frac{2}{3} \\ A = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a \\ a = c \end{cases} \Rightarrow x = z = 2y$ <i>Lưu ý: Có thể giải bài này bằng biến đổi đại số</i>	

7.1	 Trong mp(ABCD), qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N. Trong mp(BDD'B'), qua E vẽ đường thẳng song song với D'O (O=AC∩BD) cắt B'D' tại F. Trong mp(A'B'C'D'), qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt A'D', D'C' lần lượt tại R, Q. Trong mp(AA'D'D), qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S. Trong mp(CC'D'D), qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P.	
	Thiết diện là lục giác MNPQRS	
7.2	Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diện MNPQRS song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD'. ⇒ Các tam giác JKI, ACD', RQI, JMS, NKP đồng dạng	
	⇒ $\frac{MJ}{MN} = \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{NK}{NM} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PK}{PQ} = \frac{QD'}{QC'} = \frac{QI}{QP}$ ⇒ MJ=NK và PK=QI ⇒ Các tam giác RQI, JMS, NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S₁ và gọi diện tích các tam giác JKI, ACD' lần lượt là S₂, S)	
	Đặt $\frac{AM}{AB} = k$; ta có điều kiện $0 < k < 1$ và có: $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{DC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \Rightarrow S_1 = k^2 S$	
	$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{JM}{AC} + \frac{MK}{AC}\right)^2 = (k + 1)^2 \Rightarrow S_2 = (k^2 + 2k + 1)S$	
	⇒ Diện tích thiết diện: $S_{td} = S_2 - 3S_1$ $S_{td} = 2S(-k^2 + k + \frac{1}{2}) = 2S \left[\frac{3}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \right] \leq \frac{3S}{2}$ (dấu bằng xảy ra ⇔ $k = \frac{1}{2}$)	
	S lớn nhất ⇔ $k = \frac{1}{2}$ ⇔ M là trung điểm của AB	

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 12

Câu 1.(1,0 điểm) . Giải phương trình: $\cos x - 3\sqrt{3} \sin x = \cos 7x$

Câu 2.(1,0 điểm):Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1 + x^2 + y^2 = 5x + 2xy \\ xy^2 - 2y(y^2 + y + 1) = 2(x + 1) \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm là $H(3; -\frac{1}{4})$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $K(0; \frac{29}{8})$, trung điểm cạnh BC là $M(\frac{5}{2}; 3)$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, C; biết hoành độ của B lớn hơn hoành độ của C.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho các số thực a, b, c (với $a \neq 0$) sao cho: phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

Câu 5. (1,0 điểm): Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi A_I, B_I, C_I lần lượt là hình chiếu vuông góc của G xuống cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

$$a^2 \cdot \overrightarrow{GA_I} + b^2 \cdot \overrightarrow{GB_I} + c^2 \cdot \overrightarrow{GC_I} = \vec{0}. \text{ (với } a=BC, b=AC, c=AB).$$

Câu 6. (1,0 điểm)

Các số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân có tổng bằng 26. Tìm các số đó, biết rằng: nếu một cấp số cộng có a là số hạng thứ nhất, b là số hạng thứ ba thì c là số hạng thứ chín.

Câu 7. (1,0 điểm)

Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

Câu 8. (2,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và M là trung điểm của SC. Một mặt phẳng (P) chứa AM và lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại các điểm B', D' khác S. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{3} \leq \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \leq \frac{3}{2}.$$

Câu 9. (1,0 điểm)

Khảo sát tính chẵn - lẻ, tính tuần hoàn và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin(\pi|\sin x|)$.

----- Hết -----

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 13

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình lượng giác: $(\cot 3x + \cot x) \cot 4x = (\cot 3x - \cot x) \cot 2x$.

Câu 2. (1,0 điểm) Cho k là số tự nhiên thỏa mãn $5 \leq k \leq 2011$.

Chứng minh rằng: $C_5^0 \cdot C_{2011}^k + C_5^1 \cdot C_{2011}^{k-1} + \dots + C_5^5 \cdot C_{2011}^{k-5} = C_{2016}^k$

Câu 3. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD có $A(-5; 2)$. $M(-1; -2)$ là điểm nằm bên trong hình bình hành sao cho $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$ và $MB \perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan \widehat{DAM} = \frac{1}{2}$.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Gọi E là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBE), suy ra giao điểm của BE và mặt phẳng (SAC).

2) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (ABE).

Câu 5.(1,0 điểm) Cho tam giác ABC có các góc A,B,C lập thành một cấp số cộng với $A \geq B \geq C$.

Biết: $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{8}$, tính các góc của tam giác ABC.

Câu 6.(1,0 điểm)

Có hai hộp đựng bi, hộp A đựng 7 viên bi xanh, 7 viên bi đỏ; hộp B đựng 5 viên bi xanh và 9 viên bi đỏ. Bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp A bỏ vào hộp B, sau đó bốc ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp B bỏ lại vào hộp A. Tính xác suất để sau khi đổi bi xong số bi xanh trong hai hộp bằng nhau.

