

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC THÁNG 4 LỚP 8 THCS
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 120 phút
Ngày thi: 23/3/2021

Câu 1: (3,0 điểm)

1. Chứng minh $4.5^{n+1} - 2^{n+3} - 2.5^n - 2^n$ chia hết cho 18 với mọi số nguyên dương n .
2. Phân tích đa thức $3x^3 + 13x^2y + 13xy^2 + 3y^3$ thành nhân tử.

Câu 2: (3,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{x-y}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)} \right]$ với $xy \neq 0, x \neq \pm y$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tính giá trị của A khi x, y thỏa mãn $x^3 - 6y^3 = xy(x-y)$.

Câu 3: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} + 2 = \frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1}$.
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $xy^2 + 2xy - 27y + x = 0$.

Câu 4: (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 8$ là số chính phương.
2. Cho 2021 số không âm $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:
 i) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2021}$; ii) $x_1 + x_2 \leq 2021$; iii) $x_3 + x_4 + \dots + x_{2021} \leq 2021$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2021}^2$.

Câu 5: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là một điểm tùy ý trên cạnh BC (M khác B và C). Kẻ tia Ax vuông góc với tia AM và cắt CD tại N . Gọi H là trung điểm của MN , tia AH cắt CD tại K . Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AK ở E .

1. Chứng minh $AM = AN$ và tứ giác $EMKN$ là hình thoi.
2. Chứng minh $NA^2 = NC.NK$.
3. Khi điểm M thay đổi trên cạnh BC , chứng minh chu vi tam giác MKC không đổi.

Câu 6: (2,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC > BD$. Vẽ CE vuông góc với AB tại E và CF vuông góc với AD tại F . Cho biết đường chéo $AC = a$, hãy tính $AB.AE + AD.AF$ theo a .

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC THÁNG 4 LỚP 8 THCS

TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU

Năm học: 2020 - 2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (3,0 điểm)

1. Chứng minh $4.5^{n+1} - 2^{n+3} - 2.5^n - 2^n$ chia hết cho 18 với mọi số nguyên dương n .
2. Phân tích đa thức $3x^3 + 13x^2y + 13xy^2 + 3y^3$ thành nhân tử.

Lời giải

1) Với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\begin{aligned} 4.5^{n+1} - 2^{n+3} - 2.5^n - 2^n &= (4.5^{n+1} - 2.5^n) - (2^n + 2^{n+3}) \\ &= 5^n \cdot (4.5 - 2) - 2^{n-1} (2 + 2^4) \\ &= 5^n \cdot 18 - 2^{n-1} \cdot 18 \end{aligned}$$

Vì $5^n \cdot 18 : 18$ và $2^{n-1} \cdot 18 : 18$ nên $(5^n \cdot 18 - 2^{n-1} \cdot 18) : 18$ hay $4.5^{n+1} - 2^{n+3} - 2.5^n - 2^n$ chia hết cho 18

2) Ta có: $3x^3 + 13x^2y + 13xy^2 + 3y^3 = (3x^3 + 3y^3) + (13x^2y + 13xy^2)$

$$\begin{aligned} &= 3(x^3 + y^3) + 13xy(x + y) \\ &= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 13xy(x + y) \\ &= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 13xy) \\ &= 3(x + y)(x^2 + 12xy + y^2) \end{aligned}$$

Câu 2: (3,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{x-y}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)} \right]$ với $xy \neq 0, x \neq \pm y$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tính giá trị của A khi x, y thỏa mãn $x^3 - 6y^3 = xy(x - y)$.

Lời giải

1) Với $xy \neq 0, x \neq \pm y$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x-y}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2x^2y}{(x^2-y^2)^2} - \frac{x^2}{(x^2-y^2)(x+y)} \right] \\ A &= \frac{x-y}{xy} : \left[\frac{y^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2x^2y}{(x-y)^2(x+y)^2} - \frac{x^2}{(x-y)(x+y)^2} \right] \end{aligned}$$

$$A = \frac{x-y}{xy} : \left[\frac{y^2(x+y)}{(x-y)^2(x+y)^2} - \frac{2x^2y}{(x-y)^2(x+y)^2} - \frac{x^2(x-y)}{(x-y)^2(x+y)^2} \right]$$

$$A = \frac{x-y}{xy} : \frac{xy^2 + y^3 - 2x^2y - x^3 + x^2y}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$$A = \frac{x-y}{xy} : \frac{xy^2 + y^3 - x^2y - x^3}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$$A = \frac{x-y}{xy} : \frac{(x+y)^2(y-x)}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$$A = \frac{x-y}{xy} \cdot \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{(x+y)^2(y-x)}$$

$$A = -\frac{(x-y)^2}{xy}$$

2) Ta có: $x^3 - 6y^3 = xy(x-y)$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6y^3 - x^2y + xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8y^3 - xy^2 + 2y^3 - x^2y + 2xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 8y^3) - (xy^2 - 2y^3) - (x^2y - 2xy^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - y^2(x-2y) - xy(x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y) \left[\left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{11}{4}y^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2y.$$

Thay $x = 2y$ vào biểu thức $A = -\frac{(x-y)^2}{xy}$ ta được $A = -\frac{(2y-y)^2}{2y^2} = -\frac{1}{2}$.

Câu 3: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} + 2 = \frac{x^2 - 5x + 1}{2x + 1}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $xy^2 + 2xy - 27y + x = 0$.

Lời giải

1) ĐKXD $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4x+1}{x+1} + 2 &= -\frac{x^2-5x+1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{(x^2-4x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} + \frac{2(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} = -\frac{(x^2-5x+1)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} \\
&\Rightarrow (x^2-4x+1)(2x+1) + 2(x+1)(2x+1) = -(x^2-5x+1)(x+1) \\
&\Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x^2(x-1) - 4(x-1)(x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - 4x - 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(3x+2)(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{tmđk}).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{1; 2; -\frac{2}{3}\right\}$.

2) Từ $xy^2 + 2xy - 27y + x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{27y}{(y^2 + 2y + 1)} = \frac{27y}{(y+1)^2} \quad (*)$

Vì $y \geq 1$ nên $(y+1)^2 \geq 4$.

Khi đó $0 < \frac{27y}{(y+1)^2} \leq \frac{27}{4}$ hay $0 < x \leq \frac{27}{4}$

Mà x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Thay lần lượt x vào $(*)$ thì khi $x=6$ tìm được $y=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 8$ là số chính phương.

2. Cho 2021 số không âm $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

i) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{2021}$; ii) $x_1 + x_2 \leq 2021$; iii) $x_3 + x_4 + \dots + x_{2021} \leq 2021$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2021}^2$.

Lời giải

1) Xét $A = n^2 + 3n + 8$, nếu A là số chính phương thì $4A$ là số chính phương.

Khi đó giả sử $4A = a^2 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

suy ra $4n^2 + 12n + 32 = a^2$.

$$\Leftrightarrow (2n)^2 + 2.2n.3 + 3^2 + 23 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (2n+3)^2 + 23 = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (2n+3)^2 = 23$$

$$\Leftrightarrow (a+2n+3)(a-2n-3) = 23 = 23.1$$

Vì $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}^*$ nên $a+2n+3 > 0$ và $a+2n+3 > a-2n-3$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a+2n+3=23 \\ a-2n-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=12 \\ n=4 \end{cases} \text{ (thỏa)}$$

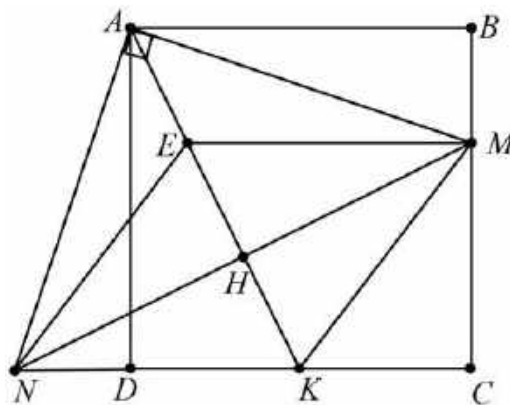
Thử lại thấy $n=4$ thì $A = 4^2 + 3.4 + 8 = 36$ là số chính phương.

Vậy $n=4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là một điểm tùy ý trên cạnh BC (M khác B và C). Kẻ tia Ax vuông góc với tia AM và cắt CD tại N . Gọi H là trung điểm của MN , tia AH cắt CD tại K . Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AK ở E .

1. Chứng minh $AM = AN$ và tứ giác $EMKN$ là hình thoi.
2. Chứng minh $NA^2 = NC.NK$.
3. Khi điểm M thay đổi trên cạnh BC , chứng minh chu vi tam giác MKC không đổi.

Lời giải



1. Chứng minh $AM = AN$ và tứ giác $EMKN$ là hình thoi.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ADN$ có:

$$AB = AD; \widehat{ABM} = \widehat{ADN} = 90^\circ; \widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{DAM} \text{)}$$

Nên $\triangle ABM = \triangle ADN$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $AM = AN$ (cạnh tương ứng).

Ta có: $\triangle HEM = \triangle HKN$ (góc – cạnh – góc) nên $ME = NK$ (cạnh tương ứng) (1)

Mà $ME \parallel AB \Rightarrow ME \parallel DC \Rightarrow ME \parallel NK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EMKN$ là hình bình hành. (3)

Lại có $AM = AN$ nên $\triangle AMN$ cân tại A , mà H là trung điểm của MN nên AH là đường trung tuyến đồng thời là đường cao. Suy ra $AH \perp MN$ hay $EK \perp MN$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $EMKN$ là hình thoi.

2) Chứng minh $NA^2 = NC.NK$.

Ta có $\triangle HNK \sim \triangle CNM$ (g.g) nên $\frac{NK}{MN} = \frac{NH}{NC} \Rightarrow NK.NC = MN.NH$ (*)

$\sim \triangle ANH \sim \triangle MNA$ (g.g) nên $\frac{AN}{MN} = \frac{NH}{NA} \Rightarrow NA^2 = MN.NH$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $NA^2 = NC.NK$.

3. Khi điểm M thay đổi trên cạnh BC , chứng minh chu vi tam giác MKC không đổi.

Ta có: Chu vi tam giác MKC bằng $MK + MC + KC$.

Vì $\triangle ABM = \triangle ADN$ (theo phần 1) nên $MB = ND$.

Mặt khác $EMKN$ là hình thoi nên $MK = NK$.

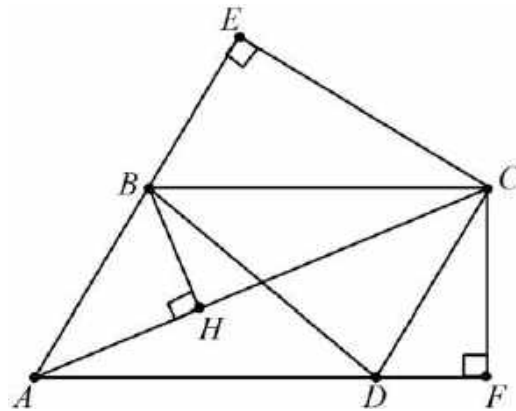
Khi đó $MK + MC + KC = NK + MC + KC = (ND + DK) + KC + MC = MB + DK + KC + MC$
 $= (MB + MC) + (DK + KC) = BC + DC = 2BC$ (không đổi)

Vì B, C cố định nên BC không đổi.

Do đó khi M di chuyển trên BC thì chu vi tam giác MKC không đổi.

Câu 6: (2,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC > BD$. Vẽ CE vuông góc với AB tại E và CF vuông góc với AD tại F . Cho biết đường chéo $AC = a$, hãy tính $AB.AE + AD.AF$ theo a .

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$).

Ta có $\triangle AEC$ đồng dạng với $\triangle ABH$ (góc nhọn) nên: $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AH.AC$ (1)

Xét hai tam giác vuông $\triangle AFC$ và $\triangle CHB$ có $\widehat{CAF} = \widehat{BCH}$ (so le trong)

nên $\triangle AFC \sim \triangle CHB$ (góc nhọn) suy ra $\frac{AF}{CH} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AF.BC = AC.CH$

Mà $BC = AD$ nên $AF \cdot AD = AC \cdot CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \cdot AE + AF \cdot AD = AC \cdot AH + AC \cdot CH = AC \cdot (AH + CH) = AC^2 = a^2$.

Vậy điều phải chứng minh.

===== **HẾT** =====

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

2. Giải phương trình $\|x| - 3| = x + 1$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 = 2010$.

2. Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Bài 3: (3,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $T = \frac{8x+12}{x^2+4}$

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Đường thẳng qua A vuông góc với MN tại I , cắt BC tại K .

1. Chứng minh: $AN.AC = AB.AM$

2. Chứng minh rằng K là trung điểm của BC .

3. Chứng minh: $AB^2 = BH.HC$ và $AM.BM + AN.NC \leq AK^2$.

4. Tìm điều kiện của tam giác ABC để diện tích hình chữ nhật $AMHN$ lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$.

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI VÒNG II OLYMPIC THCS HỒNG DƯƠNG

Năm học: 2020-2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

2. Giải phương trình $||x| - 3| = x + 1$

Lời giải

1. Xét biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$ Không có điều kiện $x \neq -1$ trừ 0,25 điểm.

$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

Vậy $x \neq 0, x \neq \pm 1, P = \frac{x^2}{x-1}$.

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$.

$$\Rightarrow 2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (TM ĐKXĐ) hoặc } x = -1 \text{ (không TM ĐKXĐ)}$$

(Nếu không loại $x = -1$ trừ 0,5 điểm)

Vậy $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

2. Giải phương trình $||x| - 3| = x + 1$

- Với $x \geq 0$; phương trình đã cho trở thành $|x - 3| = x + 1$ (1)

Với $x \geq 3$; (1) trở thành: $x - 3 = x + 1$, phương trình vô nghiệm.

Với $0 \leq x < 3$, (1) có nghiệm $x = 1$ (thỏa mãn)

- Với $x < 0$; phương trình đã cho trở thành: $|-x - 3| = x + 1$ (2)

Với $-3 \leq x < 0$; (2) trở thành: $x + 3 = x + 1$, phương trình vô nghiệm.

Với $x < -3$; (2) có nghiệm $x = -2$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài 2: (4,0 điểm)

- Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 = 2010$.
- Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Lời giải

- Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì $x_0^2 - y_0^2 = 2010$.

Ta thấy: x_0^2 và y_0^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1, nên $x_0^2 - y_0^2$ chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 3.

Về phải 2010 chia cho 4 dư 2 (mâu thuẫn với điều giả sử).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

- Ta có: $(n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2 = (n^2 + 10 - 6n)(n^2 + 10 + 6n)$

Để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố, điều kiện cần là $n^2 + 10 - 6n = 1$ và $n^2 + 10 + 6n$ là số nguyên tố $\Leftrightarrow n^2 + 10 - 6n = 1 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$.

Thử lại: Với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố.

Bài 3: (3,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $T = \frac{8x+12}{x^2+4}$

Lời giải

$$T = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{(x^2+8x+16) - (x^2+4)}{x^2+4} = \frac{(x+4)^2}{x^2+4} - 1 \geq -1 \text{ với mọi } x.$$

Do đó: $\min T = -1 \Leftrightarrow x = -4$.

$$T = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{(4x^2+16) - (4x^2-8x+4)}{x^2+4} = 4 - \frac{4(x-1)^2}{x^2+4} \leq 4 \text{ với mọi } x$$

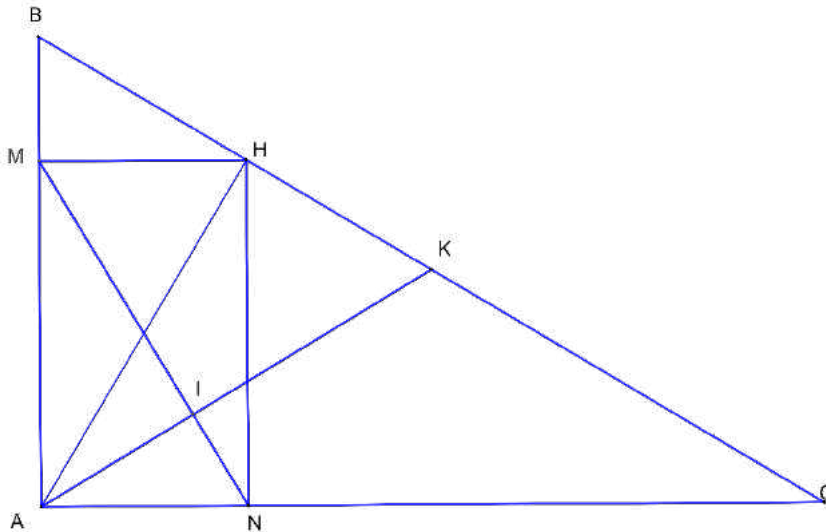
Do đó: $\max T = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Đường thẳng qua A vuông góc với MN tại I , cắt BC tại K .

1. Chứng minh: $AN.AC = AB.AM$
2. Chứng minh rằng K là trung điểm của BC .
3. Chứng minh: $AB^2 = BH.HC$ và $AM.BM + AN.NC \leq AK^2$.
4. Tìm điều kiện của tam giác ABC để diện tích hình chữ nhật $AMHN$ lớn nhất.

Lời giải



1. Chứng minh: $\triangle ACB \sim \triangle HCA$

Ta có: $\triangle HCA \sim \triangle NHA$;

$$\triangle NHA \sim \triangle AMN;$$

Suy ra: $\triangle AMN \sim \triangle ACB$.

$$\text{Suy ra: } \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$$

Suy ra: $AN.AC = AB.AM$ (Điều phải chứng minh).

2. Chứng minh: $\triangle AKC$ cân tại K . Suy ra: K là trung điểm của BC .

3. Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\text{Suy ra: } AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2 = (BH + CH)^2$$

Suy ra: $AH^2 = BH.HC$

Do đó: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = BH.CH + BH^2 = BH(CH + BH)$

$$AB^2 = BH.BC$$

Chứng minh tương tự ta được: $AM.BM = HM^2; AN.CN = HN^2$

Mà $HM^2 + HN^2 = MN^2 = AH^2 \leq AK^2$

4. Diện tích hình chữ nhật $AMHN$ lớn nhất khi và chỉ khi $AM = AN$.

Vì $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ nên $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$.

Suy ra $AB = AC$. Do đó, khi tam giác ABC vuông cân tại A thì diện tích hình chữ nhật $AMHN$ lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} : 59$.

Lời giải

$$5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 51.5^n + 8.64^n = (59 - 8).5^n + 8.64^n = 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$$

Vì $(64^n - 5^n) : (64 - 5)$ nên ta có điều phải chứng minh.

===== **HẾT** =====

**PHÒNG GD&ĐT QUẬN DIỄN CHÂU ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2020 – 2021**

Môn: Toán – Lớp 8 - Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (3,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định rồi rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $A = -1$.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $A = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$.

c) Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm a, b, c, d biết rằng khi chia đa thức lần lượt cho các nhị thức $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ đều có số dư là 6 và tại $x = -1$ thì đa thức đó nhận giá trị bằng -18 .

Câu 3 (3,0 điểm)

a) Tìm x để biểu thức: $E = \frac{-x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1}$ với $x \neq 1$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$.

Câu 4 (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh rằng: tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.

b) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh $AC = 2EF$.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Câu 5 (2,0 điểm)

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 ĐIỂN CHÂU

Năm học: 2020-2021

Câu 1 (3,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định rồi rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A = -1$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2; x \neq 3$.

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

$$A = \left(\frac{2+x}{2-x} + \frac{4x^2}{(2-x)(2+x)} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

$$A = \left(\frac{(2+x)(2+x)}{(2-x)(2+x)} + \frac{4x^2}{(2-x)(2+x)} - \frac{(2-x)(2-x)}{(2-x)(2+x)} \right) : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

$$A = \frac{4+4x+x^2+4x^2-4+4x-x^2}{(2-x)(2+x)} : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

$$A = \frac{4x^2+8x}{(2-x)(2+x)} : \left(\frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \right)$$

$$A = \frac{4x(x+2)}{(2-x)(2+x)} : \frac{x(x-3)}{x^2(2-x)}$$

$$A = \frac{4x(x+2)}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x^2(2-x)}{x(x-3)} = \frac{4x^2}{x-3}$$

b) $A = -1 \Rightarrow \frac{4x^2}{x-3} = -1 \Rightarrow 4x^2 + x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + 4x) - (3x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x+1) - 3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (nhận)} \text{ hoặc } x = \frac{3}{4} \text{ (nhận)}.$$

Vậy $x \in \left\{ -1; \frac{3}{4} \right\}$ thì $A = -1$.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $A = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$.

c) Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm a, b, c, d biết rằng khi chia đa thức lần lượt cho các nhị thức $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ đều có số dư là 6 và tại $x = -1$ thì đa thức đó nhận giá trị bằng -18 .

Lời giải

a) Ta có $ab + bc + ca = 1$ nên

$$1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (ab + bc) + (ca + a^2) = b(a + c) + a(a + c) = (a + c)(a + b)$$

$$\text{Tương tự } 1 + b^2 = (a + b)(b + c); 1 + c^2 = (a + c)(b + c)$$

Do đó $A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = [(a + b)(b + c)(a + c)]^2$ là một số chính phương.

b) Ta có $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$.

$$\Leftrightarrow x^2 + xy - 2013x - 2013y + x - 2013 - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x + y) - 2013(x + y) + (x - 2013) - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2013) + (x - 2013) - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1.$$

Vì x, y nguyên nên ta có bảng sau

$x - 2013$	1	-1
$x + y + 1$	1	-1
x	2014	2012
y	-2014	-2014

Vậy $(x; y) = (2014; -2014), (2012; -2014)$

c) Khi chia đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lần lượt cho các nhị thức $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ đều có số dư là 6 nên theo định lý Bơ zu ta có: $f(1) = f(2) = f(3) = 6$.

Và tại $x = -1$ thì đa thức đó nhận giá trị bằng -18 nên $f(-1) = -18$.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ 8a + 4b + 2c + d = 6 \\ 27a + 9b + 3c + d = 6 \\ -a + b - c + d = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 12 \\ 3a + b + c = 8 \\ 7a + 2b + c = 6 \end{cases} \quad (\text{lấy ba phương trình đầu trừ phương trình cuối})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-4 \\ 3a+b=-3 \end{cases} \text{ (Lấy hai phương trình cuối trừ phương trình đầu)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=11 \\ d=0 \end{cases}$$

Vậy $(a; b; c; d) = (1; -6; 11; 0)$

Câu 3 (3,0 điểm)

a) Tìm x để biểu thức: $E = \frac{-x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1}$ với $x \neq 1$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$.

Lời giải

a)

$$E = \frac{-x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(-x^2 + 2x - 1) - (x - 1) - 10}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-(x-1)^2 - (x-1) - 10}{(x-1)^2} = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{10}{(x-1)^2}$$

$$\text{Khi đó } -E = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{10}{(x-1)^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x-1} = t \text{ thì } -E = 1 + t + 10t^2$$

$$\text{Ta có: } -E = 10t^2 + t + 1 = 10\left(t^2 + 2t \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{400}\right) + \frac{39}{40} = 10\left(t + \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{39}{40} \geq \frac{39}{40}$$

$$\text{Suy ra } E \leq -\frac{39}{40}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } t = -\frac{1}{20} \text{ hay } \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{20} \Leftrightarrow x = -19.$$

$$\text{Vậy } \text{Max} E = -\frac{39}{40} \Leftrightarrow x = -19.$$

$$\text{b) Từ } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ nên } \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

Với $x > 0, y > 0, z > 0$ ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x+y+x+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{x+2y+z} = \frac{1}{x+y+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right);$$

$$\frac{1}{x+y+2z} = \frac{1}{x+z+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Câu 4 (6,0 điểm)

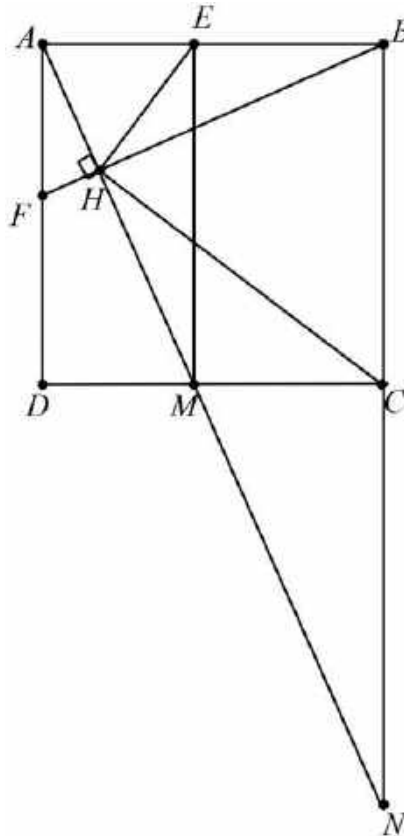
Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh rằng: tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.

b) Biết diện tích tam giác BCH gấp bốn lần diện tích tam giác AEH . Chứng minh $AC = 2EF$.

c) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADM$ và $\triangle BAF$ có:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ; AD = AB; \widehat{MAD} = \widehat{ABF} \text{ (cung phụ với } \widehat{AFB} \text{)}$$

Do đó $\triangle ADM = \triangle BAF$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề), suy ra $DM = AF$ (cạnh tương ứng)

Mà $AE = AF$ (gt) nên $DM = AE$ (1)

Lại có $DM \parallel AE$ do $AB \parallel DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AEMD$ là hình bình hành.

Kết hợp với $\widehat{ADM} = 90^\circ$ suy ra $AEMD$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\triangle HAB$ và $\triangle HFA$ có: $\widehat{ABH} = \widehat{FAH}$ (do $\widehat{ABF} = \widehat{MAD}$ theo a), $\widehat{BHA} = \widehat{AHF} = 90^\circ$

$$\text{Do đó } \triangle HAB \sim \triangle HFA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AF}$$

$$\text{Mà } AB = BC, AF = AE \text{ nên } \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{BC}{AE}$$

$$\text{Lại có } \widehat{HAB} = 90^\circ - \widehat{FAH} = 90^\circ - \widehat{ABH} = \widehat{HBC}$$

$$\text{Xét } \triangle CBH \text{ và } \triangle EAH \text{ có } \frac{BH}{AH} = \frac{BC}{AE} \text{ và } \widehat{HAB} = \widehat{HBC} \text{ nên } \triangle CBH \sim \triangle EAH \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{BCH}}{S_{AEH}} = 4 \text{ nên } \triangle CBH \sim \triangle EAH \text{ theo tỉ số đồng dạng là 2.}$$

$$\text{Suy ra } \frac{BC}{AE} = 2 \text{ hay } \frac{AB}{AE} = 2 \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow F \text{ là trung điểm của } AD.$$

$$\text{Khi đó } EF \text{ là đường trung bình của tam giác } ABD \Rightarrow EF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC \text{ hay } AC = 2EF.$$

$$\text{c) } \triangle ADM \text{ có } CN \parallel AD \text{ nên } \frac{CN}{AD} = \frac{MN}{AM} \Leftrightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{AM^2} = \frac{CN^2}{MN^2} \quad (*) \text{ (Hệ quả Talet)}$$

$$\triangle ABN \text{ có } CM \parallel AB \text{ nên } \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Leftrightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AD} \Leftrightarrow \frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN} \Leftrightarrow \frac{AD^2}{AN^2} = \frac{MC^2}{MN^2} \quad (**) \text{ (Hệ quả Talet)}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } \frac{AD^2}{AM^2} + \frac{AD^2}{AN^2} &= \frac{MC^2}{MN^2} + \frac{CN^2}{MN^2} \\ &\Leftrightarrow AD^2 \left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \right) = \frac{MC^2 + CN^2}{MN^2} \\ &\Leftrightarrow AD^2 \left(\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \right) = \frac{MN^2}{MN^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (\text{ĐPCM}) \end{aligned}$$

Câu 5 (2,0 điểm)

Tất cả các điểm trên mặt phẳng đều được tô màu, mỗi điểm được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, tím. Chứng minh rằng khi đó luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có ba đỉnh thuộc các điểm của mặt phẳng trên mà 3 đỉnh của tam giác đó cùng màu hoặc đôi một khác màu.

Lời giải

Xét ngũ giác đều $ABCDE$, ta thấy 3 đỉnh bất kỳ của ngũ giác luôn tạo thành một tam giác cân.

Do đó khi tô năm đỉnh A, B, C, D, E bằng ba màu xanh, đỏ, tím thì xảy ra hai khả năng sau:

+ Nếu tô năm đỉnh A, B, C, D, E bởi đủ ba màu đã cho thì tồn tại ba đỉnh có màu khác nhau và tạo thành một tam giác cân.

+ + Nếu tô năm đỉnh A, B, C, D, E bởi nhiều nhất hai màu đã cho thì có ít nhất ba đỉnh cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

Vậy trong mọi trường hợp luôn tồn tại ít nhất một tam giác cân, có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu hoặc đôi một khác màu.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT RẠCH GIÁ
ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2019-2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 40.
2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $B = x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$.

2. Cho biểu thức $C = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4}$.

- a) Rút gọn biểu thức C.
- b) Tìm x nguyên để C có giá trị nguyên.
- c) Tìm giá trị của C khi $x=6$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x+2)(x+3)^2(x+4) = 12$.
2. Hai đội bóng bàn của trường A và trường B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gặp đôi số cầu thủ hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 4: (4,0 điểm)

Một ngọn đèn đặt ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta cắm một chiếc cọc dài 1,6m ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H. (H nằm giữa B và C). Khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4m và 0,6m. Biết khoảng cách hai chiếc cọc là 1,4m. Tính độ cao của ngọn đèn.

Bài 5: (4,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC, lấy D, E lần lượt thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$

- a) Chứng minh tích $BD \cdot CE$ không đổi
- b) Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.
- c) Tính chu vi của $\triangle AED$ nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều.

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ RẠCH GIÁ

Năm học: 2019-2020

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho $A = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 40.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99} \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}) \\ &= (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + 3^4(1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{96}(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \\ &= 40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{96} \cdot 40 \\ &= 40(1 + 3^4 + 3^8 + \dots + 3^{96}) : 40 \\ \text{Vậy } A &: 40 \end{aligned}$$

2. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $B = x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} B &= x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021 \\ &= (x^4 - x) + (2021x^2 + 2021x + 2021) \\ &= x(x^3 - 1) + 2021(x^2 + x + 1) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2021(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2021) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2021)$$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh $\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Xét hiệu

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{a^2(b+1) + b^2(a+1)}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{a^2b + a^2 + b^2a + b^2}{ab + a + b + 1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{ab(a+b) + (a^2 + b^2)}{ab + 1 + 1} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{ab + (a + b)^2 - 2ab}{ab + 2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1 - ab}{ab + 2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3 - 3ab - ab - 2}{3(ab + 2)}$$

$$= \frac{1 - 4ab}{3(ab + 2)}$$

$$= \frac{(a + b)^2 - 4ab}{3(ab + 2)}$$

$$= \frac{(a - b)^2}{3(ab + 2)}$$

Nhận xét: $(a - b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b$

Mà $a, b > 0 \Rightarrow 3(ab + 2) > 0$

$$\Rightarrow \frac{(a - b)^2}{3(ab + 2)} \geq 0 \quad \forall a, b > 0$$

Dấu « = » xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} - \frac{1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

2. Cho biểu thức $C = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x|x+2| - x^2 + 4}$.

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tìm x nguyên để C có giá trị nguyên.

c) Tìm giá trị của C khi x=6.

Lời giải

a) ĐKXD $x \neq -2$

+ Với $x > -2$ ta có :

$$\begin{aligned} C &= \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{x^2 + 2x - x^2 + 4} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{2x + 4} \\ &= \frac{x(x^2 + 2x - x - 2)}{2(x+2)} = \frac{x(x+2)(x-1)}{2(x+2)} = \frac{x(x-1)}{2}. \end{aligned}$$

+ Với $x < -2$ ta có:

$$C = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{-x(x+2) - x^2 + 4} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{-x^2 - 2x - x^2 + 4} = \frac{x(x^2 + x - 2)}{-2(x^2 + x - 2)} = \frac{-x}{2}.$$

Vậy với $x > -2$ thì $C = \frac{x(x-1)}{2}$.

Với $x < -2$ thì $C = \frac{-x}{2}$.

b) Với $x \in \mathbb{Z}, x > -2$ ta có $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp suy ra $x(x-1) : 2$

Hay $C = \frac{x(x-1)}{2} \in \mathbb{Z}$

Với $x \in \mathbb{Z}, x < -2$ để $C \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{-x}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x : 2 \Rightarrow x = 2k, (k \in \mathbb{Z}, k < -1)$

Vậy để C nhận giá trị nguyên thì $x \in \mathbb{Z}, x > -2$ hoặc $x = 2k, (k \in \mathbb{Z}, k < -1)$

c) Với $x = 6 > -2$ thì $C = \frac{6(6-1)}{2} = 15$

Vậy với $x = 6$ thì giá trị của biểu thức $C = 15$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x+2)(x+3)^2(x+4) = 12$.

Lời giải

$$(x+2)(x+3)^2(x+4) = 12$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 12 \quad (1)$$

Đặt $x^2 + 6x + 8 = a$ Khi đó phương trình 1 trở thành

$$a(a+1) = 12$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -4 \end{cases}$$

Với $a = 3$ ta có

$$x^2 + 6x + 8 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Với $a = -4$ ta có

$$x^2 + 6x + 8 = -4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = -3$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 = -3 \text{ (vô lí)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; -5\}$.

