

SỞ GD-ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT YÊN PHONG SỐ 2

(Đề có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: Toán – Lớp 10

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Thi ngày: 10/3/2021

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho hàm số bậc hai $y = x^2 - 2(m - 1)x - 3m + 4$ (1), với m là tham số.

- Vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.
- Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số (1) luôn đi qua với mọi giá trị của m .
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 1$.

Câu 2: (3,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , với $A(2;3)$, $B(-2;-1)$, $C(1;5)$.

- Tìm tọa điểm D sao cho $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua D và tạo với đường thẳng AB góc 45° .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 3: (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình và bất phương trình sau đây:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2y + 2x^2 + 3y = 15 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{2x^2 - 8x + 4} > x - 2.$$

Câu 4: (2,0 điểm)

Cho ba số thực $x, y, z \in [0;3]$, thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz.$$

===== Hết =====

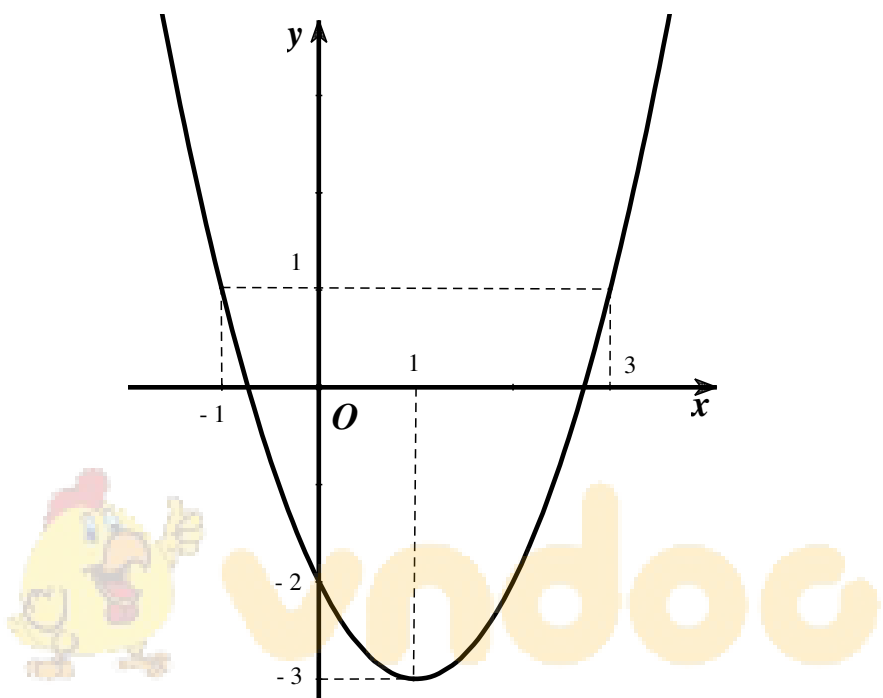
Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD-ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT YÊN PHONG SỐ 2

(HDC có 03 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
KÌ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: Toán – Lớp 10

	Lời giải sơ lược	Điểm
Câu 1: (2,0 điểm)		
	a) Với $m = 2$ thì hàm số (1) trở thành $y = x^2 - 2x - 2$ và có đồ thị như sau 	1,0
	b) Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số (1) luôn đi qua với mọi giá trị của m. Ta có $y_0 = x_0^2 - 2(m-1)x_0 - 3m + 4, \forall m \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow m(2x_0 + 3) + (y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 4) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 3 = 0 \\ y_0 - x_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ y_0 = \frac{13}{4} \end{cases}.$ Vậy $M(-\frac{3}{2}; \frac{13}{4})$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số (1) luôn đi qua với mọi giá trị của m.	0,5
	c) Phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3m + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 + m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ hoặc $m < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ (2). Lúc này, theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1)$, $x_1 x_2 = 4 - 3m$. Nhận thấy $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{4m-3}{3}, x_2 = \frac{2m-3}{3}$, từ đây thế vào	