Câu 7.(1,0 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{2-3x-4x^2}$.

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy+x-y^2} - y = 5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2} + \sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 14

Câu 1.(1.0 điểm). Giải phương trình. $\sqrt{3} \sin 2x + \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{3} \cos \left(x + \frac{5\pi}{2} \right) - 5 \cos x + 3 = 0$

Câu 2.(1.0 điểm) Giải phương trình $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x) \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

Câu 3.(1.0 điểm).

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{x^2}{x^2 + x + yz(y+z)+1} + \frac{y+z}{x+y+z+1} - \frac{1+yz(y+z)}{9}$$

Câu 4.(1.0 điểm).

Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu cách chọn một bộ 3 số phân biệt của A (không tính thứ tự) để hiệu của 2 số bất kỳ trong 3 số đó có giá trị tuyệt đối không nhỏ hơn 2.

Câu 5.(1,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Hạ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Biết $M(2; -1)$, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HD và HB và điểm $K(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2})$ là trực tâm của tam giác AMN. Tìm tọa độ đỉnh D của hình chữ nhật biết đỉnh A thuộc đường thẳng $x + 2y + 4 = 0$ và A có tung độ dương.

Câu 6. (1.0 điểm). Tìm hệ số của số hạng chứa x^6 trong khai triển: $T = (x+1)^9 - x.(x-2)^8$

Câu 7.(2,0 điểm). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

- Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .
- Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

Câu 8.(1,0 điểm) :

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) , trọng tâm G và $a = BC, b = CA, c = AB$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC . Chứng minh rằng nếu bốn điểm A, O, M, G cùng nằm trên một đường tròn thì $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Câu 9.(1,0 điểm) : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy - x(1 + \sqrt{y-1}) - (y-1)\sqrt{y-1} = 0 \\ 16x^2y - 16y + 21 = 6\sqrt[3]{4xy - 3x} \end{cases}$$

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 15

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{\sin 3x + \cos 3x - 4 \cos 2x + 3}{2 \sin x + 1} = 1$.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho tập hợp Ω các số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được lập từ các số $0,1,2,3,4,5,6$. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc Ω , tính xác suất được chọn bé hơn 4653.

Câu 3 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AD lấy điểm E và dựng đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABE . Gọi F là giao điểm của AC với đường tròn (C) . Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông biết rằng $(C): x^2 + y^2 - x - y - 12 = 0, F(4;0)$, điểm D nằm trên đường thẳng $d: 3x + 4y + 13 = 0$ và điểm B có hoành độ dương.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tổng $S = \frac{1}{1}C_{2017}^0 + \frac{1}{3}C_{2017}^2 + \dots + \frac{1}{2017}C_{2017}^{2016}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) \\ (x^2 + y^2)^2 + 1 = x^2 + 2y \end{cases}$$

Câu 6.(1.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{\tan^2 A + \tan^2 B}{\tan^4 A + \tan^4 B} + \frac{\tan^2 B + \tan^2 C}{\tan^4 B + \tan^4 C} + \frac{\tan^2 C + \tan^2 A}{\tan^4 C + \tan^4 A} \leq 1.$$

Câu 7.(2,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AD ; G là trọng tâm tam giác SAD , đường thẳng BN cắt CD tại K . Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MCG) . Tính tỉ số mà thiết diện chia đoạn SA . Từ đó cho biết thiết diện là hình gì?

Câu 8.(1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $A \leq B \leq C \leq \frac{\pi}{2}$. Tính các góc của tam giác đó khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $P = 2 \cos 4C + 4 \cos 2C + \cos 2A + \cos 2B$

Câu 9.(1,0 điểm) Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{-x-1}} - \frac{2}{3}x \geq 1$

---Hết---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 16

Câu 1 (1,0 điểm). Tìm đặc điểm ΔABC biết : $(b^2 + c^2)\sin(C - B) = (c^2 - b^2)\sin(C + B)$ trong đó $AC = b$ & $AB = c$

Câu 2 (1 điểm). Giải phương trình $2\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}$.

Câu 3. (0.5 điểm). Tìm hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $P = (x^2 + x - 1)^6$

Câu 4. (1 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + y^3 = 2y\sqrt{y-1}(x + \sqrt[3]{x}) \\ x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x(y-1)^3 + 1 \end{cases}$$

Câu 5. (1 điểm). Cho phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = m^3$

Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

Câu 6 (1 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ có tâm là I và điểm $M(-1;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có diện tích $S = \sqrt{3}$.

Câu 7 (1 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nhận trục hoành làm đường phân giác trong của góc A , điểm $E(3;-1)$ thuộc đường thẳng BC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 10y - 24 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết điểm A có hoành độ âm.

Câu 8 (1 điểm). Cho tứ diện $ABCD$, các cạnh bằng nhau và bằng 12. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC . Gọi K là một điểm trên cạnh BD với $KB = 2KD$.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK) . Chứng minh rằng thiết diện là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện.