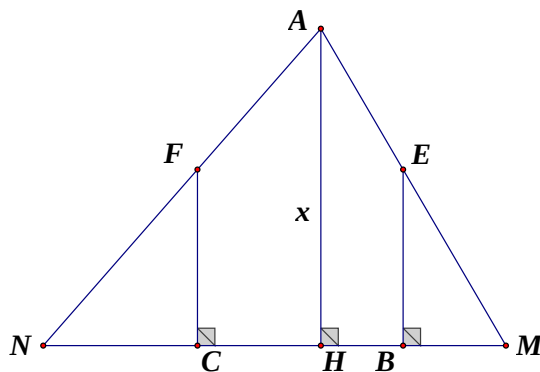
2. Hai đội bóng bàn của trường A và trường B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi số cầu thủ hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Lời giải

Bài 4: (4,0 điểm)

Một ngọn đèn đặt ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta cắm một chiếc cọc dài 1,6m ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H. (H nằm giữa B và C). Khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4m và 0,6m. Biết khoảng cách hai chiếc cọc là 1,4m. Tính độ cao của ngọn đèn.

Lời giải



Đặt $AH = x$

Gọi đỉnh cọc cắm tại B và C lần lượt là E, F, bóng lần lượt có độ dài $BM = 0,4 \text{ m}$; $CN = 0,6 \text{ m} \Rightarrow BC = 1,4 \text{ m}$.

Xét $\triangle MAH$ có $EB \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC).

$$\frac{MB}{MH} = \frac{BE}{AH} \Rightarrow \frac{0,4}{0,4 + BH} = \frac{1,6}{x} \Rightarrow BH = \frac{0,4x}{1,6} - 0,4$$

Xét $\triangle NAH$ có $CF \parallel AH$ (cùng vuông góc với BC).

$$\frac{CN}{NH} = \frac{CF}{AH} \Rightarrow \frac{0,6}{0,6 + CH} = \frac{1,6}{x} \Rightarrow CH = \frac{0,6x}{1,6} - 0,6$$

Mà $BC = BH + CH = 1,4$

$$\Rightarrow \frac{0,4x}{1,6} - 0,4 + \frac{0,6x}{1,6} - 0,6 = 1,4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1,6} = 2,4 \Leftrightarrow x = 3,84(\text{m})$$

Vậy ngọn đèn cao 3,84 (m)

Bài 5: (4,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC, lấy D, E lần lượt thuộc AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$

a) Chứng minh tích $BD \cdot CE$ không đổi

b) Chứng minh DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Tính chu vi của $\triangle AED$ nếu $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Lời giải

a) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C}$

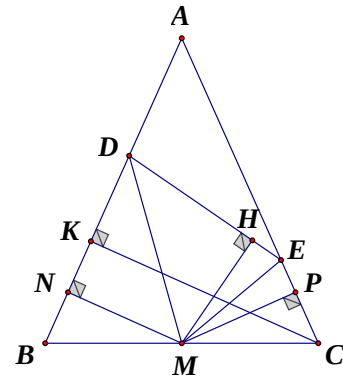
Mà $\widehat{DME} = \widehat{B} \Rightarrow \widehat{DME} = \widehat{C}$

Xét $\triangle MCE$ có $\widehat{C} + \widehat{CEM} + \widehat{CME} = 180^\circ$

Lại có $\widehat{BMD} + \widehat{DME} + \widehat{EMC} = 180^\circ$

Mà $\widehat{DME} = \widehat{C}$ (cmt)

Suy ra $\widehat{CEM} = \widehat{BMD}$



Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ có:

$\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\widehat{BMD} = \widehat{CEM}$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BMD \# \triangle CEM$ (g - g).

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM.$$

Ta có $BM = CM = \frac{1}{2}BC = a$ (do AM là trung tuyến).

Suy ra $\Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = a^2$.

Vậy: $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Vì $\triangle BMD \# \triangle CEM$ (cmt) $\Rightarrow \frac{DM}{EM} = \frac{BM}{EC}$. Mà $BM = MC$ suy ra $\frac{DM}{MC} = \frac{EM}{EC}$.

Xét $\triangle MED$ và $\triangle CEM$ có:

$\widehat{DME} = \widehat{C}$ (cmt).

$$\frac{DM}{MC} = \frac{EM}{EC} \text{ (cmt).}$$

Suy ra $\triangle MED \# \triangle CEM$ (c-g-c).

Mà $\triangle BMD \# \triangle CEM$ (cm câu a).

Suy ra $\triangle MED \# \triangle BMD \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MDB}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra DM là phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Từ M kẻ $MH \perp AB$ ($N \in AB$); $MH \perp DE$ ($H \in DE$); $MP \perp AC$ ($P \in AC$).

Từ C kẻ $CK \perp AB$ ($K \in AB$).

Xét $\triangle MND$ và $\triangle MHD$ có:

$$\widehat{MND} = \widehat{MHD} = 90^\circ$$

$$\widehat{MDN} = \widehat{MDH} \text{ (DM là phân giác } \widehat{BDE} \text{)}$$

DM là cạnh chung

Suy ra $\triangle MND = \triangle MHD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow DN = DH$ (hai cạnh tương ứng).

Chứng minh tương tự ta cũng có $EH = EP$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow P_{ADE} &= AD + AE + DE = AD + DH + AE + EH \\ &= AD + DN + AE + EP \\ &= AN + AP.\end{aligned}$$

Xét $\triangle BKC$ có $MB = MC$; $MN \perp CK$ (cùng vuông góc với AB). Suy ra N là trung điểm của AB .

$$\Rightarrow BN = NK = \frac{1}{2}BK.$$

Mặt khác do $\triangle ABC$ đều nên CK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến.

$$\text{Suy ra } BK = \frac{1}{2}AB = a \Rightarrow BN = \frac{a}{2}$$

Xét $\triangle BNM$ và $\triangle CPM$ có:

$$\widehat{BNM} = \widehat{CPM} = 90^\circ$$

$$BM = CM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle BNM = \triangle CPM$ (cạnh huyền- góc nhọn).

$\Rightarrow BN = CP$ (hai cạnh tương ứng).

$\Rightarrow AN = AP$

$$P_{ADE} = AN + AP = 2AN = 2(AB - BK) = 2\left(2a - \frac{a}{2}\right) = 3a$$

Vậy khi $\triangle ABC$ đều thì chu vi $\triangle ADE$ bằng $3a$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN CẨM XUYỀN

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN

NĂM HỌC: 2020 – 2021

ĐỀ THI SỐ 5

ĐỀ THI MÔN: TOÁN 8

Thời gian làm bài: 90 phút

I. PHẦN ĐIỀN KẾT QUẢ (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)**Câu 1:** Tìm các giá trị a, b thỏa mãn đẳng thức $5a^2 + b^2 - 2ab - 4a + 1 = 0$.**Câu 2:** Tìm a để khi chia đa thức $f(x) = 2x^2 + x - a$ cho đa thức $g(x) = x + 2$ có dư là -1 .**Câu 3:** Tìm số tự nhiên n để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.**Câu 4:** Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có $AC \perp BD$. Biết $AC = 6cm$, $BD = 8cm$. Tính chiều cao của hình thang.**Câu 5:** Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 - y^2 + 3y = 2$.**Câu 6:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2}$.**Câu 7:** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Hãy vẽ đường thẳng đi qua A chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.**Câu 8:** Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 5cm$, đáy lớn $CD = 8cm$. Đường trung bình của hình thang cắt AC , BD tại I , K . Tính độ dài đoạn IK .**Câu 9:** Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^4} = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b^2$.**Câu 10:** Tìm các số nguyên n để $n + 2018$ và $n + 2021$ đều là số chính phương.**II. PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)****Câu 11:** Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$.**Câu 12:** Cho x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$.Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 - 2zx} + \frac{1}{z^2 - 2xy}$.**Câu 13:** Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi E là trung điểm của AB ; AC cắt ED tại M ; BD cắt EC tại N . Đường thẳng MN cắt AD , EC lần lượt tại P và Q . Chứng minh

$$\frac{AP}{AD} + \frac{CQ}{BC} = 1.$$

Câu 14: Cho lục giác lồi $ABCDEF$ trong đó các cạnh và các đường chéo của lục giác được tô bởi một trong hai màu **Xanh (X)** hoặc **Đỏ (Đ)**. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba đỉnh của lục giác là ba đỉnh của một tam giác có các cạnh cùng màu.===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN**NĂM HỌC: 2020 – 2021****ĐỀ THI MÔN: TOÁN 8****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Câu 1:** Tìm các giá trị a, b thỏa mãn đẳng thức $5a^2 + b^2 - 2ab - 4a + 1 = 0$.**Lời giải**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } & 5a^2 + b^2 - 2ab - 4a + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow (4a^2 - 4a + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (2a - 1)^2 + (a - b)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Câu 2: Tìm a để khi chia đa thức $f(x) = 2x^2 + x - a$ cho đa thức $g(x) = x + 2$ có dư là -1 .**Lời giải**

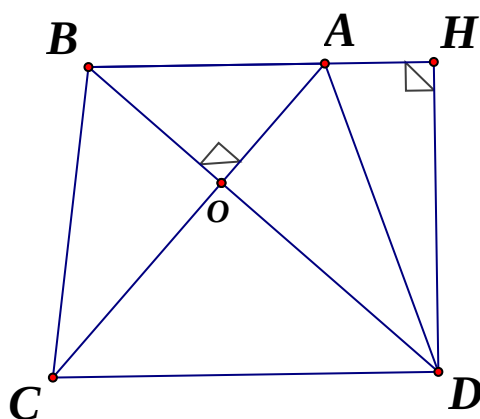
$$\begin{aligned}
& f(x) = 2x^2 + x - a \text{ cho đa thức } g(x) = x + 2 \text{ có dư là } -1 \\
& \Leftrightarrow f(-2) = -1 \\
& \Leftrightarrow 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - a = -1 \\
& \Leftrightarrow a = 7
\end{aligned}$$

Vậy $a = 7$ thì đa thức $f(x) = 2x^2 + x - a$ chia cho đa thức $g(x) = x + 2$ có dư là -1 .**Câu 3:** Tìm số tự nhiên n để $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.**Lời giải**

$$\text{Ta có } n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n - 1) + (n - 1) = (n - 1)(n^2 + 1)$$

$$\text{Để } n^3 - n^2 + n - 1 \text{ là số nguyên tố thì } \begin{cases} n - 1 = 1 \\ n^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Với $n - 1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$, suy ra $n^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố (thỏa mãn)Với $n^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0$, suy ra $n - 1 = -1$ (không thỏa mãn)Vậy Với $n = 2$ thì $n^3 - n^2 + n - 1$ là số nguyên tố.**Câu 4:** Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có $AC \perp BD$. Biết $AC = 6\text{cm}$, $BD = 8\text{cm}$. Tính chiều cao của hình thang.**Lời giải**



Kẻ $DH \perp AB$ ($H \in AB$)

Ta có $AB \parallel CD$ (ABCD là hình thang)

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ (định lý Talet)}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA+OC}{OB+OD} \text{ (Tính chất tỉ lệ thức và tính chất dãy tỉ số bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle DOC$ có:

$$\widehat{BHD} = \widehat{DOC} = 90^\circ$$

$$\widehat{HBD} = \widehat{ODC} \text{ (hai góc so le trong, } AB \parallel CD \text{)}$$

Do đó $\triangle BHD \sim \triangle DOC$ (TH3)

$$\Rightarrow \frac{BH}{OD} = \frac{DH}{OC} \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{DH}{BH} \Rightarrow \frac{DH}{BH} = \frac{3}{4} \Rightarrow BH = \frac{4DH}{3}$$

Xét $\triangle DBH$ vuông tại H có $BD^2 = DH^2 + BH^2$ (định lý Py-Ta-Go)

Suy ra

$$8^2 = DH^2 + \left(\frac{4DH}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}DH^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow DH = \sqrt{23,04} = 4,8$$

Câu 5: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 - y^2 + 3y = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 - y^2 + 3y = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y^2 - 3y + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (y-1)(y-2)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

Mà $(y-1)(y-2)$ là tích hai số nguyên liên tiếp

Do đó để $x^2 - (y-1)(y-2) = 0$ thì $\begin{cases} y-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=2 \end{cases}$

Với $y=1 \Rightarrow x=0$

Với $y=2 \Rightarrow x=0$

Với $y=1 \Rightarrow x=0$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 - y^2 + 3y = 2$ là $(0;1); (0;2)$

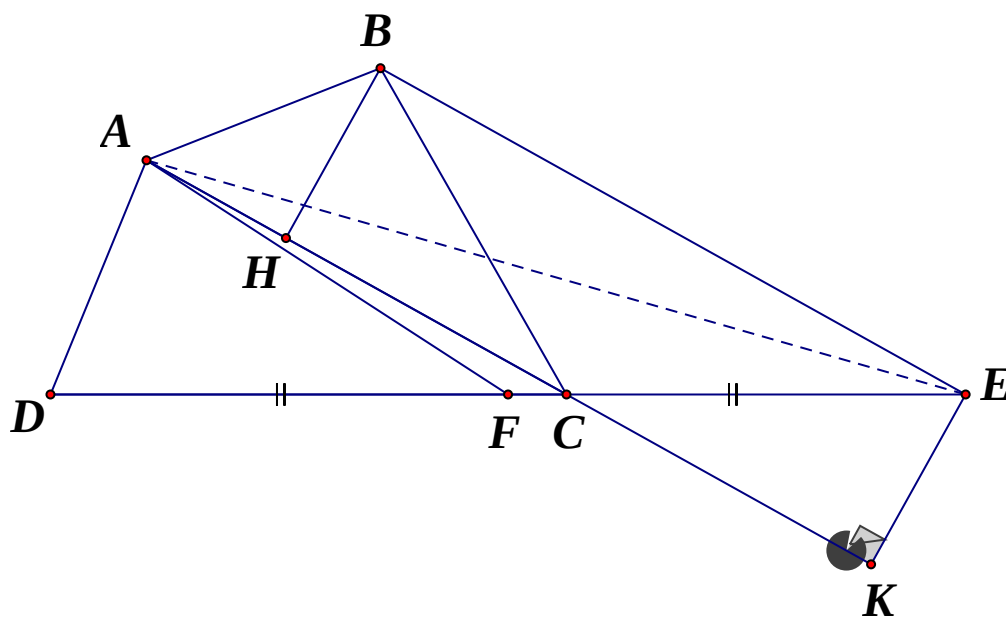
Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = \frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x^2 - xy - 3y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2} = \frac{2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2}{2x^2 - 2xy - 3xy + 3y^2} = \frac{2x(x+y) - 3y(x+y)}{2x(x-y) - 3y(x-y)} \\ &= \frac{(x+y)(2x-3y)}{(x-y)(2x-3y)} = \frac{x+y}{x-y} \end{aligned}$$

Câu 7: Cho tứ giác lồi $ABCD$. Hãy vẽ đường thẳng đi qua A chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải



Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Gọi F là trung điểm của DE. Kẻ $BH \perp AC, EK \perp AC$

Xét tứ giác $BEKH$ có

$BE \parallel HK$ ($BE \parallel AC$)

$BH \parallel EK$ (cùng vuông góc với AC)

Do đó tứ giác $BEKH$ là hình bình hành

$$\Rightarrow BH = EK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH; S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot EK$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = S_{ACE}$$

$$\text{Ta có: } S_{ABCF} = S_{ABC} + S_{ACF} = S_{ACE} + S_{ACF} = S_{AEF}$$

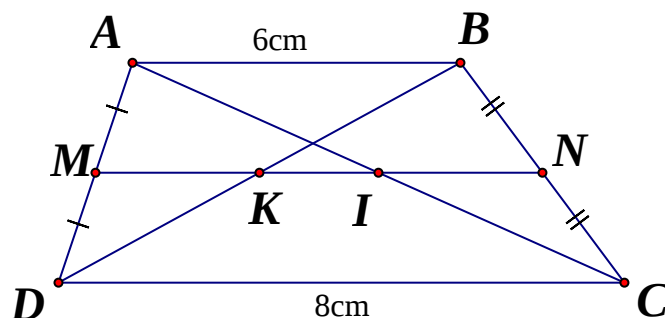
$$\text{Xét } \triangle AED \text{ có AF là đường trung tuyến} \Rightarrow S_{ADF} = S_{AEF}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCF} = S_{ADF} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

Vậy AF là đường thẳng cần vẽ.

Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 5\text{cm}$, đáy lớn $CD = 8\text{cm}$. Đường trung bình của hình thang cắt AC, BD tại I, K . Tính độ dài đoạn IK .

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$ có MN là đường trung bình

$$MN \parallel AB; MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{6 + 8}{2} = 7(\text{cm})$$

Xét $\triangle ABD$ có $MA = MD, MK \parallel AB$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của BD

$\Rightarrow MK$ là đường trung bình của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow MK = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm})$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta tìm được } IN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm})$$

Ta có $MN = MK + KI + IN$

$$\Rightarrow KI = MN - MK - IN = 7 - 3 - 3 = 1(\text{cm})$$

Câu 9: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^4} = 4$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b^2$.

Lời giải

Ta có:

$$a^2 + b^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^4} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} + b^4 - 2 + \frac{1}{b^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ b^2 - \frac{1}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 - 1}{a} = 0 \\ \frac{b^4 - 1}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } a=1, b=1 \Rightarrow P = 1 + 1^3 = 2$$

$$+ \text{Với } a=-1, b=1 \Rightarrow P = -1 + 1^3 = 0$$

$$+ \text{Với } a=1, b=-1 \Rightarrow P = 1 + (-1)^3 = 0$$

$$+ \text{Với } a=-1, b=-1 \Rightarrow P = -1 + (-1)^3 = -2$$

$$\text{Vậy } P \in \{-2; 0; 2\}.$$

Câu 10: Tìm các số nguyên n để $n + 2018$ và $n + 2021$ đều là số chính phương.

Lời giải

Vì $n + 2018$ và $n + 2021$ đều là số chính phương nên ta đặt

$$\begin{cases} n + 2021 = a^2 \\ n + 2018 = b^2 \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}; a > b)$$

$$\text{Suy ra } a^2 - b^2 = (n + 2021) - (n + 2018) = 3$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 3$$

$$\Leftrightarrow a - b, a + b \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\text{Mà } a, b \in \mathbb{N}; a > b \Rightarrow a + b > a - b > 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} n + 2021 = 4 \\ n + 2018 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow n = -2017$$

Vậy $n = -2017$ thì $n + 2018$ và $n + 2021$ đều là số chính phương.

II. PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$.

Lời giải

$$\text{ĐKXD } x \notin \{-4; -5; -6; -7\}$$

$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{(x+4)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x + 28 = 54$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-13 \end{cases} \quad (\text{TMĐK})$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm

$$S = \{2; -13\}$$

Câu 12: Cho x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 - 2zx} + \frac{1}{z^2 - 2xy}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{yz - xy - xz}{xyz} = 0$$

$$\text{Suy ra } yz - xy - xz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz = xy + xz \\ xy = yz - xz \\ xz = yz - xy \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x^2 + 2yz} = \frac{1}{x^2 + yz + yz} = \frac{1}{x^2 + xy + xz + yz} = \frac{1}{x(x+y) + z(x+y)} = \frac{1}{(x+y)(x+z)}$$

$$\frac{1}{y^2 - 2zx} = \frac{1}{y^2 - zx - zx} = \frac{1}{y^2 - yz + xy - zx} = \frac{1}{y(y-z) + x(y-z)} = \frac{1}{(y-z)(y+x)}$$

$$\frac{1}{z^2 - 2xy} = \frac{1}{z^2 - xy - xy} = \frac{1}{z^2 - yz + zx - xy} = \frac{1}{z(z-y) + x(z-y)} = \frac{1}{(z-y)(z+x)}$$

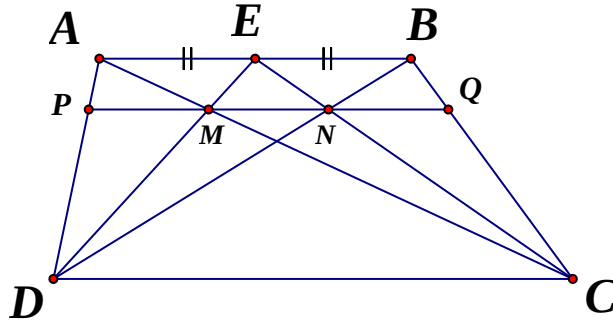
Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 - 2zx} + \frac{1}{z^2 - 2xy} = \frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{(y+x)(y-z)} + \frac{1}{(z+x)(z-y)} \\ &= \frac{y-z+x+z-(x+y)}{(x+y)(x-z)(y-z)} = 0 \end{aligned}$$

Câu 13: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi E là trung điểm của AB ; AC cắt ED tại M ; BD cắt EC tại N . Đường thẳng MN cắt AD , EC lần lượt tại P và Q . Chứng minh

$$\frac{AP}{AD} + \frac{CQ}{BC} = 1.$$

Lời giải



Ta có: $AB \parallel CD$ (gt)

$\Rightarrow AE \parallel DC; BE \parallel DC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{EM}{MD} = \frac{AE}{DC} \text{ (định lý Talet)}$$

$$\text{và } \frac{BN}{ND} = \frac{EN}{NC} = \frac{EB}{DC} \text{ (định lý Talet)}$$

Mà $AE = EB$ (E là trung điểm của AB)

$$\Rightarrow \frac{AE}{DC} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow \frac{EM}{MD} = \frac{EN}{NC} \Rightarrow MN \parallel DC \text{ (định lý Talet đảo)}$$

$$\text{Ta có } \frac{AE}{DC} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{BN}{ND} \Rightarrow \frac{AM}{AM + MC} = \frac{BN}{BN + ND} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD}$$

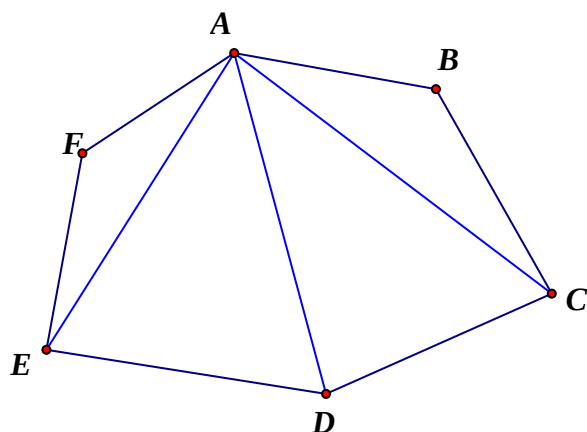
$$\text{Do } MN \parallel DC \Rightarrow PM \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AD}$$

$$\text{Do } MN \parallel DC \Rightarrow NQ \parallel DC \Rightarrow \frac{CQ}{BC} = \frac{ND}{BD}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AP}{AD} + \frac{CQ}{BC} = \frac{AM}{AC} + \frac{ND}{BD} = \frac{BN}{BD} + \frac{ND}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$$

Câu 14: Cho lục giác lồi $ABCDEF$ trong đó các cạnh và các đường chéo của lục giác được tô bởi một trong hai màu **Xanh (X)** hoặc **Đỏ (Đ)**. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba đỉnh của lục giác là ba đỉnh của một tam giác có các cạnh cùng màu.

Lời giải



Xét các đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 5 đoạn thẳng khi được tô màu sẽ có ít nhất 3 đoạn cùng màu. Giả sử AC, AD, AE cùng xanh. Khi đó xét ba đoạn EC, CD, DE trong ba đoạn có 1 đoạn tô màu xanh thì ta có được tam giác thỏa mãn đề bài.

Nếu cả 3 đoạn EC, CD, DE đều đỏ, suy ra $\triangle ECD$ thỏa mãn đề bài.

Vậy luôn tồn tại ba đỉnh của lục giác là ba đỉnh của một tam giác có các cạnh cùng màu.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT THÀNH PHỐ BẾN TRE

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC: 2020 – 2021

MÔN: TOÁN LỚP 8

Ngày thi 13/03/2021

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$
2. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 7, $f(x)$ chia cho $x+3$ dư 3, $f(x)$ chia cho $x^2 - 9$ được thương là $2x$ và còn dư.

Bài 2: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng số $A = 2020^2 + 2020^2 \cdot 2021^2 + 2021^2$ là số chính phương.
2. Chứng minh rằng số $B = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ chia hết cho 7

Bài 3: (4 điểm)

1. $(x^2 - x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^4$
2. $(3x - 2)(x + 1)^2(3x - 8) = -16$

Bài 4: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = -1$
2. Tính tổng $P = \frac{ax^2 + 1}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2 + 1}{(y-x)(y-z)} + \frac{az^2 + 1}{(z-x)(z-y)}$

Bài 5: (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có 2 đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\angle MON = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN và DC , gọi K là giao điểm của ON và BE .

1. Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân.
2. Chứng minh: $MN \parallel BE$ và $CK \perp BE$

Bài 6: (2 điểm)

Đường phân giác của các góc tù ở một cạnh đáy của một hình thang cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy kia. Tính các cạnh của hình thang, biết chiều cao hình thang bằng 12cm, các đường phân giác nối trên dài 15cm và 13cm.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HSG LỚP 8 THCS**THÀNH PHỐ BẾN TRE****Năm học: 2020-2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4 điểm)**

3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$
4. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 7, $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 3, $f(x)$ chia cho $x^2 - 9$ được thương là $2x$ và còn dư.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1. \quad M &= (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2 \\
 &= [(x^2 + 2x + 1) - x][(x^2 + 2x + 1) + x] - x^2 \\
 &= (x + 1)^2 - x^2 + x^2 \\
 &= (x + 1)^2
 \end{aligned}$$

2. Đặt biểu thức dư của phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 9$ là $ax + b$. Vì $f(x)$ chia cho $x^2 - 9$ được thương là $2x$ nên:

$$f(x) = (x^2 - 9).2x + ax + b \quad (1)$$

Vì $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 7 $\Rightarrow f(x) = (x - 3).A(x) + 7$ ($A(x)$ là một đa thức)

$$\Rightarrow f(3) = 7 \quad (2)$$

Vì $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 3 $\Rightarrow f(x) = (x + 3).B(x) + 3$ ($B(x)$ là một đa thức)

$$\Rightarrow f(-3) = 3 \quad (3)$$

Thay (2) vào (1) ta có: $7 = (3^2 - 9).2.3 + 3a + b$

$$\Leftrightarrow 3a + b = 7$$

Thay (3) vào (1) ta có: $3 = ((-3)^2 - 9).2.3 + 3a + b$

$$\Leftrightarrow -3a + b = 3$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 7 \\ -3a + b = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 5 \end{cases} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Thay (*) vào (1)

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 - 9).2x + \frac{2}{3}x + 5 = 2x^3 - \frac{52}{3}x + 5$$

Bài 2:

1. Chứng minh rằng số $A = 2020^2 + 2020^2.2021^2 + 2021^2$ là số chính phương.
2. Chứng minh rằng số $B = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ chia hết cho 7

Lời giải

1. Đặt $a = 2020 \Leftrightarrow a + 1 = 2021$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2 \\ &= a^2 + a^2(a+1)^2 + a^2 + 2a + 1 \\ &= a^2(a+1)^2 + 2a(a+1) + 1 \\ &= [a(a+1) + 1]^2\end{aligned}$$

Vậy A là một số chính phương.

2. $B = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned}&= 2.8^n + 2^{(3(n-1)+2)} + 1 \text{ chia 7 dư 2, chia 7 dư 4} \\ &= 2.8^n + 4.8^{n-1} + 1\end{aligned}$$

Ta có: 8 chia 7 dư 1 $\Rightarrow 8^n, 8^{n-1}$ chia 7 dư 1

$$\Rightarrow 2.8^n \text{ chia 7 dư 2, } 4.8^{n-1} \text{ chia 7 dư 4}$$

$$\Rightarrow 2.8^n + 4.8^{n-1} + 1 \text{ chia hết cho 7}$$

$$\Rightarrow B \text{ chia hết cho 7}$$

Bài 3: (4 điểm)

$$\text{a) } (x^2 - x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)^2 = 5x^4$$

$$\text{b) } (3x - 2)(x + 1)^2(3x - 8) = -16$$

Lời giải

$$\text{a) } (-x + 1)^4 + 4x^2(x^2 - x + 1)x^2 = 5x^4$$

$$\text{Đặt } (x^2 - x + 1)^2 = a; x^2 = b \text{ (} a \geq 0; b \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow a^2 + 4ab = 5b^2$$

$$\Leftrightarrow a(a-b) + 5b(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+5b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+5b=0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad a-b=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = x \\ x^2 - x + 1 = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

$$\Rightarrow \Delta OMN \Leftrightarrow 5b=0$$

$$\text{Vì } a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow a+5b \geq 0$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x + 1)^2 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 - 0 + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{Vô lý})$$

$$\Rightarrow \text{Loại}$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}$$

$$\text{b) } (3x-2)(x+1)^2(3x+8) = -16 \left(-\frac{8}{3} < x < \frac{2}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow (9(x+1)^2 - 25)(x+1)^2 = -16$$

$$\text{Đặt } (x+1)^2 = a \quad (a \geq 0) \quad \text{Ta có}$$

$$\Leftrightarrow (9a^2 - 25)a^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow 9a^4 - 9a^2 - 16a^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9a^2 - 16)(a^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{9} \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = \frac{16}{9} \\ (x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{-7}{3} \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{-7}{3}; 0; -2 \right\}$

Bài 4:

1. Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = -1$

2. Tính tổng $P = \frac{ax^2+1}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2+1}{(y-x)(y-z)} + \frac{az^2+1}{(z-x)(z-y)}$

Lời giải

1. Ta có:
$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} \\ &= \frac{(a+b)(b+c)(c-a) + (b+c)(c+a)(a-b) + (c+a)(a+b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{(b^2 + ab + bc + ac)(c-a) + (c^2 + ab + ac + bc)(a-b) + (a^2 + ab + bc + ac)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2(c-a) + c^2(a-b) + a^2(b-c) + (ab+bc+ac)\{(c-a) + (a-b) + (b-c)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
&= \frac{-(c-a)\{(a(b-c) + b(c-b))\}}{(a-c)(b-c)(a-b)} \\
&= \frac{-(c-a)(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1
\end{aligned}$$

2. Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{ax^2+1}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2+1}{(y-x)(y-z)} + \frac{az^2+1}{(z-x)(z-y)} \\
\Rightarrow -P &= \frac{ax^2+1}{(x-y)(z-x)} + \frac{ay^2+1}{(x-y)(y-z)} + \frac{az^2+1}{(z-x)(y-z)} \\
&= \frac{(ax^2+1)(y-z) + (ay^2+1)(z-x) + (az^2+1)(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \\
&= \frac{a(x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y))}{(x-y)(y-z)(z-x)}
\end{aligned}$$

Từ câu 1) ta suy ra $P = -1$

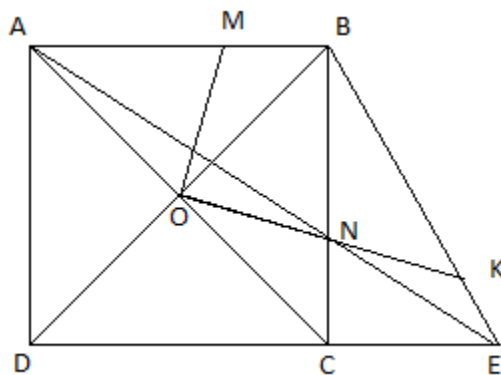
Bài 5: (4 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có 2 đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Trên cạnh AB lấy M ($MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$. Gọi E là giao điểm của AN và DC , gọi K là giao điểm của ON và BE .

3. Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân.