	$x_1 x_2 = 4 - 3m$ và biến đổi ta được $8m^2 + 9m - 27 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-9 \pm 3\sqrt{105}}{16}$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn (2). Vậy với $m = \frac{-9 \pm 3\sqrt{105}}{16}$ thì đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 1$.	0,5
Câu 2: (3,0 điểm)		
	a) Gọi $D(x_0; y_0)$ thì $\overrightarrow{DA} = (2 - x_0; 3 - y_0), \overrightarrow{DB} = (-2 - x_0; -1 - y_0), \overrightarrow{DC} = (1 - x_0; 5 - y_0)$, $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = (8 - 4x_0; 24 - 4y_0)$. Do đó $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4x_0 = 0 \\ 24 - 4y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 6 \end{cases}.$ Vậy $D(2; 6)$.	1,0
	b) Đường thẳng d đi qua điểm $D(2; 6)$, có một vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (a; b), a^2 + b^2 \neq 0$. Phương trình của d có dạng $a(x - 2) + b(y - 6) = 0$. Vì $\overrightarrow{AB} = (-4; -4)$ nên $\vec{n}_2 = (1; -1)$ là một vector pháp tuyến của đường thẳng AB. Ta có $\cos 45^\circ = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ a - b }{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \Leftrightarrow -2ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$	0,5
	Nếu $a = 0$ thì $b \neq 0$ nên d có phương trình $y - 6 = 0$. Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ nên d có phương trình $x - 2 = 0$. Vậy có 2 đường thẳng đi qua D và tạo với đường thẳng AB góc 45° có phương trình lần lượt là $x - 2 = 0, y - 6 = 0$.	0,5
	c) Với $A(2; 3), B(-2; -1), C(1; 5)$ thì $AB = 4\sqrt{2}, BC = 3\sqrt{5}, CA = \sqrt{5}$, $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = 2(\sqrt{2} + \sqrt{5})$. Diện tích tam giác ABC là	0,5
	$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} = 6.$ Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.	0,5
Câu 3: (3,0 điểm)		
	a) $\begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y = 15 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y = 15 \\ 2(x^2 y + 2x^2 + 3y) + x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y = 35 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y = 15 \\ (x^2 + y)^2 + 2(x^2 + y) - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + 2x^2 + 3y = 15 \\ \begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^2 + y = -7 \end{cases} \end{cases}$	0,75
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 5 - x^2 \\ x^2(5 - x^2) + 2x^2 + 3(5 - x^2) = 15 \\ y = -7 - x^2 \\ x^2(-7 - x^2) + 2x^2 + 3(-7 - x^2) = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x^2 \\ x^2(4 - x^2) = 0 \\ y = -7 - x^2 \\ -x^4 - 8x^2 = 36 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ x = \pm 2 \\ y = 1 \end{cases}.$	0,75

	$\text{b) } \sqrt{2x^2 - 8x + 4} > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 \geq 0 \\ x - 2 < 0 \\ 2x^2 - 8x + 4 > (x - 2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 - \sqrt{2} \\ x > 4 \end{cases}.$	1,5
Câu 4: (2,0 điểm)		
	Vì $x, y, z \in [0; 3]$, và $x + y + z = 4$ nên $2xyz + (3 - x)(3 - y)(3 - z) \geq 0$ $\Leftrightarrow 2xyz + 27 - 9(x + y + z) + 3(xy + yz + zx) - xyz \geq 0$ $\Leftrightarrow 27 - 9.4 + 3(xy + yz + zx) + xyz \geq 0$ $\Leftrightarrow 6(xy + yz + zx) + 2xyz \geq 18$ $\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 6(xy + yz + zx) + 2xyz \geq 18 + 3(x^2 + y^2 + z^2)$ $\Leftrightarrow 3(x + y + z)^2 + 2xyz \geq 18 + 3(x^2 + y^2 + z^2)$ $\Leftrightarrow 3.4^2 + 2xyz \geq 18 + 3(x^2 + y^2 + z^2)$ $\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz \leq 30.$	1,0
	Dấu “=” xảy ra khi trong ba số x, y, z có một số bằng 0, một số bằng 1 và một số bằng 3. Vậy $\max P = \max \{3(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz\} = 30.$	0,5