Câu 9 (0.5 điểm). Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A , tính xác suất để số chọn được là số chia hết cho 5.

Câu 10 (1 điểm). Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng $(0; \sqrt{6})$ và $a + b + c = 3\sqrt{3}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{6-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-b^2}} + \frac{1}{\sqrt{6-c^2}}$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 17

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{\cos x + \sin^3 x}{\sin x - \sin^2 x} = 1 + \sin x + \cot x$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$

Câu 3 (1,0 điểm): Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$$

Câu 4 (1,0 điểm). Giải phương trình: $2(x^2 - 3x - 1) - 7\sqrt{x^3 + 1} = 0$

Câu 5 (0,5 điểm). Tính tổng: $S = 1^2 C_{2014}^1 + 2^2 C_{2014}^2 + 3^2 C_{2014}^3 + \dots + 2014^2 C_{2014}^{2014}$

Câu 6 (0,5 điểm).

Đội thanh niên tình nguyện của một trường THPT có 100 học sinh, trong đó có 60 học sinh nam và 40 học sinh nữ. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ đội thanh niên tình nguyện đó để tham gia một tiết mục văn nghệ chào mừng ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh nữ.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $4(x + y + z) = 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2+x+yz} + \frac{1}{2+y+zx} + \frac{1}{2+z+xy}$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD . Điểm B thuộc đường thẳng Δ có phương trình $x + y - 5 = 0$. Các điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và B lên AC . Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết $CE = \sqrt{5}$ và $A(4;3), C(0;-5)$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải phương trình

$$x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA .

1. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và (SAD) .
2. Xác định giao điểm I của CP và (SBD) .
3. Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD) , từ đó hãy suy ra thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp? Thiết diện là hình gì?

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 18

Câu 1.(1,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ (1)

Chứng minh rằng $\forall m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Xác định m để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho $S_{\Delta OAB} = 2S_{\Delta OCD}$.

Câu 2.(1,0 điểm). Giải phương trình: $\frac{\sin 2x + 3 \tan 2x + \sin 4x}{\tan 2x - \sin 2x} = 2$

Câu 3.(1,0 điểm). Giải bất phương trình sau $1 + 4\sqrt{x}(\sqrt{2x+1} - 3\sqrt{x})^3 > 0$

Câu 4.(1,0 điểm.)

Biển số xe là một dãy kí tự gồm hai chữ cái đứng trước và bốn chữ số đứng sau. Các chữ cái lấy từ 26 chữ cái A, B ..., Z; các chữ số được chọn từ 10 chữ số 0, 1, 2 ..., 9. Hỏi có bao nhiêu biển số xe có hai chữ số đầu (sau 2 chữ cái) khác nhau, đồng thời có đúng 2 chữ số chẵn và hai số chẵn đó giống nhau?

Câu 5.(1,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -5)$, $B(2; -1)$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua B và tiếp xúc với đường tròn (C) , MN là một đường kính thay đổi của (C) sao cho các đường thẳng AM, AN cắt đường thẳng Δ lần lượt tại P và Q . Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác MNP biết H nằm trên đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$

Câu 6. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2-x)(2+y) = 8 \\ x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{4-x^2} = 4. \end{cases}$$

Câu 7.(1,0 điểm) Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức:

$$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

Câu 8.(3,0 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$, mặt phẳng (α) song song với AC và BD cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm P, Q, R, S .

a) Chứng minh rằng tứ giác $PQRS$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm P trên cạnh AB để tứ giác $PQRS$ có diện tích lớn nhất.

-----Hết-----

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 19

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình: $3(x^2 - 1) + 4x = 4x\sqrt{4x - 3}$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tìm cấp số cộng có 5 số hạng biết:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 35 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 405 \end{cases}$$

Câu 4 (1,0 điểm). Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Câu 5 (1,0 điểm). Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2 \cdot C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 \cdot C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) 2^{2n} \cdot C_{2n+1}^{2n+1} = 2013$$

Câu 6 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của điểm M và ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (-1;2)$.

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D , đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC . Viết phương trình đường thẳng AB .

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

Câu 10.(1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là điểm thuộc miền trong tam giác SOC . Tìm giao điểm của DM với mặt phẳng (SAB) và tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MOB) , (SCD) .

.....Hết.....

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 20

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình $\frac{\cos x + \sin^3 x}{\sin x - \sin^2 x} = 1 + \sin x + \cot x$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$

Câu 3 (1,0 điểm): Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$$

Câu 4 (1,0 điểm). Giải phương trình: $2(x^2 - 3x - 1) - 7\sqrt{x^3 + 1} = 0$

Câu 5 (0,5 điểm). Tính tổng: $S = 1^2 C_{2014}^1 + 2^2 C_{2014}^2 + 3^2 C_{2014}^3 + \dots + 2014^2 C_{2014}^{2014}$

Câu 6 (0,5 điểm).