4. Chứng minh: $MN \parallel BE$ và $CK \perp BE$

Lời giải



1. Xét hình vuông ABCD có A cắt BD tại O. $\begin{cases} OA = OB = OC = OD (t/c) \\ \widehat{BCD} = \widehat{OCB} = \widehat{ABC} = 2\widehat{OBA} \end{cases}$

Ta có: $180^\circ = \widehat{AOC} = \widehat{CON} + \widehat{MON} + \widehat{AON}$

$$90^\circ + \widehat{NOC} + \widehat{AOM} = 180^\circ$$

$$\widehat{NOC} + \widehat{MOA} = 180^\circ$$

Mà $90^\circ = \widehat{AOB} = \widehat{AOM} + \widehat{BOM}$

$$\Rightarrow \widehat{NOC} = \widehat{BOM}$$

Xét $\triangle ONC$ và $\triangle OBM$ có:

$$\widehat{CON} = \widehat{BOM}$$

$$OC = OB$$

$$\widehat{OCN} = \widehat{OBM}$$

$$\Rightarrow \triangle ONC = \triangle OBM (g.c.g)$$

$$\Rightarrow ON = OM$$

$$\Rightarrow \triangle OMN \text{ cân tại } O. \text{ Mà } \widehat{MON} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle OMN \text{ vuông cân tại } O \text{ (đpcm)}$$

$$2. \text{ Xét } \triangle ADE \text{ có } NC \parallel AD; N \in AE, C \in DE \Rightarrow \begin{cases} \frac{DC}{DE} = \frac{AN}{NE} \\ \frac{NC}{AD} = \frac{CE}{DE} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow NC = MB$$

Có $AB = BC = CD = DA$ (do ABCD là hình vuông)

$$\Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{MB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{AB}{MB}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{CE} + 1 = \frac{AM}{MB} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{CE} = \frac{AM}{MB} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{AM}{MB}$$

Xét $\triangle AEB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} N \in AE, M \in AB \\ \frac{AN}{NE} = \frac{AM}{MB} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow MN \parallel BE \quad (4)$$

Từ (4) $\widehat{BKO} = \widehat{MON}$ (đồng vị)

$$\Rightarrow \widehat{BKO} = 45^\circ \text{ (vì } \triangle MON \text{ vuông cân tại } O)$$

$$\Rightarrow \widehat{BKO} = \widehat{OCB} (\widehat{OCB} = \frac{1}{2} \widehat{DCB} = 45^\circ)$$

$$\text{Hay } \widehat{BKN} = \widehat{OCN} (\{N\} = BC \cap OK)$$

Xét $\triangle ONC$ và $\triangle BNK$ có:

$$\widehat{OCN} = \widehat{BKN} \quad (\text{cmt})$$

$$\widehat{ONC} = \widehat{BNK}$$

$$\Rightarrow \triangle ONC \sim \triangle BNK (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{ON}{BN} = \frac{CN}{KN}$$

$$\Rightarrow \frac{ON}{CN} = \frac{BN}{KN}$$

Xét $\triangle ONB$ và $\triangle CNK$ có:

$$\frac{ON}{CN} = \frac{BN}{KN}$$

$$\widehat{ONB} = \widehat{CNK}$$

$$\Rightarrow \triangle ONB \sim \triangle CNK (g.g)$$

$$\Rightarrow \widehat{CKN} = 45^\circ \text{ (do } \widehat{OBN} = \frac{1}{2} \widehat{OBC} = 45^\circ)$$

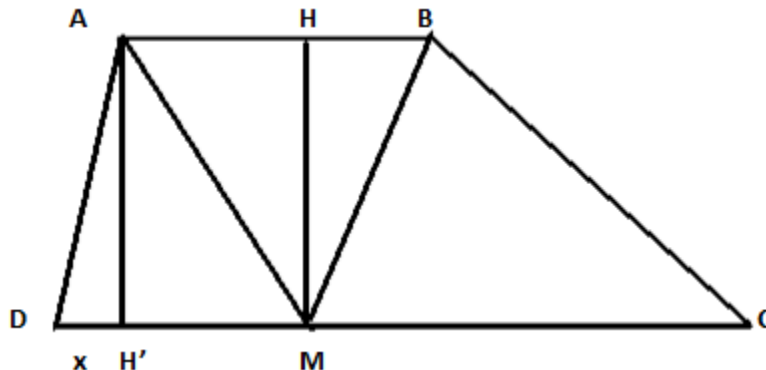
$$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{CKN} + \widehat{BKN} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow CK \perp BK \Rightarrow CK \perp BE \text{ (đpcm)}$$

Bài 6: (2 điểm)

Đường phân giác của các góc tù ở một cạnh đáy của một hình thang cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy kia. Tính các cạnh của hình thang, biết chiều cao hình thang bằng 12cm, các đường phân giác nói trên dài 15cm và 13cm.

Lời giải



Giả sử có hình thang ABCD với M là giao điểm 2 đường phân giác, MH=12cm là đường cao, AM=15cm, BM=13cm ($AB \parallel CD$). AD và BC là 2 cạnh bên.

Có $AB \parallel CD$ nên:

$$\begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{AMD} \\ \widehat{ABM} = \widehat{BMC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AMD} = \widehat{DAM} \\ \widehat{MBC} = \widehat{BCM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = MD \\ BC = MC \end{cases}$$

Xét $\triangle AMH$ vuông tại H có:

$$AH^2 + HM^2 = AM^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 15^2 - 12^2$$

$$\Rightarrow AH = 9 (AH > 0)$$

Xét $\triangle BMH$ vuông tại H có:

$$BH^2 + HM^2 = BM^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = 13^2 - 12^2$$

$$\Rightarrow BH = 5$$

$$\Rightarrow AB = AH + BH = 14cm$$

Xét $\triangle AH'D$ vuông tại H' ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MD^2 = AD^2 = x^2 + 12^2 \\ MD^2 = (MH + x)^2 = (AH + x)^2 = (9 + x)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow DA = MD = \frac{7}{2} + 9 = 12,5cm$$

Tương tự ta tính được $BC = MC = 16,9cm$

$$\Rightarrow CD = MD + MC = 29,4cm$$

Vậy độ dài các cạnh hình thang là $AB = 14cm$; $AD = 12,5cm$, $BC = 16,9cm$, $CD = 29,4cm$

PHÒNG GD&ĐT THÀNH PHỐ BÀ RỊA

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI OLIMPIC 27/4

NĂM HỌC: 2020 – 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN TOÁN LỚP 8

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số nguyên lẻ bất kỳ thì hết cho 8.
 b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $M = x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

Bài 2: (4,0 điểm)

- a) Cho biểu thức $A = \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x+3} - 2$ với $x \neq 1; x \neq -3$

Rút gọn A và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$ biết $a+b=1$ và $a > 0; b > 0$.

Bài 3: (4,0 điểm)

- a) Tìm giá trị của x biết $\frac{214-x}{91} + \frac{265-x}{71} + \frac{216-x}{31} + \frac{167-x}{11} = 10$

- b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị biểu thức $A = 2020x + y^{2021} + z^{2021}$ **Bài 4: (5,0 điểm)** Vẽ hình thoi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ hình chữ nhật $AOBE$. Đường thẳng OE cắt AB, CD lần lượt ở G, F . Đường thẳng DE cắt AB, OA lần lượt ở H, I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và OF . Chứng minh:

- a) Tứ giác $ADOE$ là hình bình hành
 b) Ba điểm G, I, M thẳng hàng
 c) Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy
 d) $12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$

Bài 5: (3,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh:

- a, $AC + BD = CD$
 b, CO là tia phân giác của $\widehat{ACD}$

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI OLIMPIC 27/4**NĂM HỌC: 2020 – 2021****MÔN TOÁN LỚP 8****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)**

- a) Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số nguyên lẻ bất kỳ thì chia hết cho 8.
 b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $M = x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

Lời giải

- a) Gọi hai số nguyên lẻ bất kỳ là $2x+1$ và $2y+1$ ($x, y \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2x+1)^2 - (2y+1)^2 &= 4x^2 + 4x + 1 - 4y^2 - 4y - 1 \\ &= 4x(x+1) - 4y(y+1) \text{ chia hết cho 8.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } M &= x(x+4)(x+6)(x+10)+128 \\ &= (x^2+10x)(x^2+10x+24)+128 \\ \text{Đặt } x^2+10x+12 &= t. \text{ Khi đó:} \\ M &= (t-12)(t+12)+128 \\ M &= t^2-144+128 \\ M &= t^2-16 = (t-4)(t+4) \\ M &= (x^2+10x+16)(x^2+10x+8) \\ M &= (x+2)(x+8)(x^2+10x+8) \end{aligned}$$

Bài 2: (4,0 điểm)

- a) Cho biểu thức $A = \frac{2x^2+4x+6}{x^2+2x-3} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x+3} - 2$ với $x \neq 1; x \neq -3$

Rút gọn A và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$ biết $a+b=1$ và $a>0; b>0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2x^2+4x+6}{x^2+2x-3} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x+3} - 2 \\ &= \frac{2x^2+4x+6}{(x-1)(x+3)} + \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+3)} - \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2+4x+6+x^2+x-6+3x-3-2x^2-4x+6}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{x^2+4x+3}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} \\
 &= \frac{x+1}{x-1}
 \end{aligned}$$

Ta có A nhận giá trị nguyên $A \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow x-1 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$

b) Biết $a+b=1$ và $a>0; b>0$.

Ta có $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 \\
 &= \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 \\
 &= 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)
 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $D \geq 8 + 4.2 + 2 = 18$

Vậy giá trị nhỏ nhất của D là 18 khi $a=b=\frac{1}{2}$

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Tìm giá trị của x biết $\frac{214-x}{91} + \frac{265-x}{71} + \frac{216-x}{31} + \frac{167-x}{11} = 10$

b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị biểu thức $A = 2020x + y^{2021} + z^{2021}$

Lời giải

a) $\frac{214-x}{91} + \frac{265-x}{71} + \frac{216-x}{31} + \frac{167-x}{11} = 10$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(\frac{214-x}{91} - 1\right) + \left(\frac{265-x}{71} - 2\right) + \left(\frac{216-x}{31} - 3\right) + \left(\frac{167-x}{11} - 4\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{123-x}{91} + \frac{123-x}{71} + \frac{123-x}{31} + \frac{123-x}{11} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{91} + \frac{1}{71} + \frac{1}{31} + \frac{1}{11}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 123-x=0 \Leftrightarrow x=123
 \end{aligned}$$

Vậy $x=123$

b) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{y+z+1+z+x+2+x+y-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{y+z+1}{x} = 2 \Rightarrow y+z+1 = 2x \Rightarrow x+y+z+1 = 3x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 1 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z+x+2}{y} = 2 \Rightarrow z+x+2 = 2y \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{5}{6}$$

$$\frac{x+y-3}{z} = 2 \Rightarrow x+y-3 = 2z \Rightarrow \frac{1}{2} - 3 = 3z \Rightarrow z = -\frac{5}{6}$$

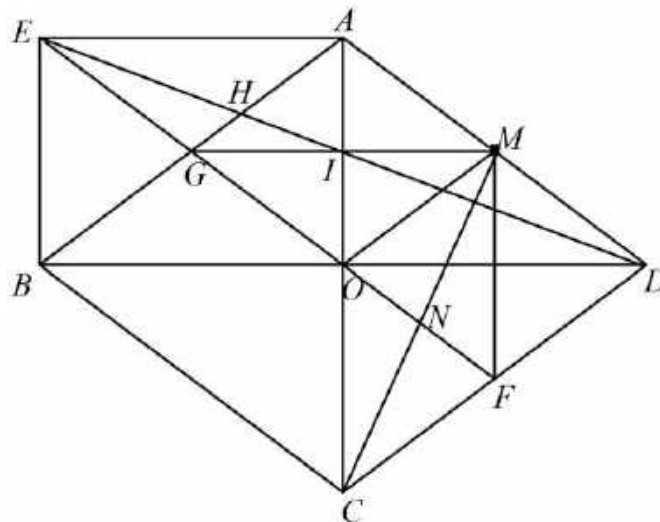
$$A = 2020x + y^{2021} + z^{2021} = 2020 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2021} + \left(-\frac{5}{6}\right)^{2021} = 1010$$

Vậy $A = 1010$

Bài 4: (5,0 điểm) Vẽ hình thoi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo vẽ hình chữ nhật $AOBE$. Đường thẳng OE cắt AB , CD lần lượt ở G, F . Đường thẳng DE cắt AB , OA lần lượt ở H, I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và OF . Chứng minh:

- Tứ giác $ADOE$ là hình bình hành
- Ba điểm G, I, M thẳng hàng
- Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy
- $12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$

Lời giải



a) Ta có $AE \parallel OB$ và $AE = OB$ (vì $AOBE$ là hình chữ nhật)

Nên $AE \parallel OD$ và $AE = OD$ (vì $OB = OD$)

Do đó tứ giác $ADOE$ là hình bình hành.

b) Ta có G là trung điểm của AB (vì $AOBE$ là hình chữ nhật)

I là trung điểm của AO (vì $ADOE$ là hình bình hành)

M là trung điểm của AD

Nên IM, IG lần lượt là đường trung bình của tam giác AOB, AOD

$\Rightarrow IG \parallel OB$ và $IM \parallel OD$

$\Rightarrow G, I, M$ thẳng hàng

c) Ta có O, M, F lần lượt là trung điểm của AC, AD, CD

Nên OM, MF lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD

$\Rightarrow OM \parallel CD$ và $MF \parallel AC$ hay $OM \parallel CF$ và $MF \parallel OC$

Do đó tứ giác $OCFM$ là hình bình hành

Mà N là trung điểm của OF

$\Rightarrow N$ là trung điểm của MC

Vậy ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy.

d) $\triangle AOE$ có AG, EI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại H nên H là trọng tâm của $\triangle AOE$

$$\Rightarrow EH = \frac{2}{3}EI \Rightarrow EH \cdot ED = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ED \cdot ED = \frac{1}{3}ED^2$$

$$\Rightarrow EH \cdot ED = \frac{1}{3}(BD^2 + EB^2) \Rightarrow EH \cdot EB = \frac{1}{3}\left(BD^2 + \frac{1}{4}AC^2\right)$$

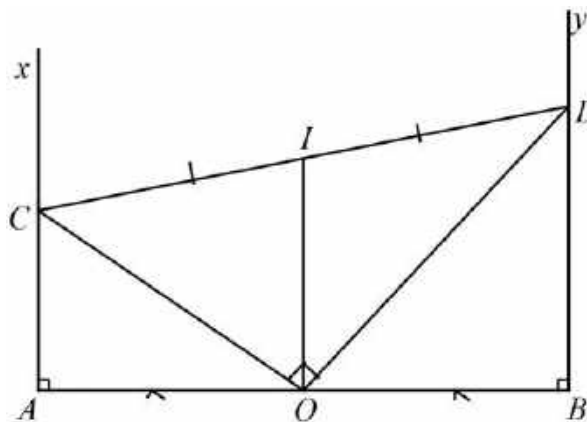
$$\Rightarrow 12 \cdot EH \cdot ED = 4BD^2 + AC^2$$

Bài 5: (3,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh:

a, $AC + BD = CD$

b, CO là tia phân giác của $\widehat{ACD}$

Lời giải



Chứng minh.

a) Gọi I là trung điểm của CD

Tứ giác $ACDB$ là hình thang (do $AC \parallel BD$)

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$$\Rightarrow OI = \frac{AC + BD}{2} \Rightarrow AC + BD = 2.OI \quad (1)$$

Ta lại có $\triangle OCD$ vuông tại O

Có OI là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OI = \frac{CD}{2} \Rightarrow 2.OI = CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC + BD = CD$

b) Ta có $\triangle OCD$ vuông tại O có OI là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OI = IC$$

$$\Rightarrow \triangle IOC \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{IOC} = \widehat{ICO}$$

Mà $\widehat{IOC} = \widehat{ACO}$ (So le trong)

$$\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{ICO}$$

Vậy CO là tia phân giác $\widehat{ACD}$.

===== HẾT =====

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8
HUYỆN AN THỊ
Năm học: 2017 – 2018

Bài 1: (1,5 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \left(\frac{1-2x}{x^2-1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tính giá trị của A biết $|x| = 2$.

Bài 2: (1,5 điểm)

- a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1$.
 b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{3}{4x^2 + 4x + 3}$.

Bài 3: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ n .

Bài 4: (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình: $\left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left[1 + \frac{1}{x(x+2)}\right] = \frac{2.2017}{2018}$ ($x \in \mathbb{N}^*$)
 b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3} \geq \frac{1}{2}$$

Bài 6: (3,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

- a) Chứng minh CE vuông góc với DF .
 b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$.
 c) Gọi K là giao điểm của CM và DA . Chứng minh tam giác MAD cân.
 d) Tính diện tích của tam giác MDC theo a .

Hết

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8**HUYỆN AN THI****Năm học: 2017 – 2018****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (1,5 điểm)**

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \left(\frac{1-2x}{x^2-1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A biết $|x| = 2$.

Lời giải

a) $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \left(\frac{1-2x}{x^2-1} \right)$. ĐKXĐ: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$.

$$A = \left[\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{(1-x)(1+x)} \right] : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$A = \frac{x+1+2-2x-5+x}{(1-x)(1+x)} : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$A = \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$$

$$A = \frac{2}{1-2x}$$

b) $A = \frac{2}{1-2x}$ với điều kiện $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $|x| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \\ x=-2 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{cases}$

Khi $x = 2$ thì $A = \frac{2}{1-2 \cdot 2} = \frac{-2}{3}$.

Khi $x = -2$ thì $A = \frac{2}{1-2 \cdot (-2)} = \frac{2}{5}$.

Bài 2: (1,5 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{3}{4x^2 + 4x + 3}$.

Lời giải

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1$

$$= (x^2 + 2xy + y^2) - (2x + 2y) + 1$$

$$= (x+y)^2 - 2(x+y) + 1$$

$$= (x+y-1)^2.$$

b) $B = \frac{3}{4x^2 + 4x + 3}$. ĐKXĐ: $x \in \mathbb{R}$.

$$B = \frac{3}{(2x+1)^2 + 2}$$

Vì $(2x+1)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x$ nên $B = \frac{3}{(2x+1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \quad \forall x$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{3}{4x^2 + 4x + 3}$ là $\frac{3}{2}$ khi $x = -\frac{1}{2}$.

Bài 3: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ n .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n^3 - 3n^2 - n + 3 &= (n^3 - n) - (3n^2 - 3) \\ &= n(n^2 - 1) - 3(n^2 - 1) \\ &= n(n-1)(n+1) - 3(n-1)(n+1) \\ &= (n-1)(n+1)(n-3) \end{aligned}$$

Vì n lẻ nên $n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } (n-1)(n+1)(n-3) &= (2k+1-1)(2k+1+1)(2k+1-3) \\ &= 2k(2k+2)(2k-2) \\ &= 8k(k+1)(k-1) \end{aligned}$$

Vì $k(k+1)(k-1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên $k(k+1)(k-1)$ chia hết cho 2 và 3.

Mà ƯCLN(2,3)=1 nên $k(k+1)(k-1)$ chia hết cho 6, suy ra $8k(k+1)(k-1)$ chia hết cho

48.

Vậy $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ n .

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left[1 + \frac{1}{x(x+2)}\right] = \frac{2.2017}{2018} \quad (x \in \mathbb{N}^*)$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$.

Lời giải

a) Ta có: $1 + \frac{1}{x(x+2)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+2)} = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)}$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} = \frac{2.2017}{2018}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.3.4 \dots (x+1)}{1.2.3 \dots x} \cdot \frac{2.3.4 \dots (x+1)}{3.4.5 \dots (x+2)} = \frac{2.2017}{2018}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x+2} = \frac{2.2017}{2018}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = \frac{2017}{2018}$$

$$\Leftrightarrow x = 2016 \text{ (thỏa mãn } x \in \mathbb{N}^*)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2016\}$

b) Ta thấy: $1+x+x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \Rightarrow y^3 > x^3 \Rightarrow y > x \Rightarrow y \geq x+1$

- Nếu $y = x+1$ thì $1+x+x^2+x^3 = (x+1)^3$

$$\Leftrightarrow 1+x+x^2+x^3 = x^3+3x^2+3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x=0 \Leftrightarrow 2x(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Suy ra $(x; y) \in \{(0; 1); (-1; 0)\}$.

- Nếu $y > x+1$ thì $y^3 > (x+1)^3 \Rightarrow 1+x+x^2+x^3 > x^3+3x^2+3x+1$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x < 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

Không có giá trị $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $-1 < x < 0$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 1); (-1; 0)\}$.

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{a^3+b^3+c^3+d^3} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết: $2 = a+b+c+d$

suy ra $2^2 = (1.a+1.b+1.c+1.d)^2 \leq (1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$

$$\Leftrightarrow 1 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \quad (1)$$

Lại có: $(1.a^2+1.b^2+1.c^2+1.d^2)^2 \leq (1^2+1^2+1^2+1^2)(a^4+b^4+c^4+d^4)$

Hay $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 4(a^4+b^4+c^4+d^4) \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1.(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 4(a^4+b^4+c^4+d^4) \quad (3)$

Mặt khác: $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2 = (a.a^2+b.b^2+c.c^2+d.d^2)^2$

$$\leq (a^2+b^2+c^2+d^2)(a^4+b^4+c^4+d^4) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 \leq 4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)^2$

$$\Rightarrow \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra: $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

Bài 6: (3,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

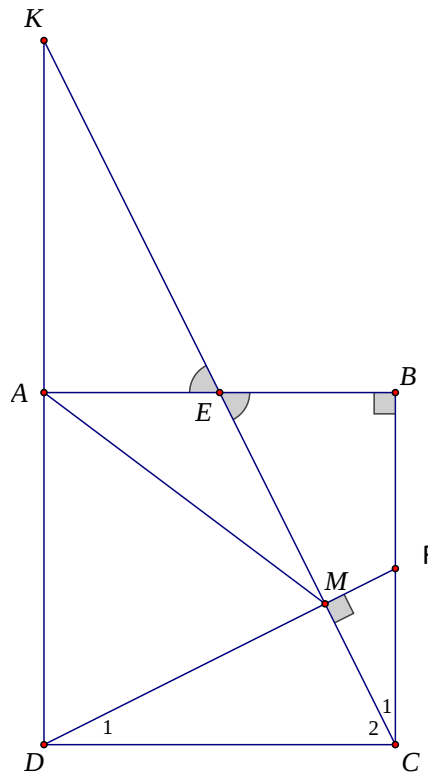
a) Chứng minh CE vuông góc với DF .

b) Chứng minh $\frac{CM \cdot CE}{CF} = a$.

c) Gọi K là giao điểm của CM và DA . Chứng minh tam giác MAD cân.

d) Tính diện tích của tam giác MDC theo a .

Lời giải



a) Chứng minh $CE \perp DF$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = 90^\circ$; $AB = BC = CA = DA = a$.

Vì E và F là trung điểm của AB và BC nên $AE = EB = BF = FC$.

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle CFD$ có:

$$\begin{cases} BE = FC \\ \widehat{EBC} = \widehat{FCD} = 90^\circ \\ CB = CD \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CFD (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$$

$$\text{Mà } \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{C_2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CMD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow CE \perp DF \text{ tại } M.$$

b) Chứng minh $\frac{CM.CE}{CF} = a$

Xét $\triangle CMF$ và $\triangle CBE$ có:

Ê chung

$$\widehat{CMF} = \widehat{CBE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CMF \sim \triangle CBE (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CF}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{CM.CE}{CF} = CB$$

Vậy $\frac{CM.CE}{CF} = a$

c) Chứng minh $\triangle MAD$ cân

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle BEC$ có:

$$\widehat{EAK} = \widehat{EBC} = 90^\circ$$

$$AE = EB \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AEK} = \widehat{BEC} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEK = \triangle BEC (g.c.g)$$

$$\Rightarrow AK = BC$$

Mà $BC = AD$

$$\Rightarrow AK = AD$$

Xét $\triangle DMK$ vuông tại M có MA là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền KD

$$\Rightarrow MA = AD = AK$$

$$\Rightarrow \triangle MAD \text{ cân tại } A.$$

d) Tính S_{MDC} theo a

Xét $\triangle CMD$ và $\triangle FCD$ có:

$\widehat{D_1}$ chung

$$\widehat{CMD} = \widehat{FCD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle CMD \sim \triangle FCD (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CMD}}{S_{FCD}} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \Rightarrow S_{CMD} = \left(\frac{CD}{FD} \right)^2 \cdot S_{FCD}$$

Ta có: $S_{FCD} = \frac{1}{2} CF.CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a.a = \frac{a^2}{4}$

Xét $\triangle CDF$ vuông tại C có: $FD^2 = CF^2 + CD^2$ (định lý Py-ta-go)

$$\Rightarrow FD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{CD}{FD}\right)^2 = \frac{a^2}{\frac{5a^2}{4}} = \frac{4}{5}$$

Do đó: $S_{CMD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{5}$

Vậy $S_{CMD} = \frac{a^2}{5}$ (đvdt)

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT **NGHI LỘC****ĐỀ SỐ 13****ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
HUYỆN****NĂM HỌC: 2017 - 2018****Thời gian làm bài: 90 phút****Bài 1: (4,0 điểm)**

- a) Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
- b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$.

Bài 2: (5,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng biểu thức $A = 75(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{2018} .
- b) Cho x, y, z là 3 số nguyên khác 0. Chứng minh rằng nếu $x^2 - yz = a$; $y^2 - xz = b$; $z^2 - xy = c$ thì tổng $(ax + by + cz)$ chia hết cho tổng $(a + b + c)$.

Bài 3: (5,0 điểm)

- a) Tìm a, b biết $a + b = a.b = \frac{a}{b}$ và b khác 0.
- b) Tìm nghiệm là các số tự nhiên của phương trình: $xy - 4x = 35 - 5y$.
- c) Cho $x + y = 1$; $x^3 + y^3 = a$; $x^5 + y^5 = b$. Chứng minh rằng: $5a(a + 1) = 9b + 1$.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD . Qua A vẽ đường thẳng AK song song với BC ($K \in CD$). Qua B vẽ đường thẳng BI song song với AD ($I \in CD$). BI cắt AC ở F , AK cắt BD ở E .

- a) Chứng minh EF song song với AB .
- b) Chứng minh $AB^2 = CD.EF$.
- c) Nội dung Cho biết $\widehat{ADC} = 2\widehat{ACD}$. Tính AC theo AD và CD .

===== **HẾT** =====

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI HUYỆN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NGHỊ LỘC
NĂM HỌC: 2017 - 2018
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng nếu một số chính phương có chữ số tận cùng bằng 6 thì chữ số hàng chục là chữ số lẻ.
 b) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: .

Lời giải

- a) Gọi số chính phương có dạng $M = \overline{ab6}$.

Vì M là số chẵn chính phương nên $M : 4$ suy ra $\overline{ab6} : 4$ hay $(\overline{a00} + \overline{b6}) : 4$

Mà $\overline{a00} : 4$ nên $\overline{b6} : 4$ (Khi b chẵn thì $\overline{b6} \not\vdots 4$)

Suy ra b là số lẻ

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \\ &= x^3 + 2x^2 + 7x^2 + 14x + 12x + 24 \\ &= x^2(x+2) + 7x(x+2) + 12(x+2) \\ &= (x+2)(x^2 + 7x + 12) \\ &= (x+2)(x^2 + 3x + 4x + 12) \\ &= (x+2)(x+3)(x+4) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = (x+2)(x+3)(x+4).$$

Bài 2: (5,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng biểu thức $A = 75(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{2018} .
 b) Cho x, y, z là 3 số nguyên khác 0. Chứng minh rằng nếu $x^2 - yz = a$; $y^2 - xz = b$; $z^2 - xy = c$ thì tổng $(ax + by + cz)$ chia hết cho tổng $(a + b + c)$.

Lời giải

- a) Đặt $4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1 = B$

$$\text{Ta có } 4B = 4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$$

$$\Rightarrow 4B - B = 4^{2018} - 1$$

$$\Rightarrow B = (4^{2018} - 1) : 3$$

$$\text{Thay } B \text{ vào } A \text{ ta có: } A = 75(4^{2018} - 1) : 3 + 25$$

$$\Rightarrow A = 25 \cdot 4^{2018} : 4^{2018}$$

Vậy A chia hết cho 4^{2018} .

$$\text{b) Ta có } ax + by + cz = (x^2 - yz)x + (y^2 - xz)y + (z^2 - xy)z$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y)^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz$$

$$= (x + y + z) \left[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 \right] - 3xy(x + y + z)$$

$$= (x + y + z)(x^2 - yz + y^2 - xz + z^2 - xy)$$

$$= (x + y + z)(a + b + c) : (a + b + c)$$

Vậy $(ax + by + cz) : (a + b + c)$.

Bài 3: (5,0 điểm)

$$\text{a) Tìm } a, b \text{ biết } a + b = a.b = \frac{a}{b} \text{ và } b \text{ khác } 0.$$

$$\text{b) Tìm nghiệm là các số tự nhiên của phương trình: } xy - 4x = 35 - 5y.$$

$$\text{c) Cho } x + y = 1; x^3 + y^3 = a; x^5 + y^5 = b. \text{ Chứng minh rằng: } 5a(a + 1) = 9b + 1.$$

Lời giải

$$\text{a) } a + b = a.b = \frac{a}{b} \quad (*)$$

$$\text{Từ } a.b = \frac{a}{b} \text{ và } a + b = a.b = \frac{a}{b} \Rightarrow ab^2 - a = 0 \Rightarrow a(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Khi $a = 0; b = 1$ thay vào $(*)$ đều không thỏa mãn.

$$\text{Khi } b = -1 \text{ thay vào } (*) \text{ ta có: } a + (-1) = -a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } a = \frac{1}{2}; b = -1.$$

b) Ta có $xy - 4x = 35 - 5y$

$$\Leftrightarrow (x+5)(y-4) = 15$$

$$\forall \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \\ x+5 \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 5 \end{cases}$$

$$\text{Đề } (x+5)(y-4) = 15 \Rightarrow 15 : (x+5)$$

$$\Rightarrow x+5 = \{5; 15\}$$

Khi $x+5=5$ thì $y-4=3$ hay $x=0$; $y=7$.

Khi $x+5=15$ thì $y-4=1$ hay $x=10$; $y=5$.

Vậy cặp nghiệm của phương trình là $(0; 7)$; $(10; 5)$.

c) Ta có $5a(a+1) = 5(x^3 + y^3)(x^3 + y^3 + 1)$

$$= 5(x+y)(x^2 - xy + y^2) \left[(x+y)(x^2 - xy + y^2) + 1 \right]$$

$$= 5(x+y) \left((x+y)^2 - 3xy \right) \left[(x+y) \left((x+y)^2 - 3xy \right) + 1 \right]$$

$$= 5(1-3xy) \left[(1-3xy) + 1 \right] \quad (\forall x+y=1)$$

$$= 5(1-3xy)(2-3xy)$$

$$= 45(x^2y^2 - xy) + 10 \quad (1)$$

Ta có $9b+1 = 9(x^5 + y^5) + 1$

$$= 9(x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) + 1$$

$$= 9 \left[(x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 + y^2 + xy) \right] + 1 \quad (\forall x+y=1)$$

$$= 9 \left[(1-2xy)^2 - xy(1-xy) \right] + 1 \quad (\forall x+y=1)$$

$$= 9(4x^2y^2 - 4xy + 1 + x^2y^2 - xy) + 1$$

$$= 9(5x^2y^2 - 5xy + 1) + 1$$

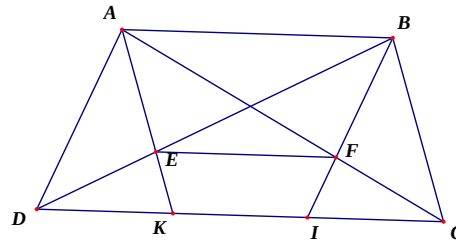
$$= 45(x^2y^2 - xy) + 10 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD . Qua A vẽ đường thẳng AK song song với BC ($K \in CD$). Qua B vẽ đường thẳng BI song song với AD ($I \in CD$). BI cắt AC ở F , AK cắt BD ở E .

- a) Chứng minh EF song song với AB .
- b) Chứng minh $AB^2 = CD \cdot EF$.
- c) Cho biết $\widehat{ADC} = 2\widehat{ACD}$. Tính AC theo AD và CD .

Lời giải



- a) Ta có $DI = AB = CK$ suy ra $DK = CI$

$$\begin{aligned} \text{Vì } AB \parallel CD \text{ nên } \frac{EB}{ED} &= \frac{AB}{DK} = \frac{AB}{CI} \quad (DK = CI) \\ &= \frac{BF}{FI} \quad (\text{áp dụng hệ quả Ta lét với } AB \parallel CI) \end{aligned}$$

Do đó $\frac{EB}{ED} = \frac{BF}{FI}$ hay $EF \parallel DI$ suy ra $EF \parallel AB$ (vì $DI \parallel AB$).

- b) Ta có $\frac{CI}{AB} = \frac{FI}{FB}$ (vì $AB \parallel CI$)

$$\Rightarrow \frac{CI}{AB} + 1 = \frac{FI}{FB} + 1$$

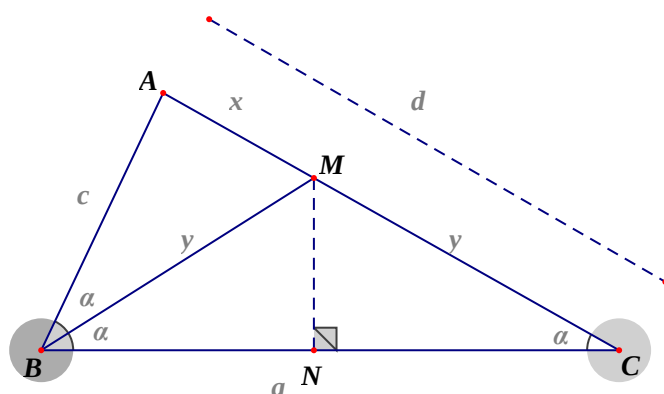
$$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{BI}{FB} \quad (1)$$

$$\text{Mà } EF \parallel DI \text{ nên } \frac{EF}{DI} = \frac{FB}{BI} \Rightarrow \frac{BI}{FB} = \frac{DI}{EF}$$

$$\text{Lại có } DI = AB \text{ nên } \frac{BI}{FB} = \frac{DI}{EF} = \frac{AB}{EF} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{CD}{AB} = \frac{AB}{EF} \left(= \frac{BI}{FB} \right) \text{ hay } AB^2 = CD \cdot EF.$$

- c)



Đặt $AM = x$; $MC = y$; $AC = d$; $AB = c$; $BC = a$

Ta có DM là tia phân giác của góc B nên $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$ hay $\frac{x}{y} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{y}{a}$ (3)

Trong $\triangle MNC$ vuông tại N ta có $y = \frac{CN}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$ (4)

Thay (4) vào (3) ta có $x = \frac{c}{2 \cos \alpha}$

Lại có $AC = d = x + y = \frac{c}{2 \cos \alpha} + \frac{a}{2 \cos \alpha} = \frac{a + c}{2 \cos \alpha}$

Vậy $AC = \frac{a + c}{2 \cos \alpha}$.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN KIM THÀNH

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC: 2017 – 2018

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2,0 điểm): Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 - x^3y - x + y$

b) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$.

Bài 2: (3,0 điểm) Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để M xác định và rút gọn M;

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $M > 0$.

Bài 3: (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

b) $6^x - 4 \cdot 3^x - 27 \cdot 2^5 + 108 = 0$

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Xác định một đa thức bậc ba $f(x)$ không có hạng tử tự do sao cho: $f(x) - f(x-1) = x^2$

b) Chứng tỏ rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (với mọi $n \in \mathbb{N}$)

Bài 5: (6, 0 điểm) Cho hình bình hành ABCD có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD. Chứng minh:

a) Tứ giác BEDF là hình bình hành.

b) $CH \cdot CD = CB \cdot CK$

c) $AB \cdot AH + AD \cdot AK = AC^2$

Bài 6: (4, 0 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4x-1}{x^2+3}$.

b) Cho tam giác ABC, O là điểm thuộc miền trong của tam giác, các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.

Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$.

===== HẾT =====

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG**HUYỆN KIM THÀNH****Năm học: 2017-2018****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (2,0 điểm):** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 - x^3y - x + y$

b) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a).$

Lời giải

a) $x^4 - x^3y - x + y = x^3(x-y) - (x-y) = (x-y)(x-1)(x^2 + x + 1)$

b) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$

$$= ab[a-c-(b-c)] + bc(b-c) + ca(c-a)$$

$$= bc(b-c) - ab(b-c) + ca(c-a) - ab(c-a)$$

$$= b(b-c)(c-a) - a(c-a)(b-c)$$

$$= (b-a)(b-c)(c-a)$$

Bài 2: (3,0 điểm) Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để M xác định và rút gọn M;

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $M > 0$.**Lời giải**a) Đkxđ: $x \neq 0; x \neq \pm 2$

$$M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{x(x-2)(x+2)} + \frac{6}{3(2-x)} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(\frac{x^2 - 4}{x+2} + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

$$= \frac{3x^2 - 6x(x+2) + 3x(x-2)}{3x(x-2)(x+2)} : \frac{6}{x+2} = \frac{-18x}{3x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{-1}{x-2}$$

b) $M > 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow x < 2; x \neq 0; x \neq -2$

Bài 3: (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

b) $6^x - 4 \cdot 3^x - 27 \cdot 2^5 + 108 = 0$

Lời giải

$$\text{a) } x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$S = \{1, 2\}$$

$$\text{b) } 6^x - 4 \cdot 3^x - 27 \cdot 2^x + 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3^x - 4 \cdot 3^x) = (27 \cdot 2^x - 108) = 0$$

$$3^x (2^x - 4) = 27 (2^x - 4)' = 0$$

$$\Rightarrow (3^x - 27)(2x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 2$$

$$S = \{2; 3\}.$$

Bài 4: (2,0 điểm)

a) Xác định một đa thức bậc ba $f(x)$ không có hạng tử tự do sao cho: $f(x) - f(x-1) = x^2$

b) Chứng tỏ rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (với mọi $n \in \mathbb{N}$)

Lời giải

a) Theo bài cho đa thức $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Khi $x=1$ ta có $a+b+c=1$

Khi $x=0$ ta có $-a+b-c=0$

Khi $x=2$ ta có $8a+4b+2c-a-b-c=4$

Từ (1),(2), (3) ta có hệ

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-b+c=0 \\ 7a+3b+c=4 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $a = \frac{1}{3}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{6}$

Vậy đa thức $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

b) Chứng tỏ rằng $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} (n \in \mathbb{N})$. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Với $n=1$ ta có $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1$

Giả sử đẳng thức đúng với $n=k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

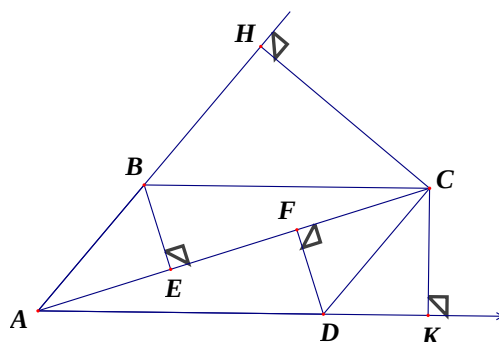
Ta chứng minh đẳng thức đúng với $n=k+1$. Thật vậy với $n=k+1$ ta có

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Bài 5: (6, 0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo AC lớn hơn đường chéo BD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và D xuống đường thẳng AC . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của C xuống đường thẳng AB và AD . Chứng minh:

- Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành.
- $CH \cdot CD = CB \cdot CK$
- $AB \cdot AH + AD \cdot AK = AC^2$

Lời giải



a) Chứng minh $BEDF$ là hình bình hành

$$\triangle BAC = \triangle DCA (g.c.g) \Rightarrow BE = DF ; BE \parallel DF \text{ (cùng vuông góc AC)}$$

Xét tứ giác $BEDF$ có $BE = DF, BE \parallel DF$

Nên $BEDF$ là hình bình hành

$$b) \Delta HBC \sim \Delta KDC \Rightarrow \frac{BC}{CH} = \frac{DC}{CK} \Rightarrow CH \cdot CD = CB \cdot CK$$

$$c) \Delta AEB \sim \Delta AHC \Rightarrow AB \cdot AH = AE \cdot AC$$

$$AD \cdot AK = AF \cdot AC$$

$$\Rightarrow AB \cdot AH + AD \cdot AK = (AE + AF) \cdot AC$$

Mà $AF = CE$ nên $AE + AF = AE + CE$

$$\Rightarrow AB \cdot AH + AD \cdot AK = AC^2$$

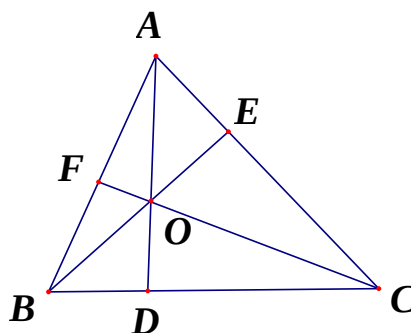
Bài 6: (4, 0 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{4x-1}{x^2+3}$.

b) Cho tam giác ABC , O là điểm thuộc miền trong của tam giác, các tia AO, BO, CO cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$.

Lời giải



a) Ta có

$$P - 1 = \frac{4x-1}{x^2+3} - 1 = \frac{-(x-2)^2}{x^2+3} \leq 0$$

$$\Rightarrow P - 1 \leq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow P \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$

$$P + \frac{4}{3} = \frac{4x-1}{x^2+3} + \frac{4}{3} = \frac{4x^2+12x+9}{x^2+3} = \frac{(2x+3)^2}{x^2+3} \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow P + \frac{4}{3} \geq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{4}{3} \text{ khi } x = \frac{-3}{2}$$

$$\text{b) } \frac{OA}{AD} = \frac{S_{OAB}}{S_{DAB}} = \frac{S_{OAC}}{S_{DAC}} = \frac{S_{OAB} + S_{OAC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{OB}{BE} = \frac{S_{OAB} + S_{OBC}}{S_{ABC}} ; \frac{OC}{CF} = \frac{S_{OBC} + S_{OAC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } \frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}} = 2$$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT QUẬN 123
TRƯỜNG THCS ANH SƠN
ĐỀ THI THỬ SỐ 10

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC: 2020 – 2021

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- a) Tìm điều kiện xác định của A
- b) Rút gọn A
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A khi $x > 1$

Bài 2: (5,0 điểm) Giải phương trình

- a) $x^3 = -4x$
- b) $\frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1}$
- c) $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$

Bài 3: (4,0 điểm)

- a) Chứng minh $4^n + 6n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n
- b) Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x) : (x+2)$ dư 10; $f(x) : (x-2)$ dư 22; $f(x) : (x^2 - 4)$ được thương là $-5x$ và còn dư.
- c) Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD. Trên AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Gọi E là trung điểm của MN. Trên DE cắt BC tại F. Qua M vẽ đường thẳng song song với AD cắt DF tại H.

- a) Tứ giác MFNH là hình gì? Vì sao?
- b) Chứng minh: $NF \cdot NB = NE \cdot NM$
- c) Chứng minh chu vi tam giác BMF không đổi khi M chuyển động trên cạnh AB.

===== **HẾT** =====

Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN

TRƯỜNG THCS ABC

Năm học: 2020-2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (0,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

- a) Tìm điều kiện xác định của A
 b) Rút gọn A
 c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A khi $x > 1$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của A là:
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \\ (x+1)(x-1) + x + 2 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 1; x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0; x \neq \pm 1.$$

- b) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$. ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \left[\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \right] = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \left[\frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

- c) Với $x \neq 0; x \neq \pm 1$. Thì A đạt giá trị nhỏ nhất $\frac{x^2}{x-1}$ đạt GTNN.

$$\text{Mà } \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2 - 4x + 4) + (4x - 4)}{x-1} = \frac{(x-2)^2}{x-1} + 4.$$

$$\text{Có } (x-2)^2 \geq 0 \forall x \text{ và } x > 1 \text{ suy ra } x-1 > 0. \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} + 4 \geq 4 \Leftrightarrow A \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (TMĐK).

Bài 2: (5,0 điểm) Giải phương trình

- a) $x^3 = -4x$
 b) $\frac{3}{1-4x} = \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1}$
 c) $(x^2-9)^2 = 12x+1$

Lời giải

- a) $x^3 = -4x \Leftrightarrow x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4 > 0$).
 Vậy tập nghiệm $S = \{0\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{3}{1-4x} &= \frac{2}{4x+1} - \frac{8+6x}{16x^2-1} \quad (\text{ĐKXĐ: } x \neq \pm \frac{1}{4}) \\
 \Leftrightarrow \frac{3}{1-4x} &= \frac{2}{4x+1} + \frac{8+6x}{(1-4x)(1+4x)} \Leftrightarrow \frac{3(1+4x)}{(1-4x)(1+4x)} = \frac{2(1-4x)+8+6x}{(1-4x)(1+4x)} \\
 \Leftrightarrow 3(1+4x) &= 2(1-4x)+8+6x \Leftrightarrow 3+12x = 2-8x+8+6x \Leftrightarrow 14x = 7 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2} \quad (\text{TMĐK}).
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$(x^2 - 9)^2 = 12x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 12x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 - 12x + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 4x^3) + (4x^3 - 16x^2) - (2x^2 - 8x) - (20x - 80) = 0$$

$$\text{c) } \Leftrightarrow x^3(x-4) + 4x^2(x-4) - 2x(x-4) - 20(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^3 + 4x^2 - 2x - 20) = 0 \Leftrightarrow (x-4)[(x^3 - 2x^2) + (6x^2 - 12x) + (10x - 20)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)[x^2(x-2) + 6x(x-2) + 10(x-2)] = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x^2 + 6x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ hoặc } x-2=0 \text{ hoặc } x^2 + 6x + 10 = 0.$$

$$(1) \quad x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

$$(2) \quad x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$(3) \quad x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + 1 = 0 \text{ (vô lý) vì } (x+3)^2 + 1 > 0, \forall x.$$

Vậy tập nghiệm: $S = \{2; 4\}$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Chứng minh $4^n + 6n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n

b) Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x) : (x+2)$ dư 10; $f(x) : (x-2)$ dư 22; $f(x) : (x^2 - 4)$ được thương là $-5x$ và còn dư.

c) Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$.

Lời giải

a) Chứng minh $4^n + 6n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n .

Vì $n \in \mathbb{N}$, ta có:

+) Với $n = 0$ thì $4^n + 6n - 1 = 4^0 + 6 \cdot 0 - 1 = 0 : 9 \Rightarrow 4^n + 6n - 1 : 9$.

+) Giả sử: $4^n + 6n - 1 : 9$ đúng đến $n = k$, tức là, ta có $4^k + 6k - 1 : 9$.

Ta phải chứng minh $4^n + 6n - 1 : 9$ đúng với $n = k+1$. Tức phải chứng minh $4^{k+1} + 6(k+1) - 1 : 9$

$$\text{Có } 4^k + 6k - 1 : 9 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^k + 24k - 4 : 9 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^k + 24k - 4 - 18k + 9 : 9$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^k + 6k + 5 : 9 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^k + 6(k+1) - 1 : 9 \text{ (Đpcm)}.$$

Vậy $4^n + 6n - 1 : 9, \forall n$.

b) Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x) : (x+2)$ dư 10; $f(x) : (x-2)$ dư 22; $f(x) : (x^2 - 4)$ được thương là $-5x$ và còn dư.

Vì $x^2 - 4$ là đa thức bậc hai nên dư khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 4$ phải là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2 và có dạng $r(x) = ax + b$.

Vì $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $r(x)$ suy ra $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + ax + b$
 Có $f(x)$ chia cho $(x + 2)$ dư 10 $\Rightarrow f(x) = (x + 2)A(x) + 10$. ($A(x)$ là thương của phép chia $f(x)$ cho $(x + 2)$). $\Rightarrow f(-2) = (-2 + 2)A(x) + 10 = 10$.

Chứng minh tương tự, ta có: $f(2) = 22$.

Suy ra: $f(-2) = ((-2)^2 - 4)(-5) \cdot 2 + 2a + b = 10 \Rightarrow -2a + b = 10$ (1).

$f(2) = (2^2 - 4)(-5) \cdot 2 + 2a + b = 22 \Rightarrow 2a + b = 22$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $2b = 32 \Rightarrow b = 16 \Rightarrow -2a + 16 = 10 \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3$

Vậy đa thức $f(x)$ là $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + 3x + 16$.

c) Cho $4a^2 + b^2 = 5ab$ và $2a > b > 0$. Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$.

Ta có: $4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 - 5ab = 0 \Leftrightarrow (4a^2 - 4ab) - (ab - b^2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4a(a - b) - b(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4a = b \end{cases}$$

Mà $2a > b > 0$ suy ra $4a = b$ (vô lý), suy ra $a = b$.

Khi đó: $M = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$. vậy $M = \frac{1}{3}$

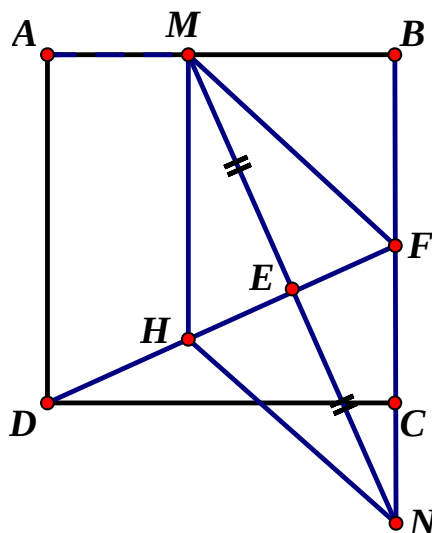
Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD. Trên AB lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Gọi E là trung điểm của MN. Trên DE cắt BC tại F. Qua M vẽ đường thẳng song song với AD cắt DF tại H.

a) Tứ giác MFNH là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh: $NF \cdot NB = NE \cdot NM$

c) Chứng minh chu vi tam giác BMF không đổi khi M chuyển động trên cạnh AB.

Lời giải



a) Tứ giác MFNH là hình gì? Vì sao?

Nối M với D; N với D

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} MH \parallel AD \\ AD \parallel BC \end{array} \right\} \Rightarrow MH \parallel BC$$

Xét $\triangle MEH$ và $\triangle NEF$ có:

$$\widehat{MEH} = \widehat{NEF} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$AB = AD \text{ (Vì E là trung điểm của MN)}$$

$$\widehat{EMH} = \widehat{ENF} \text{ (Vì 2 góc so le trong)}$$

$$\triangle MEH = \triangle NEF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow EF = EH \text{ (Vì 2 góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow E \text{ là trung điểm của FH}$$

$$\text{Mà E là trung điểm của MN}$$

$$\text{Do đó tứ giác HMFN là hình bình hành (1)}$$

Xét $\triangle DAM$ vuông tại A và $\triangle DCN$ vuông tại C có:

$$AD = DC;$$

$$AM = CN$$

$$\Rightarrow \triangle DAM = \triangle DCN \text{ (2 cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow MD \parallel DN; \widehat{ADM} = \widehat{CDN}$$

Mà

$$\widehat{ADM} + \widehat{MDC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CDN} + \widehat{MDC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MDN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle MDN \text{ là tam giác vuông cân tại D}$$

Mà DE là đường trung tuyến ứng với MN

$$\Rightarrow DE \perp MN$$

$$\text{Hay: } HF \perp MN \text{ (2)}$$

b) Chứng minh: $NF \cdot NB = NE \cdot NM$.

Xét $\triangle NEF$ vuông tại e và $\triangle NBM$ vuông tại B có:

$$\widehat{MNB} \text{ là góc chung}$$

$$\Rightarrow \triangle NEF \sim \triangle NBM \text{ (góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow \frac{NE}{NB} = \frac{NF}{NM}$$

$$\Rightarrow NE \cdot NM = NF \cdot NB$$

c) Chứng minh chu vi tam giác BMF không đổi khi M chuyển động trên cạnh AB.

Ta có:

$$P_{\triangle MBF} = MB + BF + MF$$

$$P_{\triangle MBF} = MB + BF + FN$$

$$P_{\triangle MBF} = MB + BF + FC + CN$$

$$P_{\triangle MBF} = (MB + CN) + (BF + FC)$$

$$P_{\triangle MBF} = (MB + AM) + BC = AB + AB = 2AB$$

$$\Rightarrow P_{\triangle MBF} \text{ không đổi khi M di chuyển trên cạnh AB}$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC: 2020 – 2021

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI : TOÁN – LỚP 8

(Đề thi gồm 1 trang)

Ngày thi:

Thời gian làm bài: 120 phút không kể thời gian giao đề

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (6 điểm)

1. Phân tích biểu thức sau thành nhân tử: $P = 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2. Cho $x^2 + x = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. P &= 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 \\ &= 2(a^3 + b^3) + 7ab(a + b) \\ &= 2(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a + b) \\ &= (a + b)(2a^2 - 2ab + 2b^2 + 7ab) \\ &= (a + b)[(2a^2 + 4ab) + (ab + 2b^2)] \\ &= (a + b)[2a(a + 2b) + b(a + 2b)] \\ &= (a + b)(2a + b)(a + 2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. Q &= x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1. \\ &= (x^6 + x^5) + (x^5 + x^4) + (x^4 + x^3) + (x^3 + x^2) + (x^2 + x) + (x + 1) \\ &= x^4(x^2 + 2) + x^3(x^2 + 2) + x^2(x^2 + 2) + x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) + (x + 1) \\ &= (x^2 + 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + x + 1 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 \text{ (do } x^2 + x = 1) \\ &= x^2(x^2 + x) + (x^2 + x) + (x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + x)(x^2 + 1) + (x + 2) \\
&= x^2 + x + 3 \text{ (do } x^2 + x = 1) \\
&= 1 + 3 = 4
\end{aligned}$$

Câu 2: (4,5 điểm)

1. Cho biểu thức $R = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x}$.

Tìm x để biểu thức xác định, khi đó hãy rút gọn biểu thức.

2. Giải phương trình sau: $|x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$.

Lời giải

1. Biểu thức R xác định với điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \\ x^3 - 4x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \neq 0 \\ x(x+2) \neq 0 \\ x(x-2)(x+2) \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Vậy với $x \neq 0, x \neq \pm 2$ thì biểu thức R xác định.

Với $x \neq 0, x \neq \pm 2$ thì:

$$\begin{aligned}
R &= \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4026}{x} \\
\Leftrightarrow R &= \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x-2)(x+2)} \right] \cdot \frac{x}{4026} \\
\Leftrightarrow R &= \left[\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} - \frac{4}{x(x-2)(x+2)} \right] \cdot \frac{x}{4026} \\
\Leftrightarrow R &= \frac{x^2 + 2x - x - 2 + x^2 - 2x + x - 2 - 4}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x}{4026} \\
\Leftrightarrow R &= \frac{2x^2 - 8}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x}{4026} \\
\Leftrightarrow R &= \frac{2(x-2)(x+2)x}{x(x-2)(x+2) \cdot 4026}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{2013}$$

Vậy với $x \neq 0, x \neq \pm 2$ thì $R = \frac{1}{2013}$

$$2. |x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4. \quad (1)$$

+) $|x-2| = x-2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì phương trình (1) trở thành:

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (Loại vì } x \geq 2) \\ x^2=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{5} \text{ (Loại vì } x \geq 2) \\ x=\sqrt{5} \text{ (Thỏa mãn)} \end{cases}$$

+) $|x-2| = 2-x \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ thì phương trình (1) trở thành:

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2)(x^2-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4 - x^4 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - x^4 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x^4 - 5x^2 + \frac{25}{4}\right) - \frac{7}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} \text{ (vô lí vì } \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 \leq 0, \text{ mà } \frac{7}{4} > 0)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \sqrt{5}$

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24.

2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Lời giải

1. Ta có : $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n-1, n, n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp.

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) : 3$$

Hay $n^3 - n : 3$ (1)

Vì n là số tự nhiên lẻ $\Rightarrow n-1, n+1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp.

$$\Rightarrow (n-1)(n+1) : 8$$

Hay $n^3 - n : 8$ (2)

Ta có $\text{UCLN}(3, 8) = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow n^3 - n : (3 \cdot 8)$

Hay $\Rightarrow n^3 - n : 24$

2. Vì $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương nên

$$n^2 + 4n + 2013 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + 4n + 4) + 2009 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (n+2)^2 + 2009 = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$$

$$\Leftrightarrow (m-n-2)(m+n+2) = 2009$$

Vì $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m-n-2; m+n+2 \in \mathbb{Z}$ và $m+n+2 > m-n-2 > 0$ (1)

$$\Rightarrow m-n-2; m+n+2 \in U(2009) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có bảng:

$m+n+2$	2009	287	49
$m-n-2$	1	7	41
m	1005	147	45

n	1002	138	2
-----	------	-----	---

Vậy $n \in \{1002; 138; 2\}$ thì $n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương

Câu 4: (6,0 điểm)

1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$

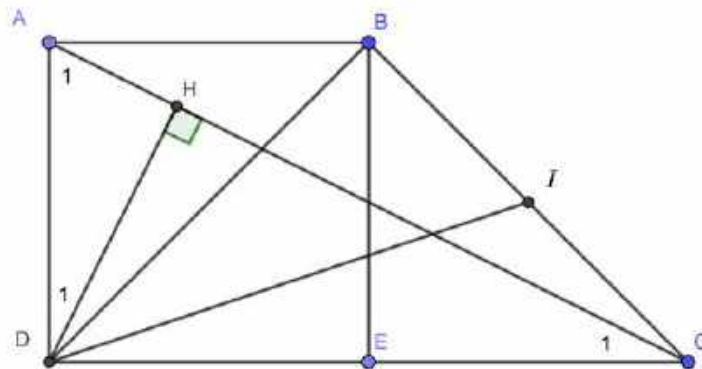
a) Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a .

b) Gọi I là trung điểm BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC .

Chứng minh $\widehat{HDI} = 45^\circ$

2. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$. Độ dài các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là l_a, l_b, l_c . Chứng minh rằng: $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Lời giải



1. a) Gọi E là trung điểm CD

$$\Rightarrow DE = EC = \frac{1}{2}DC \quad (1)$$

Mà $2AB = 2AD = DC$ (GT)

$$\Rightarrow AB = AD = \frac{1}{2}DC \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow DE = EC = AB = AD$

Xét tứ giác $ABED$ ta có: $AB \parallel DE, AB = DE$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABED$ là hình bình hành (dnhb)

mà $\widehat{BAD} = 90^\circ$ (GT); $AB = AD$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABED$ là hình vuông (dnhb)

$\Rightarrow BE \perp EC$

$\Rightarrow \triangle BEC$ vuông tại E có $BE = EC$

$\Rightarrow \triangle BEC$ vuông cân tại E (dnhb)

$\Rightarrow BC^2 = EC^2 + BE^2$ (Py ta go)

$\Rightarrow (a\sqrt{2})^2 = 2EC^2$

$\Rightarrow EC^2 = a^2$

$\Rightarrow EC = a$ (vì $EC > 0$)

$\Rightarrow AB = AD = a; DC = 2a$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot BE}{2} = \frac{(a + 2a)a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\text{b) Ta có } \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ \\ \widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1} \quad (4)$$

Xét $\triangle BDC$ ta có $\Rightarrow BE \perp DC$, BE là trung tuyến ứng với DC

$\Rightarrow \triangle BDC$ cân tại B (dnhb)

Mà $\widehat{ECB} = 45^\circ$ (do $\triangle BEC$ vuông cân tại E)

$\Rightarrow \triangle BDC$ vuông cân tại B (dnhb)

$\Rightarrow BD = BC$

Vì I là trung điểm BC (GT) $\Rightarrow BI = IC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BD$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D và $\triangle BID$ vuông tại B , ta có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{IB}{BD}$$

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BID$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{BDI} \quad (5)$$

Từ (4), (5) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{BDI}$

$$\text{Mà } \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{BDH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BDI} + \widehat{BDH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HDI} = 45^\circ$$

2. Gọi AD là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Qua C kẻ $CM \parallel AD (M \in AB)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{M} \\ \widehat{DAC} = \widehat{ACM} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{M} = \widehat{ACM}$$

$\Rightarrow \triangle ACM$ cân tại A (đhnb)

$$\Rightarrow AM = AC = b$$

Có $AD \parallel MC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{AB}{BM} \text{ (Ta lét)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{MC} = \frac{c}{c+b}$$

Mà $CM < AM + MC$ (bất đẳng thức tam giác) $= 2b$

$$\Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{AD}{2b} \Rightarrow \frac{c}{b+c} > \frac{l_a}{2b} \Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (3)$$

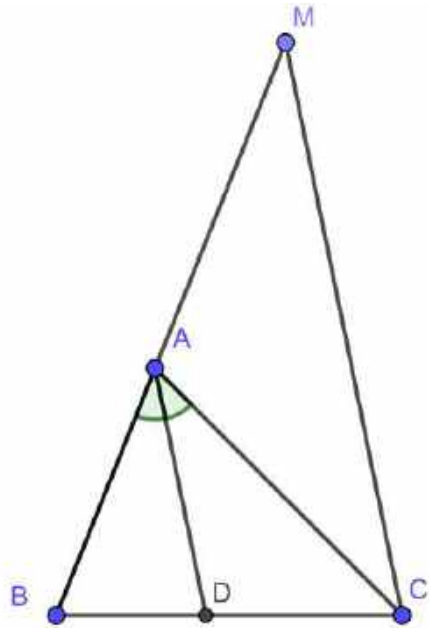
$$\text{Từ (1),(2),(3)} \Rightarrow l_a + l_b + l_c > \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)$$

$$\Rightarrow l_a + l_b + l_c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{đpcm})$$

Câu5: (1,0 điểm)

Cho hai số không âm a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = a + b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$



Lời giải

$$\text{Có } (a-1)^2 \geq 0 \quad \forall a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \quad \forall a$$

Chứng minh tương tự: $b^2 + 1 \geq 2b \quad \forall b$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b) \Leftrightarrow (a^2 + b^2) - (a+b) + 2 \geq a+b \Leftrightarrow 2 \geq a+b \quad (\text{do } a^2 + b^2 = a+b)$$

$$\text{Xét hiệu: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} = \frac{x+y}{xy} - \frac{4}{x+y} \quad (x, y > 0)$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$$

$$\text{Có: } (x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y; \quad xy(x+y) > 0 \quad \text{vì } x, y > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad (1) \quad (x, y > 0)$$

Có $a, b \geq 0 \Rightarrow a+1, b+1 > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức (1) cho hai bộ số

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{4}{a+b+2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = \left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{b+1}\right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) \leq 2 - \frac{4}{a+b+2} \leq 2 - \frac{4}{2+2} = 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=b+1 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$$

Vậy $S_{\max} = 1$ tại $a=b=1$

**PHÒNG GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
GIAO THỦY**

ĐỀ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN

Năm học 2016-2017

MÔN THI: TOÁN LỚP 8

Thời gian làm bài : 150 phút không kể thời gian giao đề

Bài 1(4,0 đ) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $2x^2 + 3x - 27$

b) $x^2(y - x) + y^2(z - x) + z^2(x - y).$

Bài 2 (4,0 đ)

a) Cho các số a, b, c khác 0. Tính giá trị biểu thức $T = x^{2016} + y^{2016} + z^{2016}$ biết x, y thỏa mãn

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

b) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 12$

Bài 3 (4,0 đ) Giải phương trình:

$$\frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 16x + 72}{x + 8} = \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} + \frac{x^2 + 12x + 42}{x + 6}$$

Bài 4 (4,0 đ)

Tam giác MNP vuông tại N có $NP > NM$. Trên nửa mặt phẳng bờ MP không chứa điểm N vẽ tam giác DMP vuông cân tại D . Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của D trên NP, NM . Biết $NP = a, NM = b$ ($a, b > 0$). Tính diện tích của tứ giác $DHKN$ theo a, b .

Bài 5 (4,0 đ)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Từ H hạ HM vuông góc với EF tại M và HN vuông góc với ED tại N .

- Chứng minh $\triangle BED$ và $\triangle BCH$ đồng dạng.
- Chứng minh $HM = HN$
- Gọi I, J, Q, K lần lượt là hình chiếu của F trên AC, AD, BE, BC
Chứng minh I, J, Q, K thẳng hàng.

.....Hết.....

ĐÁP ÁN**Bài 1**(4,0 đ) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a)

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 + 3x - 27 \\
 &= 2x^2 - 6x + 9x - 27 \\
 &= 2x(x - 3) + 9(x - 3) \\
 &= (x - 3)(2x + 9)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \\
 &= x^2y - x^2z + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 \\
 &= x^2y - xy^2 + y^2z - x^2z + xz^2 - yz^2 \\
 &= xy(x - y) - z(x - y)(x + y) + z^2(x - y) \\
 &= (x - y)[xy - z(x + y) + z^2] \\
 &= (x - y)[xy - xz - yz + z^2] \\
 &= (x - y)[xy - yz - xz + z^2] \\
 &= (x - y)[y(x - z) - z(x - z)] \\
 &= (x - y)(x - z)(y - z)
 \end{aligned}$$

Bài 2 (4,0 đ)

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\
 & \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\
 & \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{c^2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Với a, b, c khác 0 ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{a^2} \right) < 0 \\ \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{b^2} \right) < 0 \\ \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{c^2} \right) < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 > a^2 \\ & \text{(do } a^2 + b^2 + c^2 > b^2 \text{)} \\ & a^2 + b^2 + c^2 > c^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \leq 0 \\ y^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \leq 0 \\ z^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{1}{c^2} \right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Khi đó $T = x^{2016} + y^{2016} + z^{2016} = 0$

b) $x^2 - x - 12 = (x - 2)(x + 1)$

Gọi $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$

Theo định lý Bezout:

$$f(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 21 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 9 \cdot (-1)^3 + 21 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot 2 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -28 \\ -a + b = -31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -30 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} a = 1 \\ b = -30 \end{cases}$ thì đa thức $x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 12$

Bài 3 (4,0 đ) Giải phương trình: ĐKXĐ: $x \notin \{-2; -4; -6; -8\}$

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+16x+72}{x+8} = \frac{x^2+8x+20}{x+4} + \frac{x^2+12x+42}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+2}{x+2} + \frac{(x+8)^2+8}{x+8} = \frac{(x+4)^2+4}{x+4} + \frac{(x+6)^2+6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow x+2 + \frac{2}{x+2} + x+8 + \frac{8}{x+8} = x+4 + \frac{4}{x+4} + x+6 + \frac{6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} + \frac{8}{x+8} = \frac{4}{x+4} + \frac{6}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{x+2-x}{x+2} + \frac{x+8-x}{x+8} = \frac{x+4-x}{x+4} + \frac{x+6-x}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{-x}{x+2} + \frac{-x}{x+8} = \frac{-x}{x+4} + \frac{-x}{x+6} \\
& \Leftrightarrow \frac{-x}{x+2} + \frac{-x}{x+8} - \frac{-x}{x+4} - \frac{-x}{x+6} = 0 \\
& \Leftrightarrow -x \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (tmdk) \\ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Giải $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} = 0$ ta có:

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left(\frac{2x+10}{(x+2)(x+8)} - \frac{2x+10}{(x+4)(x+6)} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow (2x+10) \left(\frac{1}{(x+2)(x+8)} - \frac{1}{(x+4)(x+6)} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10 = 0 \\ \frac{1}{(x+2)(x+8)} - \frac{1}{(x+4)(x+6)} = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ \frac{1}{(x+2)(x+8)} = \frac{1}{(x+4)(x+6)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 (tmdk) \\ (x+2)(x+8) = (x+4)(x+6) (vonghiem) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy pt có tập nghiệm $S = \{-5; 0\}$

Bài 4

Tứ giác $DHKN$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow \widehat{KDH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KDM} + \widehat{MDH} = 90^\circ$$

Có $KN \parallel DH \Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{MDH}$ (so le trong)

$$\text{Mà } \widehat{MDH} + \widehat{HDP} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KDM} = \widehat{HDP}$$

$$\Rightarrow \triangle KDM = \triangle HDP$$

$$\Rightarrow DK = DH$$

Hình chữ nhật $DHKN$ là hình vuông.