Đội thanh niên tình nguyện của một trường THPT có 100 học sinh, trong đó có 60 học sinh nam và 40 học sinh nữ. Nhà trường chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ đội thanh niên tình nguyện đó để tham gia một tiết mục văn nghệ chào mừng ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng 1 học sinh nữ.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $4(x + y + z) = 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2+x+yz} + \frac{1}{2+y+zx} + \frac{1}{2+z+xy}$.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD . Đỉnh B thuộc đường thẳng Δ có phương trình $x + y - 5 = 0$. Các điểm E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D và B lên AC . Tìm tọa độ các đỉnh B, D biết $CE = \sqrt{5}$ và $A(4;3), C(0;-5)$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải phương trình

$$x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA .

1. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và (SAD) .
2. Xác định giao điểm I của CP và (SBD) .
3. Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAD) , từ đó hãy suy ra thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp? Thiết diện là hình gì?

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 21**Ngày 01 tháng 11 năm 2017**

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2 \sin x$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$

Câu 3 (1,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên k, n ($0 \leq k \leq n - 2015$)

$$\text{ta có: } C_{2015}^0 C_n^k + C_{2015}^1 C_n^{k+1} + C_{2015}^2 C_n^{k+2} + \dots + C_{2015}^{2015} C_n^{k+2015} = C_{n-2015}^{k+2015}$$

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh: $\tan^2 20^\circ; \tan^2 40^\circ; \tan^2 80^\circ$ là các nghiệm của phương trình: $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$

Câu 5 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$

$$\text{thành điểm } M'(x';y') \text{ sao cho: } \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trong đó $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ và $a.b + c.d = 0$.

Chứng tỏ F là phép dời hình

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Tìm số nguyên dương n biết $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$.

b) Gọi A là tập các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lập được từ các chữ số 0,2,3,5,6,8. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập A . Tính xác suất để số lấy được có chữ số 0 và chữ số 5 không đứng cạnh nhau.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

1) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của tứ diện.

2) Thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mp(MNP) là hình gì?

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có phương trình $AD: x - 2y + 3 = 0$. Trên đường thẳng qua B và vuông góc với đường chéo AC lấy điểm E sao cho $BE = AC$ (D và E nằm về hai phía so với đường thẳng AC). Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm $E(2; -5)$, đường thẳng AB đi qua điểm $F(4; -4)$ và điểm B có hoành độ dương.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 7y^3 + 3xy(x+y) - 24y^2 + 3x - 27y = 14 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y+4} = x^3 + y^2 - 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng

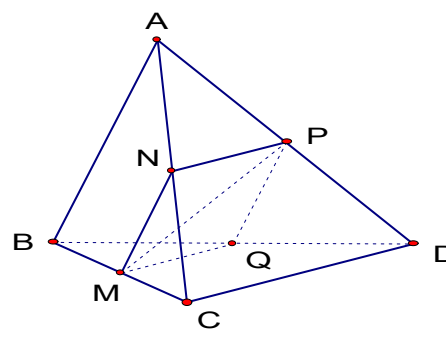
$$3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2).$$

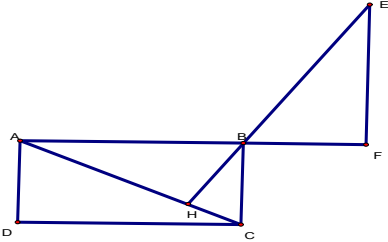
-----Hết-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 21

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm
1		Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x + \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2 \sin x$ Điều kiện: $\cos x \neq 0, \sin x + \cos x \neq 0$. Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \tan x = 2 \sin x - \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$	0,5
		$\Leftrightarrow \sin x \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = 2 \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow \sin x = 0, \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x$	0,25

	$+) \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $+) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi, 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$ Các nghiệm đều tmđk nên phương trình có nghiệm: $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.	0,25
2	Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} \\ v = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases}$ ta có : $u^2 - 4v^2 = u - 2v \Leftrightarrow (u - 2v)(u + 2v - 1) = 0$ Giải hệ $\begin{cases} u - 2v = 0 \\ u - 2v = 9x - 3 \end{cases}$ ta được nghiệm $x = 1/3$ Giải hệ $\begin{cases} u + 2v = 1 \\ u - 2v = 9x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = 9x - 2 \\ 4v = 4 - 9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{56}{65} \\ x = \frac{56}{65} \text{ hay } x = 0 \end{cases}$ (so đk loại) kết luận pt có nghiệm $x = 1/3$	
3	Nhận xét : VP(*) là hệ số của x^{k+2015} trong khai triển $(1+x)^{n+2015}$ VT(*) là hệ số của x^{k+2015} trong khai triển $(x+1)^{2015}(1+x)^n$ Mặt khác $(1+x)^{n+2015} = (x+1)^{2015}(1+x)^n$ Hệ số của x^{k+2015} trong khai triển $(1+x)^{n+2015}$ bằng hệ số của x^{k+2015} trong khai triển $(x+1)^{2015}(1+x)^n$ Suy ra . $C_{2015}^0 C_n^k + C_{2015}^1 C_n^{k+1} + C_{2015}^2 C_n^{k+2} + \dots + C_{2015}^{2015} C_n^{k+2015} = C_{n+2015}^{k+2015} (0 \leq k \leq n-2015) (*)$	
4	Ta có $\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$ Với $a=20^\circ$ ta có : $\tan 60^\circ = \frac{3 \tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} \Leftrightarrow \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0 (*)$ Vậy : $\tan^2 20^\circ$ là nghiệm của PT(*) Làm tương tự ta có $\tan^2 40^\circ, \tan^2 80^\circ$ cũng là nghiệm của PT(*)	
	$M(x; y) \xrightarrow{F} M'(x'; y') \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ $N(x_1; y_1) \xrightarrow{F} M'(x'_1; y'_1) \begin{cases} x'_1 = ax_1 + by_1 \\ y'_1 = cx_1 + dy_1 \end{cases}$	