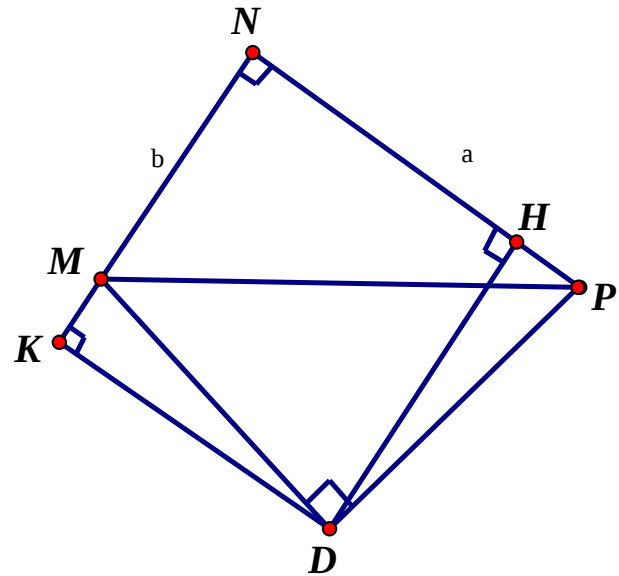
$$\Rightarrow NK = NH$$

$$\Rightarrow b + MK = a - PH$$

$$\Rightarrow b + MK = a - MK$$

$$\Rightarrow 2MK = a - b$$

$$\Rightarrow MK = \frac{a-b}{2}$$



$$NK = MN + MK = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$$

$$S_{DKNH} = NK^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$$

Bài 5

$$\text{a) } \triangle AEB \sim \triangle AFC \text{ (g.g)} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ACF}$$

$$\text{Mà } \widehat{ACF} = \widehat{HDE}$$

$$\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{HDE}$$

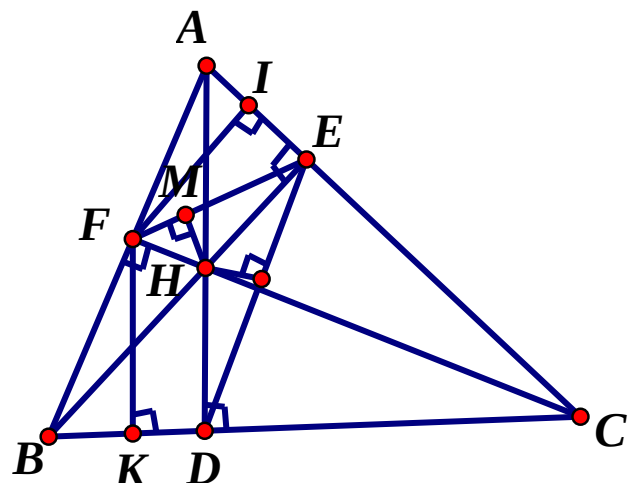
Có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BHC} = 90^\circ + \widehat{FBE} \\ \widehat{BDE} = 90^\circ + \widehat{HDE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{BDE}$$

Xét $\triangle BDE$ và $\triangle BHC$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \text{ chung} \\ \widehat{BHC} = \widehat{BDE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle BHC$$

$$\text{b) } \triangle AEB \sim \triangle AFC \text{ (g.g)}$$



$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}, \text{ và } \widehat{EAF} = \widehat{BAC} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \triangle CED \sim \triangle CBA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CBA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{CEB} \Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HED}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow EH$ là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$

$\Rightarrow HM = HN$ (Tính chất điểm thuộc tia phân giác của góc)

c) Theo Talet $\frac{BK}{BD} = \frac{BQ}{BE} \left(= \frac{BF}{BA} \right)$

$$\Rightarrow KQ // DE \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow IJ // DE \quad (2)$$

$$\text{Và } \frac{CD}{CK} = \frac{CE}{CI} \left(= \frac{CH}{CF} \right) \Rightarrow IK // DE \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow I, J, Q, K$ thẳng hàng.

**UBND HUYỆN HOÀI NHƠN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Môn: Toán 8

Thời gian: 150 phút

Bài 1 (4.0 điểm):

- a) Chứng minh rằng: Chữ số tận cùng của hai số tự nhiên n và n^5 là như nhau.
b) Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2 + x - p = 0$; với p là số nguyên số.

Bài 2: (3.0 điểm):

- a) Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn $a + b + c = 0$ Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$$

- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2015; \quad B = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$$

Bài 3 (3.0 điểm):

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$$

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có giá trị.
b) Rút gọn biểu thức P
c) Tìm giá trị của P khi x thỏa mãn $x^3 - x^2 + 2 = 0$

Bài 4 (4.0 điểm):

- a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

Bài 5 (4.0 điểm)

Cho M là một điểm bất kì nằm trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1

- a) Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$
b) Xét điểm M nằm trên đường chéo AC , kẻ $MN \perp AB$ tại N , gọi O là trung điểm của AM . Chứng minh rằng: $CN^2 = 2.OB^2$.

Bài 6 (2.0 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BH ở E . Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F . Chứng minh rằng: $CF \parallel AE$

Hướng dẫn

Bài 1 (4.0 điểm):

- a) Chứng minh rằng: Chữ số tận cùng của hai số tự nhiên n và n^5 là như nhau.
b) Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2 + x - p = 0$; với p là số nguyên số.

Giải

$$\begin{aligned} a) \quad n^5 - n &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \\ &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5n(n - 1)(n + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) : 2 : 5$$

$$5n(n - 1)(n + 1) : 2 : 5$$

$$\Rightarrow n^5 - n : 10$$

Chữ số tận cùng của hai số tự nhiên n và n^5 là như nhau

$$b) P = x^2 + x = x(x+1)$$

$$\text{Vì } x(x+1):2 \Rightarrow p:2 \Rightarrow p=2$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)-(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Bài 2: (3.0 điểm):

a) Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn $a+b+c=0$ Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2+b^2-c^2} + \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{c^2+a^2-b^2}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$$A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2015; \quad B = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$$

Giải

$$a) a+b+c=0$$

$$\Leftrightarrow a+b=-c$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

$$TT \quad c^2 + b^2 - a^2 = -2cb$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = -2ac$$

$$P = \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} = \frac{-1}{2} \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = 0$$

$$A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2015$$

$$A = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 4x + 2 + 2013$$

$$A = x^2(x^2 - 2x + 1) + 2(x^2 - 2x + 1) + 2013$$

$$= (x-1)^2(x^2 + 2) + 2013$$

GTNN của A là 2013 tại $x=1$

$$B = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2} = \frac{(x-1)^2 + 2015}{x^2} = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{2015}{x^2} \geq \frac{2015}{x^2}$$

$$\text{GTNN B khi } \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 = 0 \quad \text{Vậy GTNN } B = \frac{2015}{1} = 2015$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Bài 3 (3.0 điểm):

$$\text{Cho biểu thức: } P = \frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-9x+20}$$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P có giá trị.

b) Rút gọn biểu thức P

c) Tìm giá trị của P khi x thỏa mãn $x^3 - x^2 + 2 = 0$

Giải:

$$P = \frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)}$$

$$x \neq \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

a) ĐKXD

$$P = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}$$

$$b) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-5}$$

$$x^3 - x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2(x-1)(x+1) = 0$$

$$c) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Thay $x = -1$ vào P ta được $P = \frac{-5}{6}$

Bài 4 (4.0 điểm):

a) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

Giải

a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác

$$a - b \leq c$$

$$a^2 + b^2 - c^2 \leq 2ab$$

$$TT: a^2 + c^2 - b^2 \leq 2ac; c^2 + b^2 - a^2 \leq 2cb (1)$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$TT: c^2 + b^2 \geq 2cb; a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac (2)$$

Từ (1) và (2) $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac)$

$$10x^2 + 50y^2 + 42xy + 14x - 6y + 57 < 0$$

$$b) \Leftrightarrow 9x^2 + 49y^2 + 42xy + x^2 + 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 - 1 < 0$$

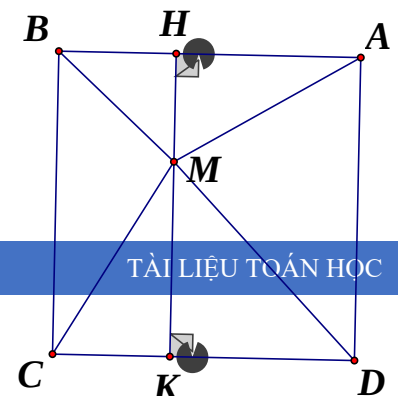
$$\Leftrightarrow (3x+7y)^2 + (x+7)^2 + (y-3)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7=0 \\ y-3=0 \\ 3x+7y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=3 \end{cases}$$

Bài 5 (4.0 điểm)

Liên hệ tài liệu word toán SĐT và zalo: 039.373.2038

TÀI LIỆU TOÁN HỌC



Cho M là một điểm bất kì nằm trong hình vuông ABCD có cạnh bằng 1

a) Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$

b) Xét điểm M nằm trên đường chéo AC, kẻ $MN \perp AB$ tại N, gọi O là trung điểm của AM. Chứng minh rằng: $CN^2 = 2.OB^2$.

Giải.

a) Kẻ HK vuông góc với AB, DC và HK đi qua điểm M

$$MA^2 = HA^2 + HM^2$$

$$MB^2 = HB^2 + HM^2$$

$$MC^2 = KC^2 + KM^2$$

$$MD^2 = KD^2 + KM^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = HA^2 + HB^2 + KC^2 + KD^2 + 2(HM^2 + KM^2)$$

$$\geq \frac{(HA+HB)^2}{2} + \frac{(KC+KD)^2}{2} + (HM+KM)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $HA = HB$; $KC = KD$; $HM = KM$

b)

$$MH \perp BC \Rightarrow MH = NB$$

Kẻ tại H

$\triangle AMN$

vuông cân có O là trung điểm của AM

$$\Rightarrow MN^2 = 2.ON^2 \Rightarrow \frac{ON^2}{MN^2} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\triangle MHC \text{ vuông cân ở H} \Rightarrow MC^2 = 2MH^2 \Rightarrow \frac{MH^2}{MC^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NB^2}{MC^2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{ON}{MN} = \frac{NB}{MC} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\Rightarrow \triangle ONB \sim \triangle NMC \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \frac{OB}{NC} = \frac{ON}{MN} \Leftrightarrow \frac{OB^2}{NC^2} = \frac{ON^2}{MN^2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{OB^2}{NC^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow NC^2 = 2.OB^2$$

Từ (1) và (4)

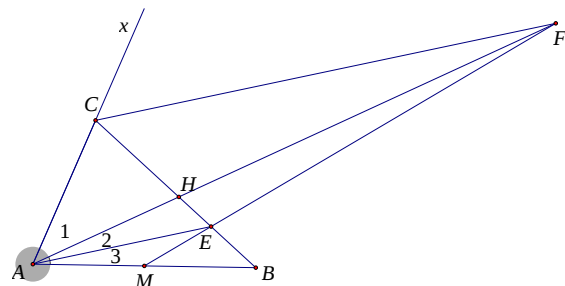
Bài 6 (2.0 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$. Đường phân giác của $\widehat{BAH}$ cắt BH ở E. Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh rằng: $CF \parallel AE$

Giải

Gọi Cx là tia đối của tia CA

Xét $\triangle CAH$ và $\triangle CBA$ có
 $\widehat{ACH}$ chung



$$\widehat{A_1} = \widehat{B} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle CAH \sim \triangle CBA \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{AH}{BA} \quad (1)$$

$$\text{Áp dụng tính chất đường phân giác vào tam giác HBA ta có } \frac{AH}{AB} = \frac{HE}{EB} \quad (2)$$

Áp dụng Menelaus vào tam giác HAB các điểm M, E, F

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{FA}{FH} \cdot \frac{EH}{EB} = 1 \Rightarrow \frac{EH}{EB} = \frac{FH}{FA} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3)} \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{FH}{FA}$$

$$\triangle AHC \text{ có } \frac{CH}{CA} = \frac{FH}{FA} \text{ theo tính chất phân giác ngoài ta có } \widehat{ACH}$$

CF là phân giác ngoài

$$\Rightarrow \widehat{ACF} = \widehat{BCF} = \frac{1}{2} \widehat{BCx}$$

$$\text{Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác ABC có } \widehat{BCx} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACF} = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}) = \frac{\widehat{A_1} + 2\widehat{A_1} + \widehat{A_1}}{2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{CAF}$$

$$\widehat{ACF} = \widehat{CAF} \text{ (vị trí đồng vị) Suy ra CF // AE}$$

Ta được

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN MỘC XUYỀN
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2017 – 2018
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (3,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x^2 + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

- 1) Rút gọn biểu thức
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Bài 2: (4,5 điểm)

- 1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 64$
- 2) Giải phương trình: $\frac{x + 58}{7} + \frac{x + 162}{31} + \frac{x + 151}{17} + \frac{x + 110}{10} = 0$
- 3) Tìm số dư trong phép chia đa thức $P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2015$ cho đa thức $Q(x) = x^2 + 10x + 21$

Bài 3: (4,5 điểm)

- 1) Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$ và $\frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} = 9$
 Tính giá trị biểu thức $M = (a - 3b + c)^{2018}$
- 2) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.
- 3) Với $n \in \mathcal{N}, n \geq 2$ và $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Hãy so sánh M với 1

Bài 4: (5,0 điểm)

Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) và $AB < CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CD, AB, DB, CA

- 1) Chứng minh NM là tia phân giác của $\widehat{PNQ}$
- 2) Tính số đo các góc của tứ giác MPNQ, biết hình thang cân ABCD có $\widehat{C} = \widehat{D} = 50^\circ$
- 3) Chứng minh $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có diện tích 12dm^2 . Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt BD tại Q. Tính diện tích tứ giác MQDC.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN MỘC XUYỀN**Năm học: 2017-2018****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (3,0 điểm)**

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x^2 + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

1) Rút gọn biểu thức

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Lời giải

$$\begin{aligned} 1) A &= \left(\frac{3x^2 + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1} \\ &= \frac{3x^2 + 3 - (x - 1)^2 - (x^2 + x + 1)}{x^3 - 1} : \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1} \\ &= \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x - 1}{2x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{2x^2 - 5x + 4} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{1}{2x^2 - 5x + 4}$ (với $x \neq 1$)

2) Ta có $2x^2 - 5x + 4 = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$ với mọi x

$\Rightarrow A \leq \frac{8}{7}$ với mọi x

Vậy $\text{Max} A = \frac{8}{7}$ khi $x = \frac{5}{4}$

Bài 2: (4,5 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 64$

2) Giải phương trình: $\frac{x+58}{7} + \frac{x+162}{31} + \frac{x+151}{17} + \frac{x+110}{10} = 0$

3) Tìm số dư trong phép chia đa thức $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2015$ cho

đa thức $Q(x) = x^2 + 10x + 21$

Lời giải

1) Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 64 &= (x^2)^2 + 8^2 + 2x^2 \cdot 8 - 2 \cdot x^2 \cdot 8 \\ &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8) \end{aligned}$$

$$2) \frac{x+58}{7} + \frac{x+162}{31} + \frac{x+151}{17} + \frac{x+110}{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+58}{7} + 6 \right) + \left(\frac{x+162}{31} - 2 \right) + \left(\frac{x+151}{17} - 3 \right) + \left(\frac{x+110}{10} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{x+100}{7} + \frac{x+100}{31} + \frac{x+100}{17} + \frac{x+100}{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+100) \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{31} + \frac{1}{17} + \frac{1}{10} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+100 = 0 \Leftrightarrow x = -100$$

Vậy $x = -100$

$$3) \text{ Ta có } (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2008 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2015$$

$$= \left[(x^2 + 10x + 21) - 5 \right] \left[(x^2 + 10x + 21) + 3 \right] + 2015$$

$$= (x^2 + 10x + 21)^2 + 3(x^2 + 10x + 21) - 5(x^2 + 10x + 21) - 15 + 2015$$

$$= (x^2 + 10x + 21)^2 - 2(x^2 + 10x + 21) + 2000$$

Vậy dư của phép chia là 2000

Bài 3: (4,5 điểm)

$$1) \text{ Cho các số } a, b, c \text{ khác } 0 \text{ thỏa mãn } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \text{ và } \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} = 9$$

Tính giá trị biểu thức $M = (a - 3b + c)^{2018}$

2) Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

$$3) \text{ Với } n \in \mathcal{N}, n \geq 2 \text{ và } M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \text{ Hãy so sánh } M \text{ với } 1$$

Lời giải

$$1) \text{ Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \text{ và } \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} = 9$$

$$\text{ta có } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{c} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = -c = b$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \Rightarrow \frac{1}{-c} = 3 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } M = (a - 3b + c)^{2018} = (3c)^{2018} = (-1)^{2018} = 1$$

2)

Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$ Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2$.

$$(k+1)^2 = k^2 + k^2 + 2k + 1 + k^4 + 2k^3 + k^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2 = [k(k+1) + 1]^2$$

là số chính phương lẻ

3)Ta có

$$M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Ta thấy:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\Leftrightarrow M < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$\Leftrightarrow M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow M < 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\Leftrightarrow M < 1$$

Bài 4: (5,0 điểm)

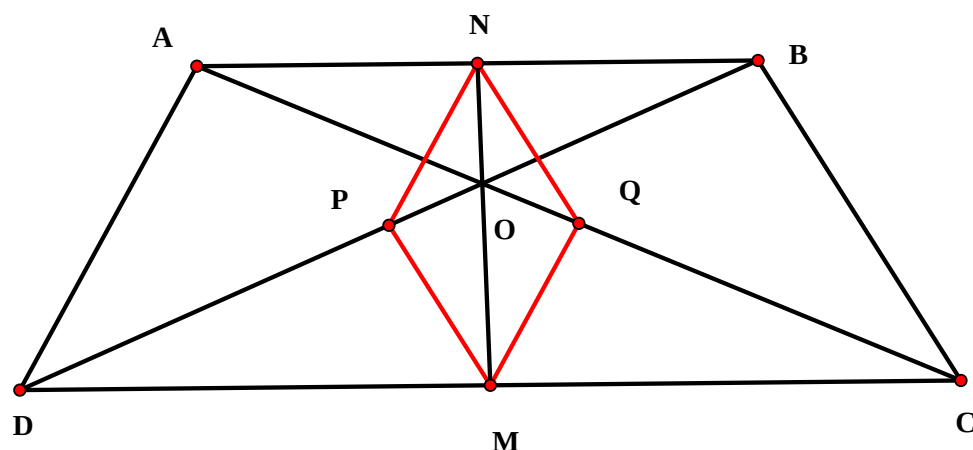
Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) và $AB < CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CD, AB, DB, CA

1) Chứng minh NM là tia phân giác của $\widehat{PNQ}$

2) Tính số đo các góc của tứ giác MPNQ, biết hình thang cân ABCD có $\widehat{C} = \widehat{D} = 50^\circ$

3) Chứng minh $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$

Lời giải



1) Do N, P là trung điểm của AB, BD nên NP là đường trung bình $\triangle ABD$

$$\Rightarrow NP \parallel AD; NP = \frac{1}{2}AD \quad (1)$$

Tương tự $QM \parallel AD; QM = \frac{1}{2}AD \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có tứ giác MQNP là hình bình hành mặt khác $NQ = \frac{1}{2}BC$ mà

$AD = BC \Rightarrow PN = NQ$ do đó hình bình hành MQNP là hình thoi

suy ra MN là phân giác $\widehat{PNQ}$

2) Ta có $\widehat{QMC} = \widehat{ADC} = 50^\circ$ (đồng vị)

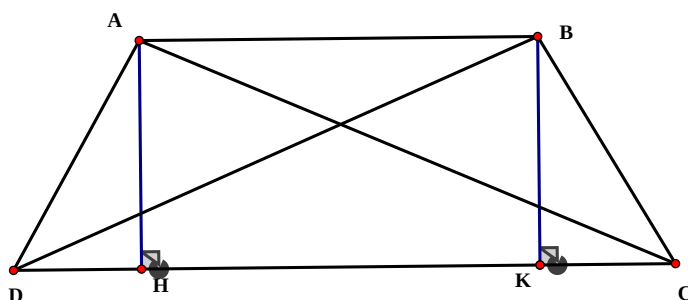
$$\widehat{PMD} = \widehat{BCD} = 50^\circ \text{ (đồng vị)}$$

$$\widehat{PMQ} = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$

$$\widehat{NPM} = \widehat{NQM} = \frac{360^\circ - 2 \cdot 50^\circ}{2} = 100^\circ$$

3) Kẻ $AH \perp DC; BK \perp DC$ ($H, K \in DC$)

$\Rightarrow ABKH$ là hình chữ nhật



$$\Rightarrow AB = HK$$

$$AD^2 = HA^2 + HD^2 \text{ (Pytago)}$$

$$AC^2 = HA^2 + HC^2 \text{ (Pytago)}$$

$$\Rightarrow AC^2 - AD^2 = A^2 - AD^2 = (HC + HD)(AC - AD) = CD(HC - HD)$$

Tương tự:

$$BD^2 - BC^2 = CD(KD - KC)$$

Cộng vế với vế ta được:

$$(AC^2 + BD^2) - (AD^2 + BC^2) = CD(HC - HD + KD - AC)$$

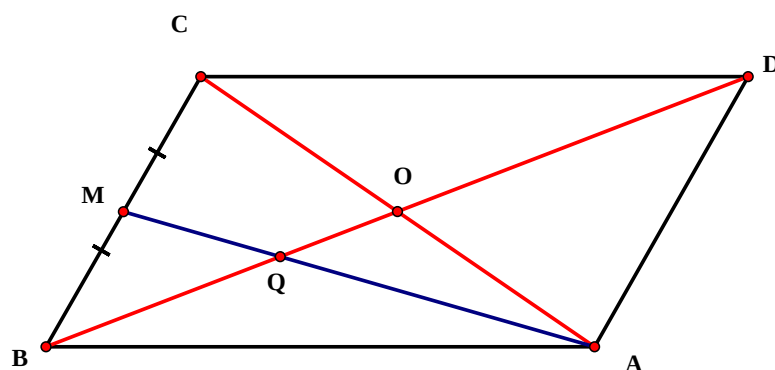
$$= CD[(HC - CC) + (KD - HQ)] = CD(HK + KD) = CD.2AB = 2.AB.CD$$

$$\text{Vậy } AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$$

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có diện tích 12dm^2 . Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt BD tại Q. Tính diện tích tứ giác MQDC.

Lời giải



Gọi O là giao điểm AC, BD $\Rightarrow$ O là trung điểm BC

$$\Rightarrow Q \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow BQ = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD$$

$$\text{Ta có: } S_{BQM} = \frac{1}{2} \cdot QK \cdot BM$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}QK\right) \cdot 2BM = 3\left(\frac{1}{2}QK \cdot BM\right) = 3S_{BQM}$$

$$\text{Lại có: } S_{OBC} = \frac{1}{2}S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3(\text{dm}^2)$$

$$\Rightarrow S_{BQM} = \frac{1}{3}S_{OBC} = \frac{1}{12} \cdot 12 \Leftrightarrow S_{MQDC} = S_{BCD} - S_{BQM} = \frac{12}{2} - 1 = 5(\text{dm}^2)$$

===== **HẾT** =====

**PHÒNG GD - ĐÀO TẠO
LỤC NAM**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2016-2017**

MÔN TOÁN 8

Thời gian: 150 phút làm bài

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x$

2) Cho $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $S = 2016a^2 + 2016b^2$

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right)$

Rút gọn biểu thức A và tìm các giá trị của x để $A < 0$

2) Chứng minh rằng $(n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ chia hết cho 24 với n là số tự nhiên.

Câu 3. (4,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$

2) Một đa thức P(x) chia cho $x^2 + x + 1$ thì dư $1 - x$ và chia cho $x^2 - x + 1$ thì dư $3x + 5$. Tìm số dư của phép chia P(x) cho $x^4 + x^2 + 1$

Câu 4. (6,0 điểm)

Gọi M là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AB. Về về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF.

1) Chứng minh AE vuông góc với BC

2) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

3) Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{x}{\sqrt{yz(1+x^2)}} + \frac{y}{\sqrt{zx(1+y^2)}} + \frac{z}{\sqrt{xy(1+z^2)}}$

.....Hết.....

ĐÁP ÁN**Câu 1. (4,0 điểm)**

$$\begin{aligned}
 1) \quad & x^2 + 6xy + 5y^2 - 5y - x \\
 &= (x^2 + 5xy) + (xy + 5y^2) - (x + 5y) \\
 &= x(x + 5y) + y(x + 5y) - (x + 5y) \\
 &= (x + 5y)(x + y - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & a^3 - 3ab^2 = 5 ; b^3 - 3a^2b = 10 \\
 & \Rightarrow (a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2 = 5^2 + 10^2 \\
 & \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 25 + 100 \\
 & \Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125 \\
 & \Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \\
 & \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \\
 & S = 2016a^2 + 2016b^2 = 2016(a^2 + b^2) = 2016 \cdot 5 = 10080
 \end{aligned}$$

Câu 2.

$$\begin{aligned}
 1) \quad A &= \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{4-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x^2-2x} - \frac{2}{x} \right) \\
 &= \left(\frac{4x}{2+x} + \frac{8x^2}{(2-x)(2+x)} \right) : \left(\frac{x-1}{x(x-2)} - \frac{2}{x} \right) \\
 &= \frac{(2-x) \cdot 4x + 8x^2}{(2-x)(2+x)} : \frac{x-1-(x-2) \cdot 2}{x(x-2)} \\
 &= \frac{8x - 4x^2 + 8x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(x-2)}{-x+3} \\
 &= \frac{4x(2+x)}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4x^2}{x-3}$$

Để $A < 0$ thì $\frac{4x^2}{x-3} < 0$ (đk: $x \neq \pm 2; x \neq 0; x \neq 3$)

Ta có: $4x^2 \geq 0$ với mọi x ; để $A < 0 \Rightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

Đối chiếu với điều kiện ta có $A < 0$ khi $x < 3; x \neq \pm 2; x \neq 0$

$$\begin{aligned} 2) B &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 = (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) \\ &= n(n + 3)(n^2 + 3n + 2) \\ &= n(n + 3)(n + 1)(n + 2) \\ &= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \end{aligned}$$

Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 2, 3, 4

Mà 2, 3, 4 đôi một nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow B : (2.3.4) \Rightarrow B : 24$

Câu 3. (4,0 điểm)

$$1) x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5 \Rightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2}$$

$$\begin{aligned} y \text{ nguyên} &\Leftrightarrow \frac{x - 5}{x^2 + 2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow (x - 5) : (x^2 + 2) \\ &\Rightarrow (x - 5)(x + 5) : (x^2 + 2) \\ &\Rightarrow (x^2 - 25) : (x^2 + 2) \\ &\Rightarrow (x^2 + 2 - 27) : (x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 27 : (x^2 + 2) \Rightarrow (x^2 + 2) \in \{3; 9; 27\} \text{ (do } x^2 + 2 \geq 2)$$

$x^2 + 2$	3	9	27
x	± 1	$\pm \sqrt{7}$ (loại)	± 5

Với $x = 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{3}$ (loại)

Với $x = -1 \Rightarrow y = -3$

Với $x = 5 \Rightarrow y = 5$

Với $x = -5 \Rightarrow y = \frac{-145}{27}$ (loại)

Vậy $(x; y) \in \{(-1; -3); (5; 5)\}$

2) Giả sử $P(x) = (x^4 + x^2 + 1)Q(x) + R(x)$ ($Q(x)$: thương; $R(x)$: dư)

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)Q(x) + R(x)$$

$$\Rightarrow P(x) - R(x) : (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$\Rightarrow P(x)$ và $R(x)$ có cùng số dư khi chia cho $x^2 + x + 1$ và $x^2 - x + 1$

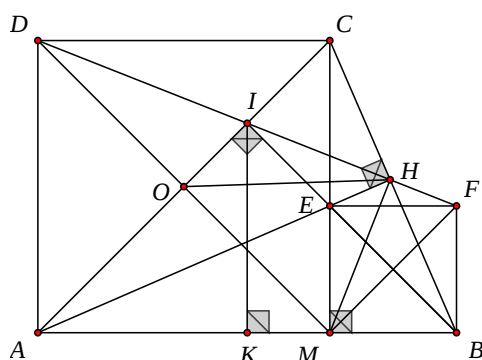
$$\Rightarrow R(x) = (x^2 + x + 1)(mx + n) + 1 - x$$

$$= (x^2 - x + 1)(px + q) + 3x + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = p \\ m + n = q - p \\ n + m - 1 = p - q + 3 \\ n + 1 = q + 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow m = p = -2$; $n = 4$; $q = 0$. Vậy $R(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$

Câu 4. (6,0 điểm)



a) $BE \parallel MD$ (do $\widehat{DMA} = \widehat{EBM} = 45^\circ$)

Mà $AC \perp DM$ (tính chất đường chéo hình vuông)

$\Rightarrow BE \perp AC$

+ Xét $\triangle CAB$ có $CM \perp AB$; $BE \perp AC \Rightarrow AE \perp BC$ (tính chất ba đường cao)

b) Gọi $AC \cap DM = O$

$$\text{Vì } \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow OH = \frac{AC}{2} \Rightarrow OH = \frac{DM}{2}$$

$$\Delta DMH \text{ có } OH = \frac{DM}{2} \Rightarrow \Delta DMH \text{ vuông tại H} \Rightarrow \widehat{MHD} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự có $\widehat{MHF} = 90^\circ$

Vậy 3 điểm D, H, F thẳng hàng

c) Gọi $I = DF \cap AC$

$$\Delta DMF \text{ có } DO = OM ; OI \parallel MF \Rightarrow ID = IF$$

Kẻ $IK \perp AB \Rightarrow K$ là trung điểm của AB (tính chất đường trung bình hình thang)

$$\Rightarrow IK = \frac{AB}{2}$$

AB cố định $\Rightarrow I$ cố định

Vậy DF luôn đi qua I cố định khi M di chuyển trên AB .

Câu 5. (1,0 điểm)

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \right) \cdot xyz = xyz$$

$$\Rightarrow z + x + y = xyz$$

$$\text{Xét } \sqrt{yz(1+x^2)} = \sqrt{yz + x^2yz}$$

$$= \sqrt{yz + x \cdot xyz}$$

$$= \sqrt{yz + x \cdot (x + y + z)}$$

$$= \sqrt{(x+y)(z+x)}$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{zx(1+y^2)} = \sqrt{(y+z)(x+y)}$$

$$\sqrt{xy(1+z^2)} = \sqrt{(z+x)(y+z)}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(x+y)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{x}{x+y} \cdot \frac{x}{z+x}} + \sqrt{\frac{y}{y+z} \cdot \frac{y}{x+y}} + \sqrt{\frac{z}{z+x} \cdot \frac{z}{y+z}}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cosi

$$\sqrt{\frac{x}{x+y} \cdot \frac{x}{z+x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{z+x} \right)$$

$$\sqrt{\frac{y}{y+z} \cdot \frac{y}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{x+y} \right)$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+x} \cdot \frac{z}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z} \right)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{y+z} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z} \right)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{z+x} + \frac{z}{z+x} \right) + \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} \right) \right]$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2} \cdot (1+1+1)$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{2} \cdot 3$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Max } Q = \frac{3}{2} \text{ khi } x = y = z = \sqrt{3}$$

$$(x + y + z = xyz \Rightarrow 3x = x^3 \Rightarrow x = \sqrt{3})$$

PHÒNG GD&ĐT THANH CHUÔNG

ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN LỚP 8

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $m(x^2 + 1) - x(m^2 + 1)$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

2. Cho $A = 33...3^2 + 55...544...4^2$ (n là số tự nhiên lớn hơn 1). Chứng minh rằng A là số chính phương.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{x-1009}{1010} + \frac{x+3}{1011} + \frac{x+2017}{1012} = 6$

b) Cho $abc = 1$. Chứng minh $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $N = \frac{4x^2 - 2x + 7}{x^2 + 2}$

b) Cho $x; y; z$ là các số không âm thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC

a) Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì nữa để diện tích tứ giác $AEHD$ bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC ?

c) Vẽ phân giác góc ACB cắt AM tại F và cắt AB tại G Chứng minh $\frac{CF}{FG} - \frac{CB}{CA} = 1$

Bài 5: (2,0 điểm) Sáu điểm phân biệt thuộc một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là 3cm và 4cm (Các điểm này có thể nằm trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong sáu điểm này mà bình phương khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 5cm.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN LỚP 8
PHÒNG GD&ĐT THANH CHƯƠNG
Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $m(x^2 + 1) - x(m^2 + 1)$

b) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

2. Cho $A = \underbrace{33\dots3}_n^2 + \underbrace{55\dots5}_{n-1} \underbrace{44\dots4}_n^2$ (n là số tự nhiên lớn hơn 1). Chứng minh rằng A là số chính phương.

Lời giải

1. a) b) Học sinh phân tích mỗi bài đúng cho 1,0 điểm, phân tích không hết trừ 0,5 điểm.

2. Đặt $a = \underbrace{11\dots1}_n = \frac{10^n - 1}{9}$

Ta có $10^n = 9a + 1$ và $\underbrace{11\dots1}_n = \frac{a-1}{10}$, suy ra:

$$\begin{aligned} A &= (3a)^2 + \left[5 \cdot \frac{a-1}{10} (9a+1) + 4a \right]^2 \\ &= 9a^2 + \left(\frac{9a^2 - 1}{2} \right)^2 = \left(\frac{9a^2 + 1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Vì A lẻ nên $\frac{9a^2 + 1}{2}$ nguyên. Suy ra A là số chính phương.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{x-1009}{1010} + \frac{x+3}{1011} + \frac{x+2017}{1012} = 6$

b) Cho $abc = 1$. Chứng minh $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) & \frac{x-1009}{1010} + \frac{x+3}{1011} + \frac{x+2017}{1012} = 6 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-1009}{1010} - 1 + \frac{x+3}{1011} - 2 + \frac{x+2017}{1012} - 3 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-1009-1010}{1010} + \frac{x+3-2 \cdot 1011}{1011} + \frac{x+2017-3 \cdot 1012}{1012} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x-2019}{1010} + \frac{x-2019}{1011} + \frac{x-2019}{1012} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-2019) \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 2019
 \end{aligned}$$

b) Vì $abc = 1$ nên đặt $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z \neq 0$

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}} + \frac{1}{1+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}} \\
 & = \frac{yz}{xy+yz+zx} + \frac{zx}{xy+yz+zx} + \frac{xy}{xy+yz+zx} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $N = \frac{4x^2 - 2x + 7}{x^2 + 2}$

b) Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$a) N = \frac{4x^2 - 2x + 7}{x^2 + 2} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 3x^2 + 6}{x^2 + 2} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} + 3 \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$. Vậy $\min N = 3$ khi $x = 1$

b) Ta có:

$$(x+1)^2 + y^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 1 \geq 2xy + 2x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} \leq \frac{1}{2xy + 2x + 2}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} \leq \frac{1}{2yz + 2y + 2}$$

$$\frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2zx + 2z + 2}$$

Hay

$$P \leq \frac{1}{2xy+2x+2} + \frac{1}{2yz+2y+2} + \frac{1}{2zx+2z+2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \right) = \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài 4: (6,0 điểm)

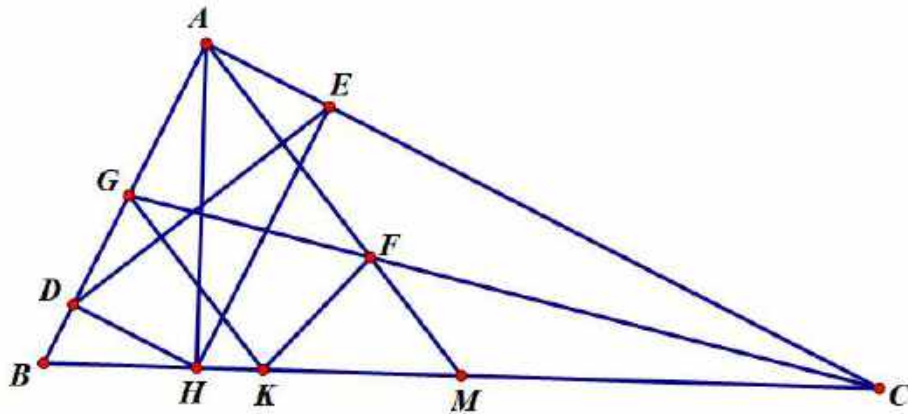
Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC

a) Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì nữa để diện tích tứ giác $AEHD$ bằng $\frac{1}{2}$ diện tích tam giác ABC ?

c) Vẽ phân giác góc ACB cắt AM tại F và cắt AB tại G Chứng minh $\frac{CF}{FG} - \frac{CB}{CA} = 1$

Lời giải



a) Ta có $AEHD$ là hình chữ nhật nên góc $ADE =$ góc AHE . Mà góc $AHE =$ góc C (vì cùng phụ góc EHC)

Suy ra $\triangle ADE$ đồng dạng với $\triangle ACB$ (g-g) nên $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Ta có $S_{AEHD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ nên $S_{ADE} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. Suy ra $\left(\frac{DE}{BC} \right)^2 = \frac{1}{4}$

Suy ra $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $DE = AM$. Khi đó $AH = AM$ nghĩa là tam giác ABC vuông cân tại A .

c) Kẻ $GK \parallel AM$, ta có $\frac{CM}{MK} = \frac{CF}{FG}$ (1) (theo Talet) $\frac{BG}{GA} = \frac{BK}{KM}$ (2) (theo Talet)

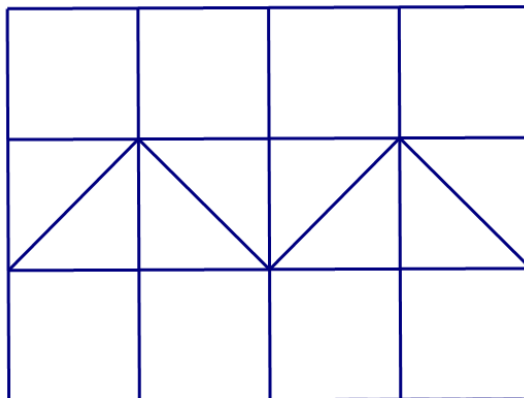
Mặt khác lại có $\frac{BG}{GA} = \frac{CB}{CA}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $\frac{BK}{KM} = \frac{CB}{CA}$ (4). Từ (1) và (4) lấy vế trừ vế ta có

$$\frac{CF}{FG} - \frac{CB}{CA} = \frac{CM}{MK} - \frac{BK}{KM} = \frac{CM - BK}{KM} = 1$$

Bài 5: (2,0 điểm) Sáu điểm phân biệt thuộc một hình chữ nhật có độ dài các cạnh là 3cm và 4cm (Các điểm này có thể nằm trong hoặc trên cạnh của hình chữ nhật). Chứng minh rằng luôn tồn tại hai điểm trong sáu điểm này mà bình phương khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 5cm.

Lời giải



Chia hình chữ nhật đã cho thành 5 phần như hình vẽ. Khi đó tồn tại 2 điểm trong 6 điểm nằm trong hoặc trên một hình. Ta có khoảng cách lớn nhất của 2 điểm trong một hình theo định lí Pitago: Bình phương khoảng cách giữa hai điểm lớn nhất bằng $1^2 + 2^2 = 5$. Vậy luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng 5.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT QUẬN 123
TRƯỜNG THCS ABC
ĐỀ THI THỬ SỐ 00

ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I: Chỉ ghi kết quả vào bài làm

Bài 1: Giải phương trình: $\frac{3x}{x+2} + \frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = 0$

Bài 2: Tìm các số tự nhiên n để $n^2 - 2n - 3$ chia hết cho $n - 1$

Bài 3: Biết rằng hai phương trình $x + 2 = 0$ hoặc $(x + 2)(ax - 4) = 0$ tương đương với nhau. Tìm a ?

Bài 4: Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

Bài 5: Tìm số hạng thứ 30 của dãy số 3; 7; 11; 15; 19;....

Bài 6: Tìm a đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 28x + a$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $4x^2 + 4x + y^2 - 6y = 24$

Bài 9: Cho tam giác ABC , các đường cao AH, BK, CI ($H \in BC, K \in AC, I \in AB$). Biết $AB = 3$ cm, $AC = 7$ cm và $AH = \frac{CI + BK}{2}$. Tính BC

Bài 10: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N . Biết $AB = 30$ cm, $CD = 50$ cm. Tính độ dài đoạn MN .

PHẦN II: Trình bày lời giải

Bài 11: 1) Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{xy + y^2} + \frac{y^2}{xy - x^2} - \frac{x^2 + y^2}{xy}$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P biết $x > y > 0$ và $x^2 - 4xy - 5y^2 = 0$.

2) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2}$.

Bài 12: 1) Cho tam giác ABC , đường phân giác AD ($D \in BC$). Gọi E là điểm đối xứng với A qua C . Đường thẳng đi qua B song song với AC cắt ED ở K . Chứng minh tam giác ABK cân tại B và $\widehat{DAK} = 90^\circ$.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên cạnh BC, AC, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại O . Chứng minh rằng: $\frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AO}{OD}$.

Bài 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
 $P = ab + bc + ca$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN
TRƯỜNG THCS ABC
Năm học: 2020-2021
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I: Chỉ ghi kết quả

Câu 1: $x = \frac{-1}{3}$. Lưu ý nếu thí sinh KL: $x = \frac{-1}{3}$; $x = 2$ cho 0,5 điểm.

Câu 2: $x = \frac{-1}{3}$

Câu 3: $n \in \{0; 2; 3; 5\}$

Câu 4: $a = 0; a = -2$

Câu 5: 119

Câu 6: $a = -16$

Câu 7: Min $P = \frac{-1}{2}$

Câu 8: $(x; y) \in \{(1; 8); (2; 6)\}$

Câu 9: $BC = 4,2 \text{ cm}$

Câu 10: $MN = 37,5 \text{ cm}$

PHẦN II : Trình bày lời giải

Câu 11:

1) Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{xy + y^2} + \frac{y^2}{xy - x^2} - \frac{x^2 + y^2}{xy}$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P biết $x > y > 0$ và $x^2 - 4xy - 5y^2 = 0$.

2) Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2}$.

Lời giải

$$1.a) P = \frac{x^2}{xy + y^2} + \frac{y^2}{xy - x^2} - \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{(x+y)y} - \frac{y^2}{(x-y)x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$P = \frac{x^3(x-y) - y^3(x-y) - (x^4 + y^4)}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$1.b) x^2 - 4xy - 5y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + xy) - (5xy + 5y^2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-5y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy - 5y^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + xy) - (5xy + 5y^2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-5y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5y = 0 \text{ vì } x + y > 0 \text{ do đó } \frac{x}{y} = 5$$

$$\text{Do } x > y > 0 \text{ nên } P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1}. \text{ Thay vào } P \text{ ta được } P = -\frac{13}{12}.$$

$$2) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = -\frac{1}{z^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = -3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{xyz} \Rightarrow xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = 3$$

$$A = \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} = xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = 3$$

Vậy $A = 3$.

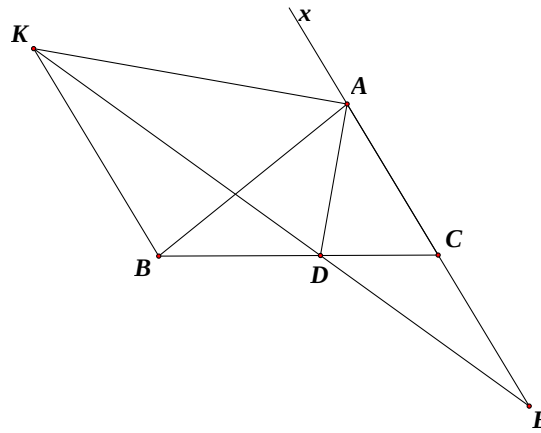
Câu 12:

1) Cho tam giác ABC , đường phân giác AD ($D \in BC$). Gọi E là điểm đối xứng với A qua C . Đường thẳng đi qua B song song với AC cắt ED ở K . Chứng minh tam giác ABK cân tại B và $\widehat{DAK} = 90^\circ$.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên cạnh BC, AC, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại O . Chứng minh rằng: $\frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AO}{OD}$.

Lời giải

1)



Ta có : AD là tia phân giác nên ta có : $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ (1)

Mà $BK \parallel AC \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{BK}{CE}$ mà $AC = CE(gt)$ suy ra $\frac{BK}{AC} = \frac{DB}{DC} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{AC} \Rightarrow AB = BK \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại B .

Ta có $\triangle ABK$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BKA}$ (3)

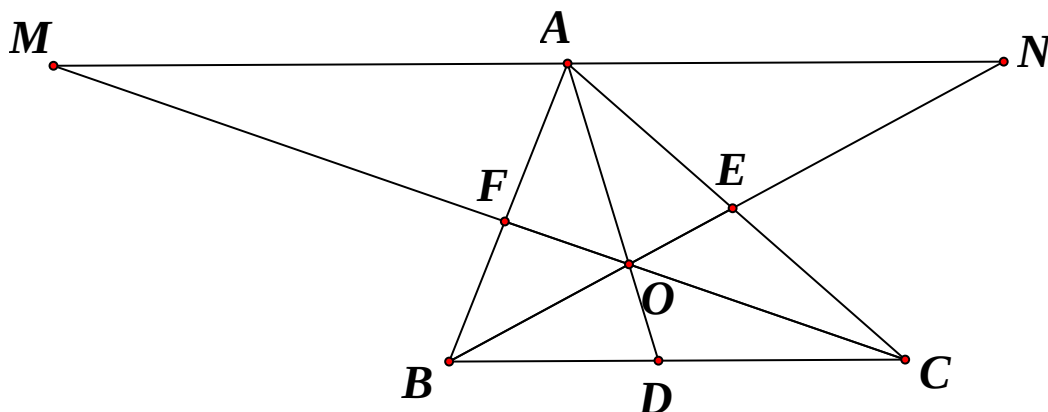
Kẻ tia đối Ax của tia AC ta có : $Ax // BK \Rightarrow \widehat{KAx} = \widehat{BAK} \quad (4)$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{KAx} = \frac{1}{2} \widehat{BAx} \quad (5)$$

Mặt khác AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BAC}$ (6)

Từ (5) và (6) $\widehat{BAD} + \widehat{KAB} = \frac{1}{2}(\widehat{BAx} + \widehat{BAC}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KAD} = 90^\circ$.

2) Ta có :



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BE, CF kéo dài lần lượt tại N, M .

$$\text{Ta có : } MA // BC \Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{AM}{BC}; NA // BC \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AN}{BC}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AM + AN}{BC} = \frac{MN}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{OA}{OD} = \frac{AM}{CD} = \frac{AN}{BD} = \frac{AM + AN}{BD + CD} = \frac{MN}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AO}{OD}.$$

Câu 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca$

Lời giải

$$\text{Ta có : } P = ab + bc + ca = ab + c(a + b) = ab + [3 - (a + b)](a + b)$$

$$= -a^2 - a(b - 3) + 3b - b^2$$

$$= -\left[a^2 + a(b - 3) + \frac{(b - 3)^2}{4} \right] + 3b - b^2 + \frac{(b - 3)^2}{4}$$

$$= -\left(a + \frac{b - 3}{2} \right)^2 + \frac{-3b^2 + 6b + 9}{4}$$

$$= -\left(a + \frac{b - 3}{2} \right)^2 - \frac{3}{4}(b - 1)^2 + 3 \leq 3$$

Vậy $\text{Max } P = 3$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN THƯỜNG TÍN ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG LỚP 8
MÔN TOÁN

ĐỀ THI HSG SỐ 25

NĂM HỌC: 2018-2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Ngày kiểm tra

Bài 1: (5,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3}, (x > 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn A ?

b) Tìm A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 12$

c) Chứng minh rằng: $A > 4$. Từ đó tìm x để $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 2: (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$

b) $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 4: (7,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Tính tổng:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$$

b) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

c) Chứng minh: H cách đều 3 cạnh tam giác DEF .

d) Trên cạnh HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

b) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$

Tính $D = (x + 2y + z)^{2018}$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI LỚP 8

Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3}, (x > 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn A ?

b) Tìm A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 12$

c) Chứng minh rằng: $A > 4$. Từ đó tìm x để $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải

a) Rút gọn A

Với $x > 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} + \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - x^3} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^2 + x + 1}{x} + \frac{x^2 + 1 - x}{x} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \\ &= \frac{(x + 1)^2}{x} \end{aligned}$$

b) Tìm A biết x thỏa mãn: $x^2 + x = 12$

Ta có:

$$x^2 + x = 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Khi } x = 3 \text{ thì } A = \frac{16}{3}.$$

c) Chứng minh rằng: $A > 4$. Từ đó tìm x để $B = \frac{6}{A}$ nhận giá trị nguyên

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } \frac{(x + 1)^2}{x} > \frac{4x}{x} = 4 \Rightarrow A > 4$$

$$\text{Ta có } B = \frac{6}{A} = \frac{6x}{(x + 1)^2} > 0 \text{ vì } x > 0$$

$$\text{Vì } A > 4 \Rightarrow \frac{6}{A} < \frac{6}{4} = 1,5$$

Suy ra $0 < B < 1,5$ mà B nhận giá trị nguyên nên $B = 1$

$$B = 1 \text{ khi } \frac{6x}{(x+1)^2} = 1 \Leftrightarrow 6x = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B = 1 \text{ khi } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 2: (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$$

$$\text{b) } x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

Lời giải

a) Điều kiện $x \neq -6; -4; -1; 3$

$$\frac{3}{x^2 + 5x + 4} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} = \frac{4}{3} + \frac{9}{x^2 + 3x - 18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+6) + 2(x+1)}{(x+1)(x+4)(x+6)} - \frac{9}{(x-3)(x+6)} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{(x+1)(x+6)} - \frac{9}{(x-3)(x+6)} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{(x+1)(x-3)} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = -3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \{0; 2\}$$

$$\Leftrightarrow (12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4) = 7920 \quad (\text{Nhân cả hai vế với } 24)$$

$$\Leftrightarrow (144x^2 - 60x + 4)(144x^2 - 60x + 6) = 7920$$

$$\text{Đặt: } 144x^2 - 60x + 5 = y$$

$$\text{Ta có phương trình: } (y-1)(y+1) = 7920 \Leftrightarrow y^2 = 7921 \Leftrightarrow y = 89 \text{ hoặc } y = -89$$

$$\text{Với } y = 89, \text{ ta có: } 144x^2 - 60x + 5 = 89. \text{ Giải ra: } x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{-7}{12}$$

$$\text{Với } y = -89, \text{ ta có: } 144x^2 - 60x + 5 = -89. \text{ Giải thích được phương trình này vô nghiệm.}$$

Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ hoặc $x=\frac{-7}{12}$

$$b) x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 5x^3 - 25x^2 - 5x^2 + 25x + 6x - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 5x^2 - 5x + 6)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 6x^2 - x^2 - 6x + x + 6)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 0 \\ x - 5 = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 5 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{-6; 5\}$$

Bài 3: (2,0 điểm)

Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Lời giải

Ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

$$\Rightarrow a(a+b)(a+c) + b(b+c)(b+a) + c(a+c)(a+b) = (a+b)(b+c)(a+c)$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = -abc$

Ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = \frac{a^2(a+b)(a+c) + b^2(b+c)(b+a) + c^2(b+c)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Biến đổi tử thức ta có

$$\begin{aligned} & a^2(a+b)(a+c) + b^2(b+c)(b+a) + c^2(b+c)(a+c) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b + (a+b+c)(a.b.c) \end{aligned}$$

Thay $a^3 + b^3 + c^3 = -abc$ ta được

$$\begin{aligned} & a^2(a+b)(a+c) + b^2(b+c)(b+a) + c^2(b+c)(a+c) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b + (a+b+c)(-a^3 - b^3 - c^3) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Bài 4: (7,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Tính tổng:

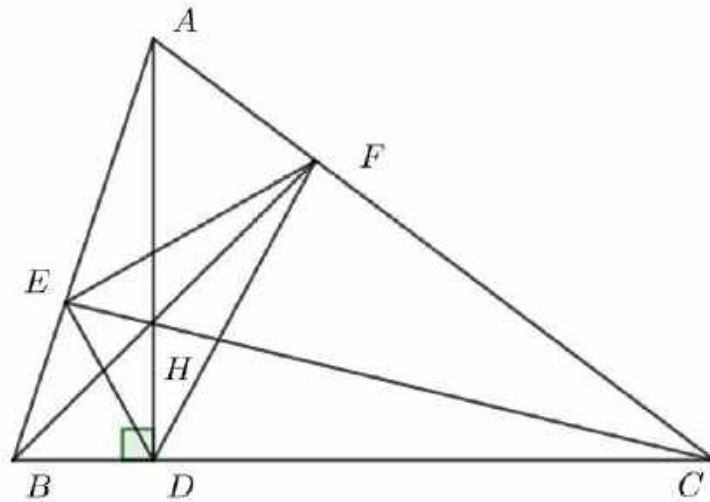
$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$$

b) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

c) Chứng minh: H cách đều 3 cạnh tam giác DEF .

d) Trên cạnh HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Tổng:

$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BCH} + S_{CHA} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

Ta có

$$BH \cdot BE = BD \cdot BC$$

$$CH \cdot CF = CD \cdot CB$$

$$\text{Suy ra } BH \cdot BE + CH \cdot CF = (BD + CD) \cdot BC = BC^2$$

c) Chứng minh: H cách đều 3 cạnh tam giác DEF .

Ta chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{DEC}$$

$$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{DEB}$$

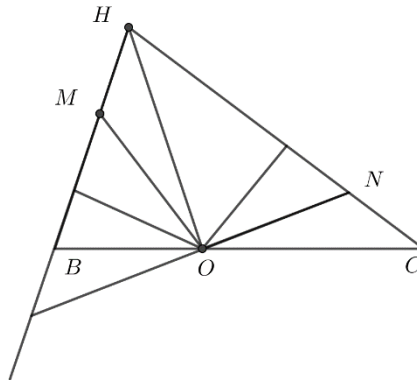
Suy ra EB là phân giác góc FED

Chứng minh tương tự ta có FC là phân giác góc DFE .

Suy ra H là giao điểm ba đường phân giác $\triangle DEF$

Suy ra H cách đều 3 cạnh tam giác DEF .

- d) Trên cạnh HB, HC lấy các điểm M, N tùy ý sao cho $HM = CN$. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.



Khi M trùng với H thì N trùng với C

Kẻ đường trung trực của đoạn HC

Khi $M \equiv C'$ thì $HC' = CH$ khi đó $N \equiv H$

Kẻ đường trung trực của đoạn HC'

Hai đường trung trực cắt nhau tại O khi đó điểm O cố định.

Chứng minh điểm O nằm trên đường trung trực của MN khi M, N thay đổi.

Chứng minh $OM = ON$

Vậy đường trung trực của đoạn MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

b) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$

Tính $D = (x + 2y + z)^{2018}$

Lời giải

- a) Gọi số chính phương có bốn chữ số ban đầu là $\overline{abcd}$

Ta có $\overline{abcd} = m^2$

Theo đề bài ta có $\overline{abcd} + 1353 = n^2$

Suy ra $n^2 - m^2 = 1353$

$\Rightarrow (n - m)(n + m) = 3.11.41$

Có $m > \sqrt{1000}; n < \sqrt{100000}$

Suy ra $64 < m + n < 200$

$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 123 \\ n - m = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 56 \\ n = 67 \end{cases}$

Vậy số cần tìm là 3136.

- b) Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c$

Ta có $a + b + c = 2$ và $2ab - c^2 = 4$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 4 = 2ab - c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2c^2 + 2bc + 2ac = 0$

$(a + c)^2 + (b + c)^2 = 0$

$\Rightarrow a = b = -c$

$\Rightarrow x = y = -z$

Thay $x = y = -z$ vào $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ta tìm được

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

Thay vào $D = (x + 2y + z)^{2018}$ ta được

$D = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} \right) \right)^{2018} = 1$

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN VĨNH BẢO
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN: TOÁN 8

Năm học: 2018 - 2019

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$
2. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A khi $x > 1$.
3. Cho $xy = 1$, chứng minh rằng: $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x - y$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$
2. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $AB < AC$. Kẻ đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng có chứa đỉnh A , bờ là đường thẳng BC , vẽ hình vuông $AHDE$ (với D thuộc đoạn thẳng HC). Gọi F là giao điểm của DE và AC . Đường thẳng qua F song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AC tại điểm G . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác $ABGF$ là hình vuông.
- b) Tứ giác $DEHG$ là hình thang
- c) Ba đường thẳng AG, BF, HE đồng quy.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Kẻ $NH \perp CM$ tại H . Kẻ $HE \perp AB$ tại E . Chứng minh rằng $\triangle ABH$ cân và HM là tia phân giác của $\widehat{BHE}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng một màu.

♣HẾT♣

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$
2. Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A khi $x > 1$.
3. Cho $xy = 1$, chứng minh rằng: $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x - y$

Lời giải

1. $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$
 $= x^4 - x + 2019x^2 + 2019x + 2019$
 $= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2019(x^2 + x + 1)$
 $= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$
2. $A = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ với $x > 1$
 $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$
 $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1}$
 $= \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1}$
 $= x + 1 + \frac{1}{x-1} = \left(x - 1 + \frac{1}{x-1} \right) + 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ ta được:

$$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 4 \text{ hay } A \geq 4$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (thỏa mãn)} \\ x=0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $A_{\min} = 4$ khi $x = 2$

3. Ta có $(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x - y$

$$\begin{aligned}
&= x^5 + x^3 y^2 + x^2 y^3 + y^5 - x - y \\
&= x^5 + y^5 + x^2 y^2 (x + y) - (x + y) \\
&= x^5 + y^5 + (x + y) - (x + y) \quad \text{do } xy = 1 \\
&= x^5 + y^5 \text{ (dpcm)}
\end{aligned}$$

Vậy $x^5 + y^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x - y$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

2. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

Lời giải

1. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

⊕ Xét $x = 0$ ta thấy phương trình vô nghiệm

⊕ Xét $x \neq 0$ ta có:

$$y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right] > 0 \text{ với } \forall x \Rightarrow y^3 > x^3$$

$$y^3 - (x+1)^3 = -x^2 + 1 \leq 0 \text{ với } \forall x \neq 0; x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^3 \leq (x+1)^3$$

$$\Rightarrow x^3 < y^3 < (x+1)^3. \text{ mà } x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nếu $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Nếu $x = -1 \Rightarrow y = 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $(x; y) \in \{(1; 2); (-1; 0)\}$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có: $\frac{a^3}{b} + ab \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot ab} = 2a^2 \quad (1)$

Tương tự ta có: $\frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2 \quad (2); \quad \frac{c^3}{a} + ac \geq 2c^2 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ab + bc + ca \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \quad (4)$

Lại có: $a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ac;$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac \quad (5)$$

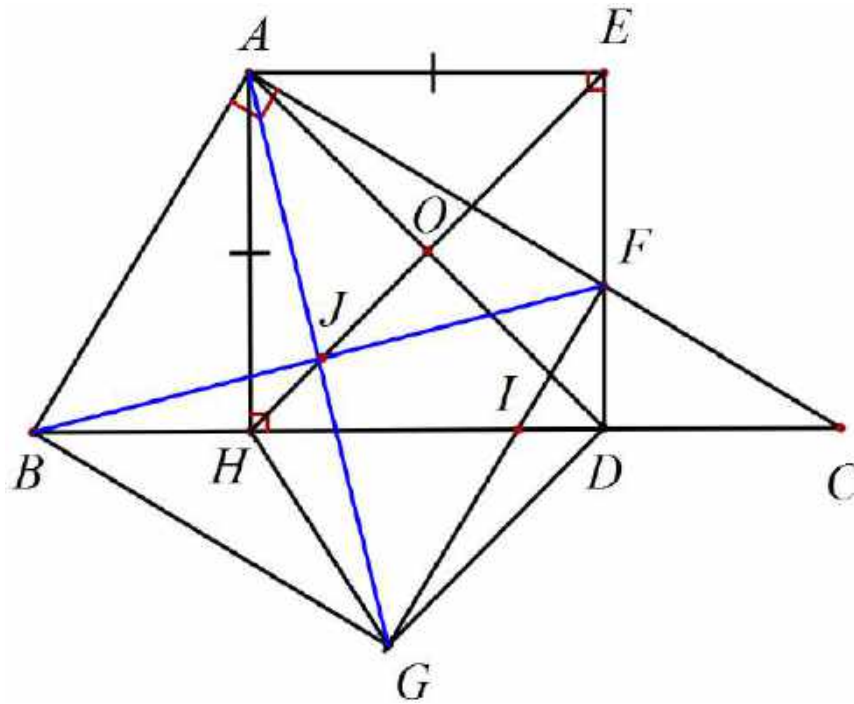
Từ (4) và (5) $\Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ac$ (đpcm)

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $AB < AC$. Kẻ đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng có chứa đỉnh A , bờ là đường thẳng BC , vẽ hình vuông $AHDE$ (với D thuộc đoạn thẳng HC). Gọi F là giao điểm của DE và AC . Đường thẳng qua F song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AC tại điểm G . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $ABGF$ là hình vuông.
- Tứ giác $DEHG$ là hình thang
- Ba đường thẳng AG, BF, HE đồng quy.

Lời giải



a) + Ta có: $AB \parallel FG$ (gt); $BG \parallel AF$ (gt)

$\Rightarrow ABGF$ là hình bình hành (1)

+ Xét $\triangle AEF$ và $\triangle AHB$ có:

$$\widehat{E} = \widehat{H} = 90^\circ$$

$AE = AH$ ($AHDE$ là hình vuông)

$\widehat{EAF} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với $\widehat{HAF}$)

$\Rightarrow \triangle AEF = \triangle AHB$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AF$ (2 cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABGF$ là hình thoi.

mà $\widehat{BAF} = 90^\circ$ (gt) nên $ABGF$ là hình vuông

b) Gọi I là giao điểm của BD và FG

+ Xét $\triangle BIG$ và $\triangle FID$ có:

$$\widehat{G} = \widehat{D} = 90^\circ$$

$$\widehat{BIG} = \widehat{FID} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle BIG \hat{=} \triangle FID (g.g) \Rightarrow \frac{IF}{IB} = \frac{ID}{IG}$$

$$\Rightarrow \triangle BIF \hat{=} \triangle GID (c.g.c) \Rightarrow \widehat{IDG} = \widehat{IFB}$$

Mà FB là phân giác của $\widehat{AFG} = 90^\circ$ (tính chất hình vuông)

$$\Rightarrow \widehat{IFB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{IDG} = 45^\circ$$

Lại có: $AHDE$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{EHD} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{IDG} = \widehat{EHD}$$

mà $\widehat{IDG}$ và $\widehat{EHD}$ ở vị trí so le trong nên $GD \parallel HE \Rightarrow HGDE$ là hình thang

c) Gọi O là giao điểm của HE và $AD \Rightarrow O$ là trung điểm của AD (tính chất hình vuông)

+ $\triangle ADG$ có: $OH \parallel GD$ (chứng minh trên)

O là trung điểm của AD

$$\Rightarrow OH \text{ đi qua trung điểm } J \text{ của } AG \quad (3)$$

mà tứ giác $ABGE$ là hình vuông (chứng minh trên)

$$\Rightarrow BE \text{ cũng đi qua trung điểm } J \text{ của } AG \quad (4)$$

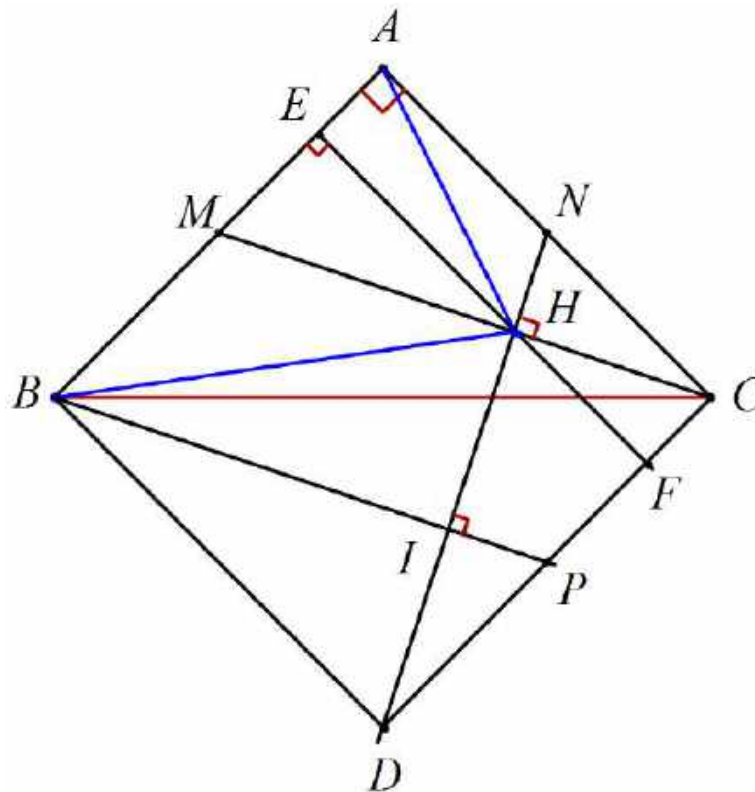
Từ (3) và (4) $\Rightarrow AG, BF, HE$ đồng quy tại J

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Kẻ $NH \perp CM$ tại

H . Kẻ $HE \perp AB$ tại E . Chứng minh rằng $\triangle ABH$ cân và HM là tia phân giác của $\widehat{BHE}$.

Lời giải



+ Vẽ hình vuông $ABCD$

+ Xét $\triangle ACM$ và $\triangle CDN$ có:

$AC = CD$ (cạnh hình vuông)

$\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$

$AM = CN$ (nửa cạnh hình vuông)

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle CDN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{CDN}$ (hai góc tương ứng)

mà $\widehat{MCD} + \widehat{CDN} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MCD} + \widehat{CDN} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp ND$

mặt khác $NH \perp CM$ (gt)

$\Rightarrow N, H, D$ thẳng hàng

+ Gọi P là trung điểm của DC

mà M là trung điểm của AB ; $ABCD$ là hình vuông (gt)

$\Rightarrow BM \parallel CP$; $BM = CP \Rightarrow BMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow MC \parallel BP$

mà $MC \perp DH$ do $MC \perp NH$

$\Rightarrow BP \perp DH$ (1)

+ Gọi I là giao điểm của BP và $DH \Rightarrow IP \parallel HC$

+ $\triangle DHC$ có P là trung điểm của DC

$IP \parallel HC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của HD (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BP$ là trung trực của $HD \Rightarrow BH = BD$

mà $BD = AB$ ($ABDC$ là hình vuông)

$\Rightarrow BH = AB \Rightarrow \triangle ABH$ cân tại B (đpcm)

+ Gọi F là giao điểm của HE và DC

Ta có $EF \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{FHD} = \widehat{HDB}$ (so le trong)

mà $BH = BD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle BHD$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{BDH}$ (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{FHD} \Rightarrow HD$ là phân giác góc ngoài của $\triangle HBE$

Mặt khác $HM \perp HD$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow HM$ là phân giác trong của $\triangle HBE \Rightarrow HM$ là phân giác của $\widehat{BHE}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng một màu.