5		$MN = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$ $M'N' = \sqrt{(x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2}$ $= \sqrt{(x_1 - x)^2 \cdot (a^2 + c^2) + (y_1 - y)^2 \cdot (b^2 + d^2) + 2(x_1 - x)(y_1 - y)(ab + cd)}$ $= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = MN.$ $\Rightarrow F$ là phép dời hình	
6	1, 0 điểm		
	a	Ta có $(1 + 2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (2x)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^k$. Khi đó, suy ra $a_k = C_n^k 2^k$ Do đó, ta có $a_0 = C_n^0; a_1 = 2C_n^1; a_2 = 4C_n^2$ Vậy $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1 \Leftrightarrow C_n^0 + 16C_n^1 = 8C_n^2 + 1 \Leftrightarrow 1 + 16n = \frac{8n(n-1)}{2!} + 1$ $16n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 4 = n-1 (n > 0) \Leftrightarrow n = 5$	0,25
	b	+ Số các số trong tập hợp A bằng: $6! - 5! = 600$. + Số các số trong tập A mà mỗi số có chữ số 0 và 5 đứng cạnh nhau bằng: $5! + 4 \cdot 4! = 216$. Xác suất của biến cố cần tìm: $P = 1 - \frac{216}{600} = 0,64$.	0,25
7	1,0 điểm		
		Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.  $(MNP) \cap (ABC) = MN$; $(MNP) \cap (ACD) = NP$ + P là điểm chung của hai mp (MNP) và (ABD) có $MN \subset (MNP)$ + $AB \subset (ABD)$ + $MN \parallel AB$ $\Rightarrow$ Giao tuyến của (MNP) và (ABD) là đường thẳng qua P và song song với AB cắt BD tại Q. Ta có: $(MNP) \cap (ABD) = PQ$; $(MNP) \cap (BCD) = MQ$ Thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác MNPQ.	

		Ta có $MN \parallel PQ = \frac{1}{2} AB$ nên MNPQ là hình bình hành.	
8	1,0 điểm		
		 Ta có $AB \perp AD : x - 2y + 3 = 0$ và AB đi qua $F(4; -4)$ $\Rightarrow AB : 2x + y - 4 = 0$. Khi đó $A = AB \cap AD \Rightarrow A(1; 2)$	0,25
		Ta có đường thẳng EF đi qua hai điểm $E(2; -5)$ và $F(4; -4)$. Do đó ta lập được phương trình $EF : x - 2y - 12 = 0$ Suy ra $EF \parallel AD \Rightarrow EF \perp AB$ tại F. Khi đó, ta $\triangle ABC = \triangle EFB$ vì $AC = BE, \widehat{EBF} = \widehat{BCA}$ (cùng phụ với $\widehat{HBC}$) $\Rightarrow AB = EF = \sqrt{5}$.	0,25
		Ta có $B \in AB : 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow B(b; 4 - 2b), b > 0$. Vậy $AB = \sqrt{5} \Leftrightarrow (b - 1)^2 + (2 - 2b)^2 = 5 \Leftrightarrow 5b^2 - 10b = 0 \Leftrightarrow b = 2 (do b > 0) \Rightarrow B(2; 0)$ Ta có $BC \perp AB : 2x + y - 4 = 0$ và BC đi qua $B(2; 0) \Rightarrow BC : x - 2y - 2 = 0$	0,25
		AC đi qua $A(1; 2)$ và vuông góc với $BE \Rightarrow AC$ nhận $\overrightarrow{BE} = (0; -5)$ là véc tơ pháp tuyến $\Rightarrow AC : -5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$. Khi đó, ta có $C = AC \cap BC \Rightarrow C(6; 2)$ CD đi qua $C(6; 2)$ và $CD \perp AD : x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow CD : 2x + y - 14 = 0$. Khi đó $D = CD \cap AD \Rightarrow D(5; 4)$. Vậy ta có tọa độ $A(1; 2), B(2; 0), C(6; 2), D(5; 4)$.	0,25
9		$\begin{cases} x^3 - 7y^3 + 3xy(x + y) - 24y^2 + 3x - 27y = 14 & (1) \\ \sqrt{3 - x} + \sqrt{y + 4} = x^3 + y^2 - 5 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	
		Đkxđ $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq -4 \end{cases}$ Từ (1) ta có $(x + y)^3 + 3(x + y) = (2y + 2)^3 + 3(2y + 2)$ $\Leftrightarrow (x - y - 2) \left[(x + y)^2 + (x + y)(2y + 2) + (2y + 2)^2 + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow y = x - 2$. Suy ra $-2 \leq x \leq 3$.	0,25