Lời giải

Vì đa giác đều có 2019 đỉnh được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ nên sẽ có 2 đỉnh liên tiếp cùng màu (do 2019 lẻ).

Không mất tính tổng quát, gọi 2 đỉnh đó là A và B có cùng màu xanh.

Gọi M là đỉnh nằm trên đường trung trực của $AB \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M .

⊕ Nếu M có màu xanh $\Rightarrow \triangle MAB$ cân có 3 đỉnh cùng màu xanh

⊕ Nếu M có màu đỏ. Xét 2 đỉnh kề với A và B là C và $D \Rightarrow \triangle MCD$ cân tại M

- Nếu C và D có màu đỏ $\Rightarrow \triangle MCD$ cân có 3 đỉnh cùng màu đỏ

- Nếu C và D có màu xanh $\Rightarrow \triangle ABD$ hoặc $\triangle ABC$ cân có 3 đỉnh cùng màu xanh

Vậy luôn tồn tại một tam giác cân có 3 đỉnh cùng màu.

♾ HẾT ♾

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

VIỆT YÊN

NĂM HỌC 2018 – 2019

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN 8

Đề thi có 01 trang

Ngày thi: 01/03/2019

Thời gian làm bài 120 phút

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{x+2}{x^2+2x+1} \right) \cdot \frac{(1-x^2)^2}{2}$

- a) Rút gọn biểu thức M .
b) Tìm giá trị lớn nhất của M .

2. Cho $a+b+c=2019$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho hai số hữu tỷ a, b thỏa mãn: $a^3b+2a+ab^3+2b+2a^2b^2+1=0$. Chứng minh rằng: $1-ab$ là bình phương của một số hữu tỷ.
2. Tìm số nguyên x, y biết: $y^2+2(x^2+1)=2y(x+y)^2$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{(2018-x)^2+(2018-x)(x-2019)+(x-2019)^2}{(2018-x)^2-(2018-x)(x-2019)+(x-2019)^2} = \frac{19}{49}$

2. Cho hai số $a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $(a^5b-ab^5):30$

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông cân ở A . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ. Từ M kẻ ME vuông góc với AB ($E \in AB$). MF vuông góc với AC ($F \in AC$).
a. Chứng minh rằng: $FC.BA+EB.CA=AB^2$ và chu vi tứ giác $MEAF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .
b. Chứng tỏ đường thẳng đi qua M vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định.
2. Cho tam giác ABC . Gọi P là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC . Đường thẳng qua P và vuông góc với CP cắt cạnh AC và CB theo thứ tự tại điểm M và N . Chứng minh rằng $\frac{AP^2}{AB.AC} + \frac{BP^2}{BA.BC} + \frac{CP^2}{CB.CA} = 1$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $y^2+yz+z^2=1010-\frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+y+z$.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN

Câu 1

$$1a. M = \left(\frac{x-2}{x^2-1} - \frac{x+2}{x^2+2x+1} \right) \cdot \frac{(1-x^2)^2}{2} \quad \text{ĐKXĐ } x \neq \pm 1$$

$$M = \frac{(x-2)(x+1) - (x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \cdot \frac{(1-x)^2 \cdot (1+x)^2}{2}$$

$$M = \frac{x^2 - x - 2 - x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{2}$$

$$M = \frac{-2x}{(x-1)(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{2}$$

$$M = -x(x-1) = -x^2 + x$$

Với $x \neq \pm 1$ thì $M = -x^2 + x$

$$1b. M = -x^2 + x = -(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = -\left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

$$\text{Vậy } M_{\max} = \frac{1}{4} \text{ khi } x = \frac{1}{2}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c) \left[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab \right] \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &\Rightarrow P = \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ &\Rightarrow P = a + b + c \\ &\Rightarrow P = 2019 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2019$

Câu 2.

1. Ta có

$$\begin{aligned}
& a^3b + 2a + ab^3 + 2b + 2a^2b^2 + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow (a^3b + 2a^2b^2 + ab^3) + (2a + 2b) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow ab(a^2 + 2ab + b^2) + 2(a + b) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 + 2ab + b^2) + 2ab(a + b) + ab = 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 + 2ab + b^2) + 2ab(a + b) + 1 = 1 - ab \\
& \Leftrightarrow [ab(a + b) + 1]^2 = 1 - ab \\
& \Rightarrow 1 - ab \text{ là bình phương của một số tự nhiên (Đpcm)}
\end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
& y^2 + 2(x^2 + 1) = 2y(x + 1) \\
& \Leftrightarrow y^2 + 2x^2 + 2 - 2xy - 2y = 0 \\
& \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + y^2 - 4y + 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow (2x - y)^2 + (y - 2)^2 = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } (2x - y)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)^2 = 0 \\ (y - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 2)$

Câu 3.

$$1. \text{ Đặt } a = 2018 - x \Rightarrow x - 2019 = -a - 1$$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2 + a(-a - 1) + (-a - 1)^2}{a^2 - a(-a - 1) + (-a - 1)^2} = \frac{19}{49} \\
& \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49} \\
& \Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \\
& \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0 \\
& \Leftrightarrow 4a^2 + 4a - 15 = 0 \\
& \Leftrightarrow 4a^2 + 4a + 1 - 16 = 0 \\
& \Leftrightarrow (2a + 1)^2 - 4^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (2a + 5)(2a - 3) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5 = 0 \\ 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$*a = \frac{-5}{2} \Rightarrow 2018 - x = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x = 2020\frac{1}{2}$$

$$*a = \frac{3}{2} \Rightarrow 2018 - x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 2016\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x \in \left\{2020\frac{1}{2}; 2016\frac{1}{2}\right\}$

2. Ta có $A = (a^5b - ab^5) = ab(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

+ Nếu a, b cùng lẻ thì $a - b; a + b$ chẵn nên $A : 2$

+ Nếu a hoặc b chẵn thì $A : 2$

Suy ra $A : 2$ với $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (1)

+ Nếu $a : 3$ hoặc $b : 3 \Rightarrow A : 3$

+ Nếu a và b không chia hết cho 3 thì $(a - b) : 3$ hoặc $(a + b) : 3 \Rightarrow A : 3$

Suy ra $A : 3$ với $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (2)

+ Nếu $a : 5$ hoặc $b : 5 \Rightarrow A : 5$

+ Nếu a, b chia cho 5 có cùng số dư thì $(a - b) : 5 \Rightarrow A : 5$

+ Nếu a, b chia cho 5 khác số dư thì $(a + b) : 5$ hoặc $(a^2 + b^2) : 5 \Rightarrow A : 5$

Suy ra $A : 5$ với $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (3)

Do 2; 3; 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên từ (1); (2) và (3) suy ra $A : (2.3.5) \Rightarrow A : 30$ (Đpcm)

Câu 4

1.

a) $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ và $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle BEM$ và $\triangle CFM$ lần lượt vuông cân tại E và F

Xét tứ giác $AEMF$ có $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$

$\Rightarrow AEMF$ là hình chữ nhật

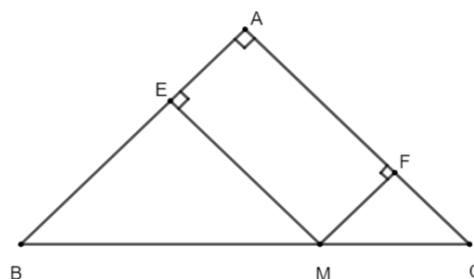
$\Rightarrow ME = AF = BE$

$\Rightarrow FC \cdot AB + EB \cdot CA = FC \cdot AB + AF \cdot AB$

$$= AB \cdot (FC + AF) = AB \cdot AC = AB \cdot AB = AB^2 \quad (\text{Đpcm})$$

Chu vi tứ giác $AEMF$ là $(ME + MF) \cdot 2 = (BE + AE) \cdot 2 = 2 \cdot AB$ không đổi

Vậy chu vi tứ giác $AEMF$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M



b) Dựng hình vuông $ABDC \Rightarrow D$ là cố định

Gọi K là giao điểm của MF và BD

G là giao điểm của ME và DC

$\Rightarrow KMGD$ là hình chữ nhật và các tứ giác

$BEMK; CFMG$ là các hình vuông

Xét $\triangle GDM$ và $\triangle MEF$ có

$$\widehat{MGD} = \widehat{FME} = 90^\circ$$

$$MG = MF$$

$$DG = ME$$

$$\Rightarrow \triangle GDM = \triangle MEF(c.g.c) \Rightarrow \widehat{GMD} = \widehat{MFE}$$

Gọi H là giao điểm của MD và $EF \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{GMD}$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{MFE}$$

$$\Rightarrow \triangle HME \sim \triangle MFE(g.g) \Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{EMF}$$

$$\text{Mà } \widehat{EMF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EHM} = 90^\circ \Rightarrow MH \perp EF$$

Suy ra đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn đi qua điểm D cố định

2.

$$\text{Ta có } \widehat{APC} = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\text{Mà } \widehat{APC} = \widehat{APM} + \widehat{MPC} = \widehat{APM} + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{APM} = \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{PBA}$$

Xét $\triangle MAP$ và $\triangle PAB$ có

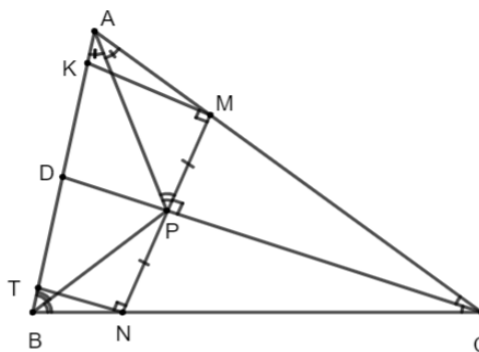
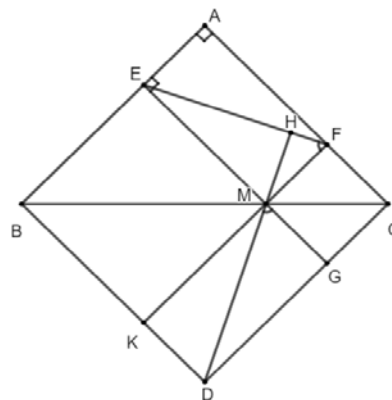
$$\widehat{APM} = \widehat{ABP}(cmt)$$

$$\widehat{MAP} = \widehat{PAB}(gt)$$

$$\Rightarrow \triangle MAP \sim \triangle PAB(g.g) \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AB}{AP} \Rightarrow AP^2 = AM \cdot AB$$

$$\Rightarrow \frac{AP^2}{AB \cdot AC} = \frac{AM \cdot AB}{AB \cdot AC} = \frac{AM}{AC}$$

Kẻ $MK \perp MN (K \in AB); NT \perp MN (T \in AB)$



$$MK // DC \text{ (cùng vuông góc với } MN) \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{KM}{DC} \text{ (hệ quả định lý ta-lét)} \Rightarrow \frac{AP^2}{AB.AC} = \frac{KM}{DC} (= \frac{AM}{AC})$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \frac{BP^2}{AB.BC} = \frac{NT}{DC}$$

$\triangle CMN$ Có CP vừa là đường cao vừa là phân giác nên CP đồng thời là trung tuyến do đó $PM = PN$

Tứ giác $MKTN$ là hình thang ($MK // TN$) có DP là đường trung bình nên $KM + NT = 2DP$

$$\Rightarrow \frac{AP^2}{AB.AC} + \frac{BP^2}{AB.BC} = \frac{KM + NT}{DC} = \frac{2DP}{DC} = \frac{2S_{\triangle APB}}{S_{ABC}} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \frac{BP^2}{AB.BC} + \frac{CP^2}{AC.BC} = \frac{2S_{\triangle APC}}{S_{ABC}} \quad (2)$$

$$\frac{CP^2}{AC.BC} + \frac{AP^2}{AB.AC} = \frac{2S_{\triangle BPC}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế của (1); (2) và (3) ta được } 2 \cdot \left(\frac{AP^2}{AB.AC} + \frac{BP^2}{BA.BC} + \frac{CP^2}{CB.CA} \right) = 2 \cdot \left(\frac{S_{\triangle APB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{\triangle APC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{ABC}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{AP^2}{AB.AC} + \frac{BP^2}{BA.BC} + \frac{CP^2}{CB.CA} = 1 \quad (\text{Đpcm})$$

Câu 5.

$$\text{Ta có } y^2 + yz + z^2 = 1010 - \frac{3x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 2020 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 2020 - x^2 + 2xy - y^2 - z^2 + 2xz - x^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 2020 - (x - y)^2 - (x - z)^2 \leq 2020$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2020} \leq x + y + z \leq \sqrt{2020}$$

$$\Rightarrow x + y + z \text{ nhỏ nhất bằng } -\sqrt{2020} \text{ khi } x = y = z = \frac{-\sqrt{2020}}{3}$$

$$x + y + z \text{ lớn nhất bằng } \sqrt{2020} \text{ khi } x = y = z = \frac{\sqrt{2020}}{3}$$

UBND QUẬN LIÊN CHIỀU
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi : TOÁN
Thời gian : 120 phút

Bài 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{(x-1)^2}{x-3} \cdot \left(1 - \frac{x^2-6x+9}{x-1}\right) - \frac{(x-3)^2+6x-14}{x-3}$

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A được xác định
- Khi A được xác định, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Bài 2 (2,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - \frac{3}{2}x = \left(\frac{3}{4} - x\right)x + \frac{x}{2} - \frac{15}{16}$

b) $\frac{x}{3-x} + \frac{18x-5x^3}{27-x^3} + 2 = \frac{4x^2}{x^2+3x+9}$

Bài 3 (2,0 điểm)

- Cho $a + b + c = 0$ và biểu thức $M = a^5(b^2 + c^2) + b^5(c^2 + a^2) + c^5(a^2 + b^2)$
- Chứng minh rằng có một số tự nhiên N gồm toàn chữ số 9 sao cho số N đó chia hết cho 2019.

Bài 4 (2,5 điểm)

Cho hình vuông ABCD có $AB = a$ và điểm M là trung điểm của cạnh CD. Tia phân giác của góc ABM cắt cạnh AD ở N. gọi L là giao điểm của AM và BN

- Tính theo a độ dài đoạn thẳng AN
- Gọi A' và N' lần lượt là các điểm đối xứng của A và N qua điểm L. Tính theo a diện tích tứ giác A'MBN'.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng qua O và song song với đáy của hình thang cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự tại E và F.

Chứng minh rằng : $\frac{2}{FE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

a) Điều kiện : $x \neq 1; x \neq 3$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \frac{(x-1)^2}{x-3} \cdot \left(\frac{-x^2+7x-10}{x-1} \right) - \frac{x^2-5}{x-3} \\ &= \frac{-x^3+7x^2-17x+15}{x-3} = \frac{-(x-3)(x^2-4x+5)}{x-3} \\ &= -(x^2-4x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= -(x^2-4x+5) \\ &= -1-(x-2)^2 \leq -1 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (TMđk)

Vậy A lớn nhất bằng -1 khi $x=2$

Bài 2 a)

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{3}{2}x &= \frac{3}{4}x - x^2 + \frac{x}{2} - \frac{15}{16} \\ \Leftrightarrow 32x^2 - 44x + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (8x-5)(4x-3) &= 0 \\ \text{Vậy } x &= \frac{5}{8}; x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b)

$$\frac{x}{3-x} + \frac{18x-5x^3}{27-x^3} + 2 = \frac{4x^2}{x^2+3x+9} \quad (x \neq 3)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2x^3 + 9x^2 - 27x - 54 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x(x-3) + 2(x-3)(x^2+3x+9) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x+6)(2x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Tập nghiệm của pt là $S = \left\{ -6; \frac{-3}{2} \right\}$

Bài 3

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= a^5(b^2+c^2) + b^5(c^2+a^2) + c^5(a^2+b^2) \\ &= a^5b^2 + a^5c^2 + b^5c^2 + b^5a^2 + c^5a^2 + c^5b^2 \\ &= a^2b^2(a^3+b^3) + b^2c^2(b^3+c^3) + a^2c^2(a^3+c^3) \\ \text{Ta có } a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= a^2b^2(3abc - c^3) + b^2c^2(3abc - a^3) + a^2c^2(3abc - b^3) \\ &= 3abc(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^2b^2c^2(a+b+c) \\ &= 3abc(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

b) Đặt $a_1 = 9; a_2 = 99; a_3 = 999; \dots; a_{2019} = 99 \dots 999$ (2019 chữ số 9)

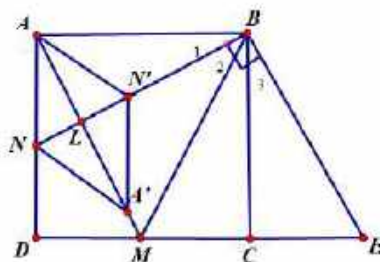
- Nếu trong 2019 số trên có một số chia hết cho 9 thì bài toán được chứng minh
- Nếu không có số nào chia hết cho 9 thì khi đó tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2019
- Giả sử a_i và a_j ($a_i > a_j$), $1 \leq i < j \leq 2019$ khi đó $a_i - a_j : 2019$

$$\text{Hay } \underbrace{999\dots 9999}_{j-\text{ichuso9}}.10^{j-i} : 2019$$

Mà 10^{j-i} không chia hết cho 2019

Vậy $\underbrace{999.....9999}_{j-ichuso9}:2019$

Bài 4



a) Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = AN$

$$\Delta ABN = \Delta CBE \Rightarrow \text{góc } B_1 = \text{góc } B_3$$

$$\Rightarrow \text{CBN} + \text{B}_3 = 90^\circ$$

+) góc E = $90^0 - B_3$, góc EBM = $90^0 - B_2$, mà góc B_2 = góc B_3 nên góc E = góc EBM

⇒ Tam giác MBE cân tại M $\Rightarrow BM = ME$

+) $BM = ME = MC + CE = MC + AN \Rightarrow AN = BM - MC.$

$$BM = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2}; MC = \frac{a}{2}$$

$$\text{Do đó } AN = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot a}{2}$$

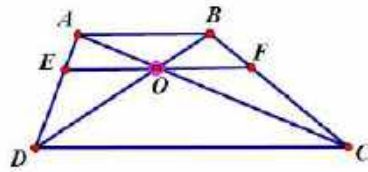
$$\text{b) } S_{A'N'BM} = S_{ABM} - (S_{N'A'L} + S_{ALB})$$

$$= S_{ABM} - (S_{N'AL} + S_{ALB}) = S_{ABM} - S_{ANB}$$

$$+) \text{ Ta có } S_{ABM} = \frac{BC \cdot AB}{2} = \frac{a^2}{2}; S_{ABN} = \frac{AN \cdot AB}{2} = \frac{a \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A'N'BM} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2(\sqrt{5}-1)}{2} = \left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)a^2$$

Bài 5



$$+) \frac{OE}{AB} = \frac{DE}{AD} \quad (OE \parallel AB)$$

$$+) \frac{OE}{CD} = \frac{AE}{AD} \quad (OE \parallel CD)$$

$$\Rightarrow OE \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = 1 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta được : } OF \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) (OE + OF) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} \right) \cdot EF = 2 \Rightarrow đpcm$$

**PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ BẮC GIANG
ĐỀ SỐ 29**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Thời gian làm bài: 150 phút**

Bài 1: (5 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x - 1}$ với $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để biểu thức A có giá trị nguyên.

2. Cho ba số thực a, b, c khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{(a-1)^2}{(b-1)(c-1)} + \frac{(b-1)^2}{(c-1)(a-1)} + \frac{(c-1)^2}{(a-1)(b-1)}$.

Bài 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $(x^2 + 5x - 2)^2 = 4(x^2 + 2)(5x - 4)$.

2. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{5}{19}$.

Bài 3: (4 điểm)

1. Tìm đa thức: $P(x)$, biết khi chia $P(x)$ cho $x+1$ dư 1, chia cho $x-3$ dư 9 và khi chia cho $x^2 - 2x - 3$ thì được thương là $x^2 - x + 1$ và còn dư.

2. Tìm các số tự nhiên n sao cho $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

Bài 4: (6 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại C ($AB < AC$). Kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$).

1. Chứng minh $AE.AC = \frac{AB^2}{2}$.

2. Kẻ $DM \perp CF$ tại M, $DK \perp AC$ tại K. Chứng minh $MK \parallel FE$.

3. Tính giá trị của tổng $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

4. Gọi N là giao điểm của EF với tia CB. Chứng minh $CE.CN = FE.FN + CF^2$.

Bài 5: (1 điểm)

Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2012ab + 1}{ab} + 4ab$.

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8**THÀNH PHỐ BẮC GIANG****Năm học: 2018-2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (5 điểm)**

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x-1}$ với $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để biểu thức A có giá trị nguyên.

2. Cho ba số thực a, b, c khác 1 và thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{(a-1)^2}{(b-1)(c-1)} + \frac{(b-1)^2}{(c-1)(a-1)} + \frac{(c-1)^2}{(a-1)(b-1)}$.

Lời giải**1**

a. Với $x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{x^2 + 3}{(x-1)(x^2 + 3)} \right] : \frac{1}{x-1} \\ &= \left[\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x-1} \right] : \frac{1}{x-1} = \frac{2x^2 + 2 + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} : \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x^2}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \cdot (x-1) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ với $x \neq 1$

b.

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x \\ x^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } \frac{4}{3} - A = \frac{4}{3} - \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{(x+2)^2}{3(x^2 + x + 1)} \geq 0 \Rightarrow A \leq \frac{4}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $0 \leq A \leq \frac{4}{3}$ mà A có giá trị nguyên nên $A \in \{0; 1\}$

+/ Xét $A = 0$ tìm được $x = 0$ (thỏa mãn ĐK)

$$+/ \text{ Xét } A = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy khi $x \in \{0; -1\}$ thì biểu thức A có giá trị nguyên.

2.

$$B = \frac{(a-1)^2}{(b-1)(c-1)} + \frac{(b-1)^2}{(c-1)(a-1)} + \frac{(c-1)^2}{(a-1)(b-1)}$$

Từ GT ta có: $a+b+c=3 \Leftrightarrow (a-1)+(b-1)+(c-1)=0$

Đặt $x=a-1; y=b-1; z=c-1$ ta có: $x+y+z=0$ và $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

$$\text{Khi đó } B = \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$$

$$\text{Vì } x+y+z=0 \Leftrightarrow x+y=-z \Leftrightarrow x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3$$

$$x^3+y^3+3xy(-z)+z^3=0 \text{ vì } (x+y=-z) \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$

$$\text{Thay } x^3+y^3+z^3=3xyz \text{ vào biểu thức } B \text{ ta có: } B = \frac{3xyz}{xyz} = 3$$

Vậy khi ba số thực a, b, c khác 1 và thỏa mãn $a+b+c=3$ thì $B=3$

Bài 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $(x^2 + 5x - 2)^2 = 4(x^2 + 2)(5x - 4)$.

2. Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{5}{19}$.

Lời giải

1.

$$(x^2 + 5x - 2)^2 = 4(x^2 + 2)(5x - 4) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 + 2 = a \\ 5x - 4 = b \end{cases} \Rightarrow a+b = x^2 + 5x - 2 \text{ khi đó PT (1) trở thành:}$$

$$(a+b)^2 = 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\text{Với } a-b=0 \text{ thì } x^2 + 2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{2; 3\}$

2.

$$\text{Ta có } \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \frac{5}{19} \Leftrightarrow 19(x+y) = 5(x^2+xy+y^2) \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) ta có } 19(x+y):5 \text{ mà } (19;5)=1 \Rightarrow x+y:5 \Rightarrow x+y=5m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Thay vào (1) tính được } x^2 + xy + y^2 = 19m$$

$$x+y=5m \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 25m^2 \text{ ta có}$$

$$xy = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + xy + y^2) = 25m^2 - 19m$$

$$\text{Xét: } (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 4(25m^2 - 19m) \geq 0 \Leftrightarrow 75m^2 - 76m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{76}{75} \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$$

$$+/- \text{ Nếu : } m = 0 \text{ ta có } \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$+/- \text{ Nếu: } m = 1 \text{ ta có } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \text{ tìm được } (x; y) = (2; 3); (3; 2)$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (0; 0); (2; 3); (3; 2)$$

Bài 3: (4 điểm)

1. Tìm đa thức: $P(x)$, biết khi chia $P(x)$ cho $x+1$ dư 1, chia cho $x-3$ dư 9 và khi chia cho $x^2 - 2x - 3$ thì được thương là $x^2 - x + 1$ và còn dư.
2. Tìm các số tự nhiên n sao cho $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $2n+9$ là số nguyên tố.

Lời giải

1. Vì $P(x)$ cho $x+1$ dư 1, chia cho $x-3$ dư 9 nên theo định lí Be'zout ta có:

$$P(-1) = 1 \text{ và } P(3) = 9$$

Vì đa thức chia $x^2 - 2x - 3$ bậc hai nên đa thức dư có dạng $ax + b$ khi đó ta có:

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x + 1) + ax + b$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x-3)(x^2 - x + 1) + ax + b$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} P(-1) = 1 \\ P(3) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \text{ tìm được } a = 2; b = 3$$

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - x + 1) + 2x + 3 = x^4 - 3x^3 + 3x$$

$$\text{Vậy } P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x$$

2. Ta có: $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên ta có:

$$2n+1 = a^2 \text{ (với } a \in \mathbb{N} \text{) (1) } \quad 3n+1 = b^2 \text{ (với } b \in \mathbb{N} \text{) (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } 3a^2 - 2b^2 = 1 \text{ (3)}$$

$$\text{Ta có: } 2n+9 = (2n+1) + 8 = a^2 + 8(3a^2 - 2b^2) = 25a^2 - 16b^2 = (5a - 4b)(5a + 4b) \text{ (4)}$$

Do $2n+9$ là số nguyên tố, mà $5a - 4b \leq 5a + 4b$ nên từ (4) ta có

$$5a - 4b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4b+1}{5} \text{ thay } a = \frac{4b+1}{5} \text{ vào (3)}$$

$$3\left(\frac{4b+1}{5}\right)^2 - 2b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 - 12b + 11 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b-11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = 11 \end{cases}$$

$$+/- \text{ Nếu } b = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ khi đó } n = 0 \text{ và } 2n+9 = 9 \text{ (loại)}$$

$$+/- \text{ Nếu } b = 11 \Rightarrow a = 9 \text{ khi đó } n = 40 \text{ và } 2n+9 = 89 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $n = 40$ là giá trị cần tìm.

Bài 4: (6 điểm) Cho tam giác ABC cân tại C ($AB < AC$). Kẻ ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$).

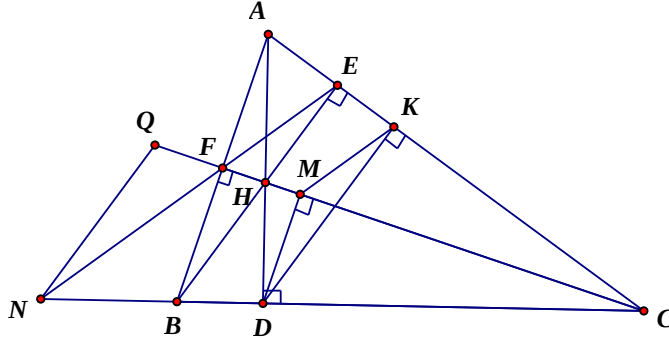
$$1. \text{ Chứng minh } AE.AC = \frac{AB^2}{2}.$$

2. Kẻ $DM \perp CF$ tại M , $DK \perp AC$ tại K . Chứng minh $MK \parallel FE$

3. Tính giá trị của tổng $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

4. Gọi N là giao điểm của EF với tia CB. Chứng minh $CE.CN = FE.FN + CF^2$.

Lời giải



1. Xét $\triangle AEB \square \triangle AFC$ có:

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ (c / mt) \\ \widehat{EAB} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEB \square \triangle AFC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{định nghĩa}) \Rightarrow AE.AC = AF.AB \quad (\text{tính chất}) \quad (1)$$

$\triangle ABC$ cân tại C có CF là đường cao

$$\Rightarrow CF \text{ là đường trung tuyến (t/chất)} \Rightarrow AF = FB = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } AE.AC = \frac{AB^2}{2}$$

2. Chứng minh được $MD // BF$ (cùng vuông góc với CF)

$$\text{Xét } \triangle CFB \text{ có: } MD // BF \text{ (c/m trên)} \Rightarrow \frac{CM}{CF} = \frac{CD}{CB} \quad (\text{định lí Ta-let}) \quad (3)$$

Chứng minh được $DK // BE$ (cùng vuông góc với AC)

$$\text{Xét } \triangle CFB \text{ có: } DK // BE \text{ (c/m trên)} \Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{CK}{CE} \quad (\text{định lí Ta-let}) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{CM}{CF} = \frac{CK}{CE}$$

$$\text{Xét } \triangle CFE \text{ có: } \frac{CM}{CF} = \frac{CK}{CE} \text{ (c/m trên)} \Rightarrow MK // FE \quad (\text{định lí Ta-let đảo})$$

$$3. \text{ Chỉ ra được } \frac{HD}{AD} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}; \quad \frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tính được } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\left(1 - \frac{HD}{AD}\right) + \left(1 - \frac{HE}{BE}\right) + \left(1 - \frac{HF}{CF}\right) = 3 - 1 \Rightarrow \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$$

4. Trên tia đối của tia FC lấy điểm Q sao cho $\widehat{FNQ} = \widehat{FCE}$

Chứng minh được $\triangle CEF \square \triangle NQF(g.g) \Rightarrow EF.FN = FQ.CF$ (5)

Chỉ ra CF là đường phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{FCN} = \widehat{FCE}$

Chứng minh được $\triangle CNQ \square \triangle CFE(g.g) \Rightarrow CE.CN = CQ.CF$ (6)

Từ (5) và (6) ta có

$$CE.CN - FE.FN = CQ.CF - FQ.CF = CF(CQ - FQ) = CF.CF = CF^2$$

$$\Rightarrow CE.CN = FE.FN + CF^2$$

Bài 5: (1 điểm). Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{2012ab + 1}{ab} + 4ab$.

Lời giải

$$Q = \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \right) + \left(4ab + \frac{1}{4ab} \right) + \frac{1}{4ab} + 2012.$$

Chứng minh được bất đẳng thức: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (*); $(x+y)^2 \geq 4xy$ (**)

Với $x > 0; y > 0$, dấu “=” xảy ra khi $x = y$

Với a, b là hai số thực dương, $0 < a + b \leq 1$

Áp dụng bất đẳng thức (*) và (**) ta có:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a+b)^2} \geq \frac{4}{1} = 4 \quad (1)$$

$$\left(4ab + \frac{1}{4ab} \right)^2 \geq 4.4ab. \frac{1}{4ab} = 4 \Rightarrow 4ab + \frac{1}{4ab} \geq 2 \quad (2)$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \geq \frac{4}{1^2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{4ab} \geq 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2) và (3)} \Rightarrow Q \geq 4 + 2 + 1 + 2012 = 2019$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2019 khi $a = b = 1$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHI LỘC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Môn: TOÁN 8

(ĐỀ CHÍNH THỨC)

Thời gian làm bài: 120 phút – không kể thời gian phát đề

Bài 1: (6,0 điểm) Cho $P = \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{9x^2}{x^2-9} - \frac{3-x}{3+x} \right) : \frac{3x(3x+4)}{3x^2-x^3}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x thỏa mãn: $\frac{P}{x} - 3P + 19 = 5x$.

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P nguyên.

Bài 2: (3,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 7xy + 12y^2 - 20y - 5x$.

b) Cho $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$ và $abc \neq 0$. Tính $P = \frac{(a^3+b^3)(b^5+c^5)(a^7+c^7)}{a^2+b^2+c^2}$.

Bài 3: (3,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $(x^2+2)y - x^3 - 3x + 5 = 0$.

b) Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 2019)^2 + 4(x^2 - 5x - 2018)^2 = 4(2x^2 + x - 2019)(x^2 - 5x - 2018).$$

Bài 4: (1,0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(\frac{x-3y}{x+3} \right)^2 + |9-x^2|$.

Bài 5: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm M sao cho $HM = AH$, đường thẳng vuông góc với BC tại M cắt AC tại N , gọi I là trung điểm của BN .

a) Tính $\widehat{AHI}$.

b) Chứng minh tam giác ACM đồng dạng với tam giác BCN .

c) Biết $AB = 1, AC = x$ ($x > 1$). Tính diện tích $\triangle BHI$ theo x , chứng tỏ rằng diện tích này lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{2}-1}{8}$.