	Thế vào (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \frac{1}{3}(x+4) + \sqrt{3-x} - \frac{1}{3}(-x+5) = (x^2 - x - 2)(x+2)$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(3(x+2) + \frac{1}{3\sqrt{x+2} + x+4} + \frac{1}{3\sqrt{3-x} + 5-x} \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$	0,25
	Với $x=2 \Rightarrow y=0; x=-1 \Rightarrow y=-3$. KL $(x; y) = (-1; -3), (x; y) = (2; 0)$	0,25
10	1,0 điểm	
	Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$ Đặt $\sqrt{zy} = 2 \cos A, \sqrt{xz} = 2 \cos B, \sqrt{xy} = 2 \cos C$, trong đó A, B, C là các góc nhọn. Từ giả thiết suy ra $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \Leftrightarrow (\cos C + \cos(A-B))(\cos C + \cos(A+B)) = 0$ $\Leftrightarrow \cos C + \cos(A+B) = 0$ Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác. Ta có $z = \frac{2 \cos A \cos B}{\cos C}; y = \frac{2 \cos A \cos C}{\cos B}; x = \frac{2 \cos C \cos B}{\cos A}$	0,25
	YCBT $\Leftrightarrow \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2 \cos A \cos B \cos C} \geq \frac{8 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos A \cos B \cos C}$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \geq 4 \sin A \sin B \sin C$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$	0,25
	$\frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \right)^3} + \frac{1}{2 \left(\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{3} \right)^3}$	0,25
	$\geq \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$	0,25

-----Hết-----

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 22****Ngày 04 tháng 11 năm 2017****Câu 1 (1,0 điểm).** Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$ **Câu 2 (1,0 điểm).** Giải bất phương trình $2(x-2)(\sqrt{x+1}+1) < 5x-x^2$.**Câu 3 (1,0 điểm).** Tính tổng sau đây : $S = \frac{A_{2017}^0}{0!} + \frac{A_{2017}^1}{1!} + \frac{A_{2017}^2}{2!} + \dots + \frac{A_{2017}^{2017}}{2017!}$ **Câu 4 (1,0 điểm).** Tìm GTLN, GTNN của $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ **Câu 5 (1,0 điểm).** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

- a. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}(-2; 3)$.
- b. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ và cắt đường tròn (C) tạo thành một dây cung có độ dài bằng 4.

Câu 6 (1,0 điểm). Giải phương trình : $\cos\left(x - \frac{11\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = 0$

Câu 7 (1,0 điểm).

Giải U21 Quốc tế báo Thanh Niên – Cúp Clear Men 2017 quy tụ 6 đội bóng gồm: ĐKVĐ U21 HA.GL, U21 Singapore, U21 Thái Lan, U21 Báo Thanh niên Việt Nam, U21 Myanmar và U19 Hàn Quốc. Các đội chia thành 2 bảng A, B, mỗi bảng 3 đội. Việc chia bảng được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai đội tuyển U21 HA.GL và U21 Thái Lan nằm ở hai bảng khác nhau.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , các điểm $M(2; -1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC ; điểm $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trực tâm tam giác AMN . Tìm tọa độ điểm C , biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$.

Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 2y = 0 \\ 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}.$$

-----Hết-----

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2018 SỐ 23

Câu 1.(4 điểm)

1. Giải phương trình: $(\sqrt{3}+1)\cos^2 x + (\sqrt{3}-1)\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ 2y^2 - 3z^2 = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (2 điểm)

Giả sử A, B, C, D lần lượt là số đo các góc $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ của tứ giác lồi $ABCD$ bất kì.

1. Chứng minh rằng $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -\sin \frac{A}{3} + \sin B + \sin C + \sin D$.

Câu 3. (1 điểm)

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên thuộc vào tập A . Tính xác suất để chọn được một số thuộc A và số đó chia hết cho 9.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC . Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại điểm I ; đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng BC tại điểm N ; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1 . Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M . Biết rằng $BM = MN$ và $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$. Tính các góc của tam giác ABC .

Câu 5. (1 điểm)

Cho hàm số $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(3x) \geq f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh rằng $f(x) \geq x$ với mọi $x > 0$.

-----Hết-----

ĐỀ LUYỆN THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2018 SỐ 24

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình. $\sqrt{\cos x} + \cos^2 x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của: $(x^2 + x + \frac{1}{4})(1 + 2x)^{10}$

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^3 + x^2y - 3x^2 - xy = 4 \\ x^2 + 2x + y = 4 \end{cases}$$

Câu 4 (1,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}} \quad (1)$

Câu 5 (1,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB = 2AD$, $CD = 3AD$. Đường thẳng BD có phương trình $x - 2y + 1 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(4; 2)$. Tìm tọa độ đỉnh A biết rằng diện tích $ABCD$ bằng 10 và điểm A có hoành độ nhỏ hơn 2.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc} \leq 1$

Câu 7 (2,0 điểm)

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. M là trung điểm của cạnh SD , G là trọng tâm của tam giác ACD .

a. Tìm giao tuyến của $mp(AMG)$ và $mp(SCD)$?

b. Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và $mp(SAC)$? Tính tỉ số $\frac{IB}{IM}$?

Câu 8. (1,0 điểm)

Một thùng đựng 12 hộp sữa. Trong 12 hộp đó có 5 hộp sữa cam, 7 hộp sữa dâu. Lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa trong thùng, tính xác suất để trong 3 hộp sữa được lấy ra có ít nhất 2 hộp sữa cam.

Câu 9. (1,0 điểm)

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có: $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$

..... Hết.....

LUYỆN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2018 SỐ 25

Câu 1 (0,5 điểm). Không dùng máy tính. Tính $\sin 18^\circ$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 4x + 2\sin^3 x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \cos 2x$.

Câu 3 (0,5 điểm). Giải bất phương trình $(n^2 - 5)C_n^4 + 2C_n^3 \leq 2A_n^3$

Câu 4 R(1,0 điểm). Chọn ngẫu nhiên 3 số từ tập $S = \{1, 2, \dots, 11\}$. Tính xác suất để tổng ba số được chọn là 12.

Câu 5 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 6 (1,0 điểm). Giải bất phương trình:
$$\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}.$$

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và đường thẳng Δ : $3x + 4y - 20 = 0$. Chứng tỏ rằng đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C). Tam giác ABC có đỉnh A thuộc (C), các đỉnh B và C cùng nằm trên đường thẳng Δ sao cho trung điểm cạnh AB thuộc (C). Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết rằng trực tâm H của tam giác ABC trùng với tâm của đường tròn (C) và điểm B có hoành độ dương.

Câu 8 (3,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD, gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với SA.

1. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB).
2. Xác định thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình chóp
3. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Câu 9 (1,0 điểm). Cho các số thực $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|.$$

----- Hết -----

LUYỆN ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH NĂM 2018 SỐ 26

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình:
$$\frac{2\sqrt{3} \sin x (1 + \cos x) - 4 \cos x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - 3}{2 \sin x - 1} = 0$$

Câu 2. (1,0 điểm). Giải phương trình: $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

Câu 3. (1,0 điểm). Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 \\ x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Câu 4 (1,0 điểm): Tính tổng: $S = \frac{1}{1.2} C_n^0 + \frac{1}{2.3} C_n^1 + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} C_n^n$ với n nguyên dương.

Câu 5 (1,0 điểm):

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Trên các cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MB + NB = AB$. Biết $P(\sqrt{3}; 1)$ thuộc đường thẳng DN và đường phân giác trong của góc $\widehat{MDN}$ có phương trình là $d: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh D của hình thoi ABCD.

Câu 6(1,0 điểm)

Trong kỳ bầu cử Quốc hội khóa XIV diễn ra vào ngày 22/05/2018, lớp 12A1 trường THPT Dân tộc nội trú có 22 bạn đủ 18 tuổi được đi bầu cử, trong đó có 12 bạn nữ và 10 bạn nam. Chọn ngẫu nhiên trong số đó 6 bạn tham gia công tác chuẩn bị cho ngày bầu cử. Tìm xác suất để 6 bạn được chọn có ít nhất 4 bạn nữ.

Câu 7.(1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh:

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right)$$

Câu 8.(2,0 điểm)

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

1) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của tứ diện.

2) Thiết diện của tứ diện ABCD cắt bởi mp(MNP) là hình gì?

Câu 9.(1,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(1;3)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

Tìm ảnh của điểm M và ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (-1;2)$.

..... HẾT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 27

Câu 1. (1,0 điểm) Với n là số nguyên dương, chứng minh hệ thức

$$\left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + 3\left(C_n^3\right)^2 + \dots + (n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2 + n\left(C_n^n\right)^2 = \frac{n}{2}C_{2n}^n$$

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho đa giác đều có 15 đỉnh. Gọi M là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đã cho. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập M , tính xác suất để tam giác được chọn là một tam giác cân nhưng không phải tam giác đều.

Câu 4. (1,0 điểm).

Giải phương trình: $\sqrt{(x-2)(4-x)} + \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \frac{x-1}{2} + \sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu 5. (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y} + x + 2y = 2 + (x+y-1)\sqrt{y} \\ y^2 + 2x + \sqrt[3]{y^4 - 2y^2} = 4 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc cạnh AB, CD .

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với SA .

4. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB) .

5. Xác định thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình chóp

6. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Câu 7. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường tròn $(H): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ và $(G): (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$. Hãy chỉ ra một phép vị tự tỉ số $k = -3$ (nếu có) để biến (H) thành (G)

Câu 8. (1,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có trọng tâm G . Gọi E, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ; D là điểm đối xứng với H qua A , I là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng CD . Biết điểm $D(-1; -1)$, đường thẳng IG có phương trình $6x - 3y - 7 = 0$ và điểm E có hoành độ bằng 1. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Câu 9. (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz$

-----Hết-----



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 28

Câu 1. (1.0 điểm) Tìm m để phương trình $x^3 - 2x^2 + x = m(x-1)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.

Câu 2. (1 điểm) $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x \cdot \cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$

Câu 3. (1.0 điểm) Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{1}{4}$. Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

Chứng minh rằng $\cot A + \cot B + \cot C = a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 4. (1.0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y^2)(y-2x) = -6x \\ 3x^2 - 5x + 3xy^2 + y = 0 \end{cases}$$

Câu 5. (1.0 điểm) Cho hai số dương a, b có tổng bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a^2 + 2} + \frac{1}{4b^2 + 2} + \frac{2016}{ab}.$$

Câu 6. (1,0 điểm) Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 7x + 6 = (3x+7)\sqrt{3x^2 + 6x + 2}$.

Câu 7. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi M là trung điểm cạnh AB , G là trọng tâm tam giác AMC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh đường thẳng GI vuông góc với đường thẳng CM .

Câu 8. (2.0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2016} + \frac{2014u_n}{2016} \end{cases}$$

a) Chứng minh: (u_n) là dãy số tăng.

b) Với mỗi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n+1} - 2}$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$.

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n < 2016.$$

Câu 9. (1,0 điểm) Tìm số nguyên dương lẻ n thỏa mãn

$$\frac{2^2 C_n^0}{1 \cdot 2} - \frac{2^3 C_n^1}{2 \cdot 3} + \frac{2^4 C_n^2}{3 \cdot 4} - \dots - \frac{2^{n+2} C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{2017}.$$

----- **Hết** -----

LUYỆN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 29

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2\sqrt{11-2y} + 4\sqrt{x-y+5}$, với x, y là các số thực thỏa

$$mãn x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0.$$

Bài 2: Cho các số thực $a, b, c \geq 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm phần nguyên của $B = \frac{a+b+c}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức $C = 2009^{2006} \cdot C_{2008}^1 + 2009^{2004} \cdot C_{2008}^3 + \dots + 2009^2 \cdot C_{2008}^{2005} + C_{2008}^{2007}$.

Bài 4: Giải phương trình lượng giác với $x \in (0, 2\pi)$:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x.$$

Bài 5: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4y^2 = 17$.

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y - 10 \\ y^2 = z^3 + z^2 + z - 10 \\ z^2 = x^3 + x^2 + x - 10 \end{cases}$$

Bài 7: Giả sử ba điểm G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam

giác nào đó. Chứng minh rằng $2 \cdot \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$.

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi $\triangle ABC$ nhọn ta luôn có $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C > 1$.

Bài 9: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3 - y) + 2y \cdot (3f^2(x) + y^2) = f(y + f(x))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 10: Cho các hằng số thực a, b, c với $a \neq 0$. Chứng minh rằng đường thẳng (d) $x = \frac{-b}{2a}$ là trục đối

xứng của parabol (P) $y = ax^2 + bx + c$.

LUYỆN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH 2018 SỐ 30

Câu 1 (1,0 điểm). Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \frac{4 + 2 \sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1)$.

Câu 2 (2,0 điểm). Chứng minh $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Câu 3 (1,0 điểm).

Từ các số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, mỗi số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau mà tổng ba chữ số cuối nhỏ hơn tổng ba chữ số đầu là 3 đơn vị.

Câu 4 (1,0 điểm).

Giải phương trình: $x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 - 7x^3 + 3xy(x+y) = 12x^2 + 6x + 1 \\ \sqrt{y^2 - x^2 - 4} + (y-5)(x^2 + 2x + 2015) - \sqrt{y} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 6 (1,0 điểm).

Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Chứng minh rằng $HK \perp IJ$.

Câu 7 (1,0 điểm).

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có:

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$$

Câu 8 (1,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ và điểm E thuộc cạnh BC . Một đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt CD tại F , đường thẳng chứa đường trung tuyến AM của tam giác AEF cắt CD tại K . Tìm tọa độ điểm D biết $A(-6;6), M(-4;2), K(-3;0)$.

Câu 9 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức:
$$P = \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}}$$

-----Hết-----

Xem tiếp tài liệu tại: <https://vndoc.com/tai-lieu-hoc-tap-lop-11>