Bài 6: (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A , có $\widehat{A} = 100^\circ$, tia phân giác trong góc B cắt AC tại D . Chứng minh rằng $BC = BD + AD$.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI**HUYỆNNGHI LỘC****Năm học: 2020-2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

Bài 1: (6,0 điểm) Cho $P = \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{9x^2}{x^2-9} - \frac{3-x}{3+x} \right) : \frac{3x(3x+4)}{3x^2-x^3}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x thỏa mãn: $\frac{P}{x} - 3P + 19 = 5x$.

c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P nguyên.

Lời giải

a)

$$\text{Biểu thức } P \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \neq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \\ 3+x \neq 0 \\ 3x^2-x^3 \neq 0 \\ 3x(3x+4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Với điều kiện (*) ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{9x^2}{x^2-9} - \frac{3-x}{3+x} \right) : \frac{3x(3x+4)}{3x^2-x^3} \\ &= \left(\frac{3+x}{3-x} + \frac{9x^2}{9-x^2} - \frac{3-x}{3+x} \right) \cdot \frac{x^2(3-x)}{3x(3x+4)} \\ &= \left[\frac{(3+x)^2}{(3-x)(3+x)} + \frac{9x^2}{(3-x)(3+x)} - \frac{(3-x)^2}{(3-x)(3+x)} \right] \cdot \frac{x(3-x)}{3(3x+4)} \\ &= \frac{9+6x+x^2+9x^2-9+6x-x^2}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x(3-x)}{3(3x+4)} \\ &= \frac{3x(3x+4)}{3+x} \cdot \frac{x}{3(3x+4)} \\ &= \frac{x^2}{x+3} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x^2}{x+3}$ với x thỏa mãn ĐKXD (*).

b)

Với $P = \frac{x^2}{x+3}$ với x thỏa mãn ĐKXĐ (*) (trong câu a) ta có:

$$\frac{P}{x} - 3P + 19 = 5x \text{ trở thành:}$$

$$\frac{\frac{x^2}{x+3}}{x} - 3 \cdot \frac{x^2}{x+3} + 19 = 5x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+3} - \frac{3x^2}{x+3} + \frac{(19-5x)(x+3)}{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 3x^2 - 19x + 57 - 5x^2 - 15x}{x+3} = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 5x - 57 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{8}x - \frac{57}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{16}\right)^2 = \frac{1849}{256}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{1849}}{16} \\ x = \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{1849}}{16} \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5 + \sqrt{1849}}{16}; \frac{5 - \sqrt{1849}}{16} \right\}$$

c) Với ĐKXĐ (*) thì $P = \frac{x^2}{x+3}$ (theo câu a).

$$\text{Để } P \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{x^2}{x+3} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Z} \text{ và } x+3 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x^2 : (x+3)$$

$$\text{Lại có } x^2 = x(x+3) - 3(x+3) + 9$$

$$\Rightarrow 9 : (x+3)$$

$$\Rightarrow x+3 \in U(9)$$

$$\Rightarrow x+3 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$$

Ta có bảng sau:

$x+3$	-9	-3	-1	1	3	9
x	-12	-6	-4	-2	0	6
P	-16	4	-16	4	0	4
Kết luận	Nhận	Nhận	Nhận	Nhận	Loại	Nhận

Vậy $x \in \{-12; -6; -4; -2; 6\}$ thì $P \in \mathbb{Z}$.

Bài 2: (3,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + 7xy + 12y^2 - 20y - 5x$.

b) Cho $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$ và $abc \neq 0$. Tính $P = \frac{(a^3+b^3)(b^5+c^5)(a^7+c^7)}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

a) Ta có: $x^2 + 7xy + 12y^2 - 20y - 5x$

$$= (x^2 + 4xy) + (3xy + 12y^2) - 5(x + 4y)$$

$$= x(x + 4y) + 3y(x + 4y) - 5(x + 4y)$$

$$= (x + 4y)(x + 3y - 5)$$

$$\text{Vậy } x^2 + 7xy + 12y^2 - 20y - 5x = (x + 4y)(x + 3y - 5)$$

b) Ta có: $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2b + 2abc + bc^2) + (ab^2 + b^2c) + (ac^2 + a^2c) = 0$$

$$\Leftrightarrow b(a+c)^2 + b^2(a+c) + ac(a+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(ab+bc+b^2+ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)[b(a+b)+c(b+a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(a+b)(b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{– Nếu } a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow a^3=-b^3 \Rightarrow a^3+b^3=0 \Rightarrow P=0$$

$$\text{– Nếu } b+c=0 \Rightarrow b=-c \Rightarrow b^5=-c^5 \Rightarrow b^5+c^5=0 \Rightarrow P=0$$

$$\text{– Nếu } a+c=0 \Rightarrow a=-c \Rightarrow a^7=-c^7 \Rightarrow a^7+c^7=0 \Rightarrow P=0$$

Vậy $P = 0$ với a, b, c thỏa mãn đề bài.

Bài 3:(3,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $(x^2 + 2)y - x^3 - 3x + 5 = 0$.

b)Giải phương trình:

$$(2x^2 + x - 2019)^2 + 4(x^2 - 5x - 2018)^2 = 4(2x^2 + x - 2019)(x^2 - 5x - 2018).$$

Lời giải

a)Ta có: $(x^2 + 2)y - x^3 - 3x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)y = x^3 + 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} \quad (\text{vì } x^2 + 2 \geq 2 > 0, \forall x \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow y = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2}$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x - 5) : (x^2 + 2) \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) : (x^2 + 2) \Leftrightarrow -27 : (x^2 + 2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \in U(-27) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 27\}$$

$$\text{Do } x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 9; 27\}$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(-1; -3); (5; 5)\}$$

$$\text{b)Đặt } \begin{cases} 2x^2 + x - 2019 = a \\ x^5 - 5x - 2018 = b \end{cases}.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^2 + 4b^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2019 = 2(x^2 - 5x - 2018)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2019 = 2x^2 - 10x - 4036$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2017$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2017}{11}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{-2017}{11}$

Bài 4:(1,0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(\frac{x-3y}{x+3} \right)^2 + |9-x^2|$.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} \left(\frac{x-3y}{x+3} \right)^2 \geq 0, \forall x \neq -3, y \in \mathbb{R} \\ |9-x^2| \geq 0, \forall x \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{x-3y}{x+3} \right)^2 + |9-x^2| \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq -3$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x-3y}{x+3} \right)^2 = 0 \\ |9-x^2| = 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

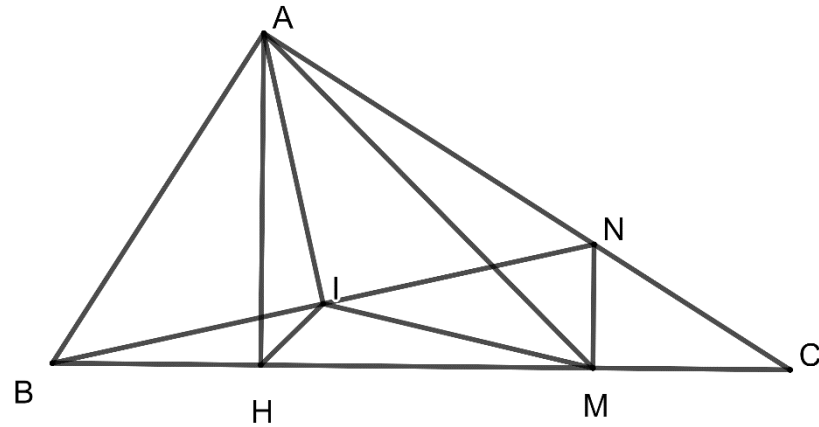
Vậy GTNN của biểu thức A bằng 0 khi $x = 3$ và $y = 1$.

Bài 5:(6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm M sao cho $HM = AH$, đường thẳng vuông góc với BC tại M cắt AC tại N , gọi I là trung điểm của BN .

a) Tính $\widehat{AHI}$.

b) Chứng minh tam giác ACM đồng dạng với tam giác BCN .

c) Biết $AB = 1, AC = x$ ($x > 1$). Tính diện tích $\triangle BHI$ theo x , chứng tỏ rằng diện tích này lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{2}-1}{8}$.

**Lời giải**

a)

Xét $\triangle ABN$ có: $\begin{cases} \widehat{BAN} = 90^\circ \\ AI \text{ là đường trung tuyến} \end{cases}$

$$\Rightarrow AI = \frac{BN}{2} \quad (1)$$

Xét $\triangle BMN$ vuông tại M và MI là đường trung tuyến $\Rightarrow MI = \frac{BN}{2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AI = MI$

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle MHI$, ta có:

$$\begin{cases} AI = IM \text{ (cmt)} \\ HI \text{ là cạnh chung} \\ AH = HM \text{ (gt)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AHI = \triangle MHI \text{ (ccc)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{MHI} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{AHI} + \widehat{IHM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AHI} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AHI} = 45^\circ$$

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle MNC$, có:

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{NMC} = 90^\circ \\ \widehat{C} : \text{chung} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNC (gg)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{MC}{NC}$$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle BCN$, có:

$$\begin{cases} \widehat{C}: \text{chung} \\ \frac{AC}{BC} = \frac{MC}{NC} (cmt) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ACM \sim \triangle BCN (cgc) \Rightarrow dpcm$$

c) Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$S_{ABN} = \frac{1}{2} AB \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{BNC} = S_{ABC} - S_{ABN} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$$

Lại có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot \frac{x}{2}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$AN = AB = 1; AC = x$$

$$\Rightarrow NC = AC - AN = x - 1$$

Dễ thấy $\triangle MCN \sim \triangle HCA$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{AH} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{MN}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+1} \cdot x} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Áp dụng định lý Pytago vào $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có:

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^4}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow HC = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow S_{NHC} = \frac{1}{2} NM \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x-1)}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow S_{BHN} = S_{BNC} - S_{HNC} = \frac{x-1}{2} - \frac{x^2(x-1)}{2(x^2+1)} = \frac{x-1}{2(x^2+1)}$$

$$\text{Lại có: } S_{BHI} = \frac{1}{2} \cdot S_{BHN} \Rightarrow S_{BHI} = \frac{x-1}{4(x^2+1)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{S_{BHI}} = \frac{4(x^2+1)}{x-1} = \frac{4(x^2-1+2)}{x-1} = 4 \left(x+1 + \frac{2}{x-1} \right) = 4 \left(x-1 + \frac{2}{x-1} + 2 \right)$$

Theo bất đẳng thức Cossi:

$$4 \left(x-1 + \frac{2}{x-1} + 2 \right) \geq 4 \left(2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{2}{x-1}} + 2 \right) = 4(2\sqrt{2} + 2) = 8(\sqrt{2} + 1)$$

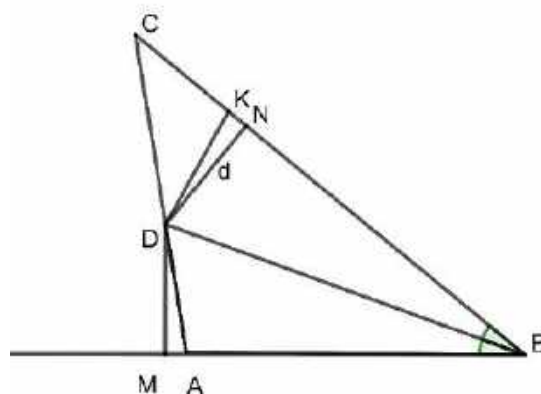
$$\Rightarrow \frac{1}{S_{BHI}} \geq 8(\sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow S_{BHI} \leq \frac{1}{8(\sqrt{2} + 1)}$$

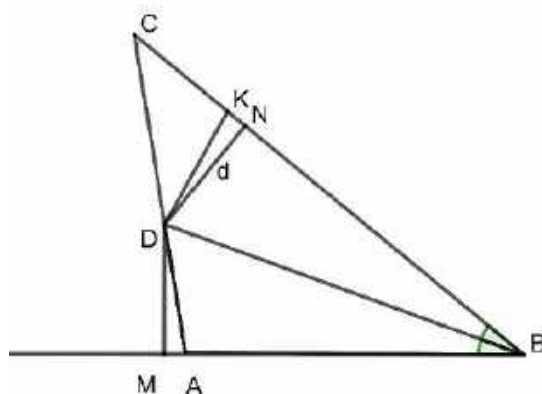
$$\Rightarrow S_{BHI} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{8}$$

Vậy S_{BHI} đạt GTLN bằng $\frac{\sqrt{2}-1}{8}$.

Bài 6: (1,0 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 100^\circ$, tia phân giác trong góc B cắt AC tại D . Chứng minh rằng $BC = BD + AD$.



Lời giải



Từ D kẻ: $\begin{cases} DM \perp AB, M \in AB \\ DN \perp BC, N \in BC \end{cases}$

Lấy $K \in BC$ sao cho $BD = BK$

Vì BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ và $DM \perp AB, DN \perp BC$

$$\Rightarrow DM = DN$$

Xét $\triangle ABC$ cân tại A , $\widehat{BAC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DAC} = 20^\circ$$

Xét $\triangle DKB$ cân tại B , $\widehat{DBK} = \widehat{DKB} = 80^\circ$

Mà $\widehat{CKD} + \widehat{DKB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{CKD} = 100^\circ$$

Lại có: $\widehat{KCD} = \widehat{BCA} = 40^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CDK} = 40^\circ$$

$\Rightarrow \triangle CKD$ cân tại K

$$\Rightarrow CK = DK$$

Mặt khác: $\widehat{DKN} = \widehat{DKB} = 80^\circ (*)$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAM} + \widehat{DAB} = 180^\circ (2 \text{ góc kề bù}) \\ \widehat{DAB} + \widehat{CAB} = 100^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DAM} = 80^\circ (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DKN} = 80^\circ$

$$\Rightarrow 90^\circ - \widehat{DAM} = 90^\circ - \widehat{DKN}$$

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{NDK}$$

Xét $\triangle DAM$ và $\triangle DKN$ có:

$$\begin{cases} \widehat{DMA} = \widehat{DNK} = 90^\circ \\ DM = DN \\ \widehat{MDA} = \widehat{NDK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle DAM = \triangle DKN \text{ (g.c.g.)}$$

$$\Rightarrow DA = DK \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Mà } DK = CK$$

$$\text{Nên } DA = CK$$

$$\text{Lại có: } BD = BK$$

$$\Rightarrow DA + BD = CK + BK$$

$$\Rightarrow DA + BD = BC \text{ (đpcm)}$$

===== **HẾT** =====

TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 120'

Bài 1: (3,0 điểm)

1. Chứng minh $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .
2. Phân tích đa thức $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$ thành nhân tử.

Bài 2: (3,0 điểm)

Cho biểu thức: $C = \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y \right) : \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$ với $x \neq \pm y$

1. Rút gọn biểu thức C ;
2. Khi cho $(x^2 - y^2).C = -8$, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$M = x^2(x+1) - y^2(y-1) - 3xy(x-y+1) + xy$$

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x \left(1 + \frac{16}{x^2 + 3} \right) = 8 - \frac{3}{x}$.
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 2xy + x + y + 2 = 0$

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Cho số thực x thay đổi thỏa mãn $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 - 3x + \frac{1}{2x} + 2$$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $3^n + 19$ là số chính phương.

Bài 5: (6,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy điểm M là trung điểm BC . Qua điểm D thuộc đoạn BM , vẽ đường thẳng song song với AM , đường thẳng này cắt hai đường thẳng AB, AC , lần lượt tại E và F . Qua A vẽ đường thẳng song song với BC và cắt EF tại K .

1. Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{ACB} + \widehat{MAC}$
2. Tính giá trị của $DE + DE - 2AM$
3. Chứng minh K là trung điểm của đoạn EF .

Bài 6: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M (M nằm giữa A và H). Tia BM cắt AC tại I , tia CM cắt AB tại K . Chứng minh HA là tia phân giác của $\widehat{KHI}$.

=====HẾT=====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLIMPIC MÔN TOÁN 8
TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU
Năm học: 2020 – 2021
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (3,0 điểm)

1. Chứng minh $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9 với mọi số nguyên n .
2. Phân tích đa thức $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$ thành nhân tử.

Lời giải chi tiết

1) Ta có:

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &= (3n^2 + 15n) + 9(n^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Có } 9(n^2 + 1) : 9, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\text{Và } 3n^3 + 15n = 3n^3 - 3n + 18n = 3(n-1)n(n+1) + 18n$$

Vì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (n-1)n(n+1) : 3, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3(n-1)n(n+1) : 9, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } 18n : 9, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3(n-1)n(n+1) + 18n : 9, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3n^3 + 15n : 9, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } (3n^3 + 15n) + 9(n^2 + 1) : 9, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{đpcm})$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có: } x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) &= x(y-z)(y+z) + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2 \\ &= x(y-z)(y+z) + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2 \\ &= x(y-z)(y+z) + yz(y-z) + x^2(y-z) = (y-z)(xy + xz - yz - x^2) \\ &= (y-z)[z(x-y) - x(x-y)] = (y-z)(z-x)(x-y) \end{aligned}$$

Bài 2: (3,0 điểm) Cho biểu thức: $C = \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y \right) : \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$ với $x \neq \pm y$

1. Rút gọn biểu thức C ;

2. Khi cho $(x^2 - y^2).C = -8$, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$M = x^2(x+1) - y^2(y-1) - 3xy(x-y+1) + xy$$

Lời giải chi tiết

1) Với $x \neq \pm y$, ta có:

$$C = \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y \right) : \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x} + \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{x(x+y) - 4xy + y(x+y)}{x+y} \right] : \left[\frac{x(x-y) - y(x+y) + 2xy}{(x-y)(x+y)} \right] \\
&= \frac{x^2 + xy - 4xy + xy + y^2}{x+y} : \frac{x^2 - xy - xy - y^2 + 2xy}{(x-y)(x+y)} \\
&= \frac{(x-y)^2}{x+y} : \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{x+y} \\
\text{Vậy } C &= \frac{(x-y)^2}{x+y} \text{ với } x \neq \pm y.
\end{aligned}$$

2) +) Theo câu 1) ta có: $C = \frac{(x-y)^2}{x+y}$ với $x \neq \pm y$

$$\text{Vì } (x^2 + y^2).C = -8$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y) \cdot \frac{(x-y)^2}{x+y} = -8$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3 = -8 \Leftrightarrow x-y = -2.$$

$$\begin{aligned}
&+) \text{ Ta có: } M = x^2(x+1) - y^2(y-1) - 3xy(x-y+1) + xy \\
&= x^3 + x^2 - y^3 + y^2 - 3x^2y + 3xy^2 - 3xy + xy \\
&= (x^2 - 2xy + y^2) + (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) \\
&= (x-y)^2 + (x-y)^3 \quad (*)
\end{aligned}$$

Thay $x-y = -2$ vào (*) ta được:

$$M = (-2)^2 + (-2)^3 = 4 - 8 = -4$$

Vậy $M = -4$ với x, y thỏa mãn đề.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x \left(1 + \frac{16}{x^2 + 3} \right) = 8 - \frac{3}{x}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 2xy + x + y + 2 = 0$.

Lời giải chi tiết

1) $x \left(1 + \frac{16}{x^2 + 3} \right) = 8 - \frac{3}{x} \quad (1)$

+) ĐKXĐ: $x \neq 0$

Khi đó:

$$(1) \Rightarrow x + \frac{16x}{x^2 + 3} - 8 + \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 - 7x^3 + 7x^2 + 15x^2 - 15x - 9x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-1) - 7x^2(x-1) + 15x(x-1) - 9(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 7x^2 + 15x - 9)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x^3 - x^2) - (6x^2 - 6x) + (9x - 9)](x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [x^2(x - 1) - 6x(x - 1) + 9(x - 1)](x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (TMDK)} \\ x = 1 \text{ (TMDK)} \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \{3; 1\}$

$$2) 2x^2 - 2xy + x + y + 2 = 0 \quad (1)$$

Giả sử tồn tại $x, y \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đề bài.

$$\text{Ta có: } 2x^2 - 2xy + x + y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - y) - (x - y) + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(2x - 1) + (2x - 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x - y + 1) = -3 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $2x - 1 \in \mathbb{Z}$; $x - y + 1 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2x - 1$ là ước của -3

$$\Rightarrow 2x - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow 2x \in \{-2; 0; 2; 4\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\} ; \text{ Mà } x \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow x \in \{1; 2\}$$

Nếu $x = 1$, thay vào (1) ta được:

$$(2 \cdot 1 - 1) \cdot (1 - y + 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow 2 - y = -3$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Nếu $x = 2$ thay vào (1) ta được:

$$(2 \cdot 2 - 1) \cdot (2 - y + 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow 3(3 - y) = -3$$

$$\Leftrightarrow 3 - y = -1$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \text{ (Chọn)}$$

Vậy $(x; y) \in \{(1; 5), (2; 4)\}$ là các cặp giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Cho số thực x thay đổi thỏa mãn $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 - 3x + \frac{1}{2x} + 2$$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $3^n + 19$ là số chính phương.

Lời giải chi tiết

1) Ta có:

$$P = x^2 - 4x + 4 + x + \frac{1}{2x} - 2 = (x-2)^2 + \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x}\right) + \frac{7x}{8} - 2$$

$$\text{Có } (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho $\frac{x}{8}; \frac{1}{2x} > 0$ có:

$$\frac{x}{8} + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Vì } x \geq 2 \Rightarrow \frac{7x}{8} \geq \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow P \geq 0 + \frac{1}{2} + \frac{7}{4} - 2 \Rightarrow P \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ \frac{x}{8} = \frac{1}{2x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{4} \text{ tại } x = 2.$$

$$2) \text{ Đặt } 3^n + 19 = a^2 \quad (1)$$

*) Xét $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } 3^{2k} + 19 = a^2 \Rightarrow (a - 3^k)(a + 3^k) = 19$$

$$\text{Nhận thấy } a - 3^k < a + 3^k \Rightarrow \begin{cases} a - 3^k = 1 \\ a + 3^k = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$$

$$\Rightarrow 3^n + 19 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow 3^n = 81$$

$$\Leftrightarrow n = 4 \text{ (nhận)}$$

*) Xét $n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}$. Khi đó (1) trở thành:

$$3^{2k+1} + 19 = a^2$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 9^k + 19 = a^2$$

$$\text{Lại có: } 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 9^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{Mà } 19 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{Suy ra: } (3 \cdot 9^k + 19) \equiv 2 \pmod{4}$$

Mặt khác a^2 không thể đồng dư với $2 \pmod{4}$

Do đó $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) không thỏa mãn

Vậy $n = 4$ thì $3^n + 19$ là số chính phương.

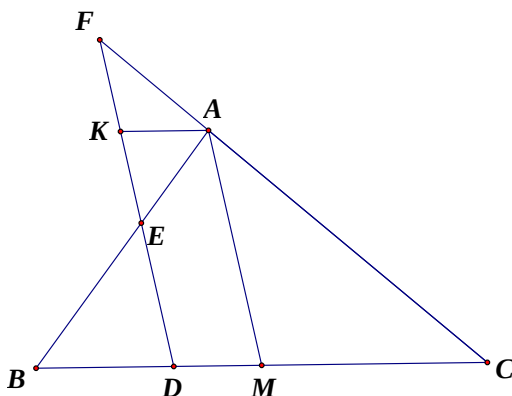
Bài 5: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy điểm M là trung điểm BC . Qua điểm D thuộc đoạn BM , vẽ đường thẳng song song với AM , đường thẳng này cắt hai đường thẳng AB, AC , lần lượt tại E và F . Qua A vẽ đường thẳng song song với BC và cắt EF tại K .

1. Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{ACB} + \widehat{MAC}$

2. Tính giá trị của $DE + DF - 2AM$

3. Chứng minh K là trung điểm của đoạn EF .

Lời giải chi tiết



1) Xét tứ giác $AKDM$ có:

$AK \parallel DM$ (vì $AK \parallel BC$; $D, M \in BC$)

$DK \parallel AM$ (vì $DF \parallel AM$; $K \in DF$)

Suy ra tứ giác $AKDM$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{AMD} \quad (1)$$

+) Ta có $\widehat{AMD}$ là góc ngoài của $\triangle AMC \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{AKD} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$

$$\text{Hay } \widehat{AKE} = \widehat{ACB} + \widehat{MAC} \quad (\text{đpcm})$$

2) Ta có: $DE + DF = DE + DE + EF$

$$= 2DE + 2EK \quad (\text{vì } KE = FK \text{ (cmt)})$$

$$= 2.(DE + EK) = 2.DK$$

Mà: $DK = AM$ (vì tứ giác $AKDM$ là hình bình hành)

$$\Rightarrow DE + DF = 2AM$$

$$\Rightarrow DE + DF - 2AM = 0$$

3) Xét $\triangle AKE$ và $\triangle BMA$ có:

$$\widehat{AKE} = \widehat{BMA} \quad (\text{vì tứ giác } AKDM \text{ là hình bình hành})$$

$$\widehat{KAE} = \widehat{MBA} \quad (\text{vì } AK \parallel BC)$$

Suy ra: $\triangle AKE \sim \triangle BMA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AK}{BM} = \frac{KE}{AM} \quad (1)$$

+) Xét $\triangle AFK$ và $\triangle CAM$ có:

$$\widehat{KAF} = \widehat{MCA} \quad (\text{vì } AK \parallel BC)$$

$$\widehat{AFK} = \widehat{CAM} \text{ (vì } AM \parallel DF \text{)}$$

Suy ra: $\triangle AFK \sim \triangle CAM$ (g.g)

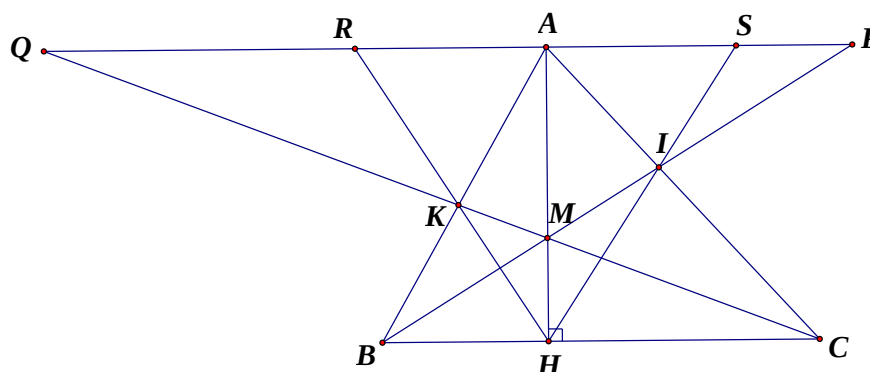
$$\Rightarrow \frac{AK}{CM} = \frac{FK}{AM} \quad (2)$$

Lại có $BM = CM$ (vì M là trung điểm của BC) (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $KE = FK$ hay K là trung điểm của EF (đpcm)

Bài 6: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm M (M nằm giữa A và H). Tia BM cắt AC tại I , tia CM cắt AB tại K . Chứng minh HA là tia phân giác của $\widehat{KHI}$

Lời giải chi tiết



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BI , CK , HK , HI lần lượt tại P , Q , R , S

Ta có: $\frac{AR}{BH} = \frac{KA}{KB} = \frac{AQ}{BC} \quad (1)$

Tương tự: $\frac{AS}{HC} = \frac{AI}{IC} = \frac{AP}{BC} \quad (2)$

Chia từng vế (1) cho (2) ta được: $\frac{AR}{AS} \cdot \frac{HC}{HB} = \frac{AQ}{AP} \quad (3)$

Lại có: $\frac{AQ}{HC} = \frac{MA}{MH} = \frac{AP}{BH} \Rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{HC}{HB} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AR}{AS} = 1 \Rightarrow AR = AS$

+) $\triangle HRS$ cân tại H ; $AR = AS$ suy ra HA là tia phân giác của $\widehat{KHI}$ (đpcm)

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT LỤC NAM

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN TOÁN 8

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

a) Rút gọn biểu thức

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A khi $x > 1$.

2. Chứng minh rằng: $\frac{91919^3 + 11^3}{91919^3 + 91908^3} = \frac{91919 + 11}{91919 + 91908}$.

3. Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ là hợp số.

2. Cho đa thức $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2034$. Tìm số dư trong phép chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 10x + 19$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Bài 4: (6,0 điểm)

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, H và I lần lượt là hình chiếu của B và D trên AC . Gọi lần lượt M, O, K là trung điểm của AH, HI và CD .

a) Chứng minh: B đối xứng với D qua O .

b) Chứng minh: $BM \perp MK$.

2. Cho tam giác nhọn ABC nhọn có đường cao AM, BN, CP . Gọi H là trực tâm của tam

giác ABC . Chứng minh rằng: $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AM^2 + BN^2 + CP^2} \geq 4$

Bài 5: (1,0 điểm) Tìm các nghiệm tự nhiên $(x; y)$ của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN TOÁN 8**Năm học: 2018-2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (5,0 điểm)**

1. Cho biểu thức $A = \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq \pm 1$

a) Rút gọn biểu thức

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A khi $x > 1$.

2. Chứng minh rằng: $\frac{91919^3 + 11^3}{91919^3 + 91908^3} = \frac{91919 + 11}{91919 + 91908}$.

3. Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{x^3 + x^2}{x^3 - 2x^2 + x} : \left(\frac{x^2 + x}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2 - x} \right) \text{ với } x \neq 0; x \neq \pm 1 \\ &= \frac{x^2(x+1)}{x(x-1)^2} : \left(\frac{x(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right) \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

b)

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ khi $x > 1$.

$$x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2 \Rightarrow x-1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2+2=4$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(TM) \\ x=0(L) \end{cases}$$

Vậy $P_{\min} = 4$ khi $x = 2$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{91919^3 + 11^3}{91919^3 + 91908^3} &= \frac{(91919 + 11)(91919^2 - 91919 \cdot 11 + 11^2)}{(91919 + 91908)(91919^2 - 91919 \cdot 91908 + 91908^2)} \\&= \frac{91919 + 11}{91919 + 91908} \cdot \frac{(91919 - 11)^2 + 91919 \cdot 11}{91908^2 + 91919 \cdot (91919 - 91908)} \\&= \frac{91919 + 11}{91919 + 91908} \cdot \frac{91908^2 + 91919 \cdot 11}{91908^2 + 91919 \cdot 11} = \frac{91919 + 11}{91919 + 91908}\end{aligned}$$

3.

Để $n+18$ và $n-41$ là số chính phương thì

$$n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

$$p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

$$\text{Vì } 59 \text{ là số nguyên tố nên } \begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

$$n+18 = p^2 = 30^2 = 900 \Rightarrow n = 882$$

Thay vào $n-41$ ta được $882-41 = 841 = 29^2 = q^2$ là số chính phương.

Vậy $n = 882$ thì $n+18$ và $n-41$ là số chính phương.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

2. Cho đa thức $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2034$. Tìm số dư trong phép chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 10x + 19$.

Lời giải

1.

$$\text{Xét } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a+b+c+d) = a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$$

Vì a là số nguyên dương nên $a, a-1$ là hai số tự nhiên liên tiếp

$$\Rightarrow a(a-1) : 2$$

Tương tự ta có $b(b-1); c(c-1); d(d-1)$ đều chia hết cho 2

$$\Rightarrow a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \text{ là số chẵn.}$$

$$\text{Ta có: } a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2) \text{ là số chẵn}$$

Do đó $a+b+c+d$ là số chẵn.

Mà $a+b+c+d > 2$

Vậy $a+b+c+d$ là hợp số.

2. Cho đa thức $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2034$. Tìm số dư trong phép chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 10x + 19$.

$$P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2034 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2034$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 10x + 19$$

$$\Rightarrow P(x) = (t-3)(t+5) + 2034 = t^2 + 2t + 2019$$

Do đó $t^2 + 2t + 2019$ chia cho t có số dư là 2019

Vậy $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 10x + 19$ có số dư là 2019.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số x, y, z nguyên thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0$.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Lời giải

1.

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + (z^2 - 2z + 1) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 3y + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1) = 0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{y}{2} = 0 \\ z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = (1; 2; 1)$.

2.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\text{Ta có } \frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{Tương tự } \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}; \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1. \end{aligned}$$

Bài 4: (6,0 điểm)

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, H và I lần lượt là hình chiếu của B và D trên AC . Gọi lần lượt M, O, K là trung điểm của AH, HI và CD .

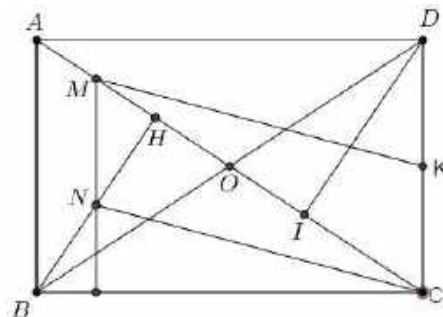
a) Chứng minh: B đối xứng với D qua O .

b) Chứng minh: $BM \perp MK$.

2. Cho tam giác nhọn ABC nhọn có đường cao AM, BN, CP . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AM^2+BN^2+CP^2} \geq 4$

Lời giải

1.



a) Ta có tứ giác $BHDI$ là hình bình hành (vì $\begin{cases} BH \parallel DI (\perp AC) \\ BH = DI (\triangle OBH = \triangle ODI) \end{cases}$)

Có O là trung điểm của HI nên O cũng là trung điểm của BD .
Vậy B đối xứng với D qua O .

b)

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BH tại N

$\Rightarrow MN \perp BC$ và N là trung điểm của BH

$\Rightarrow MN$ là trung bình của $\triangle AHB$

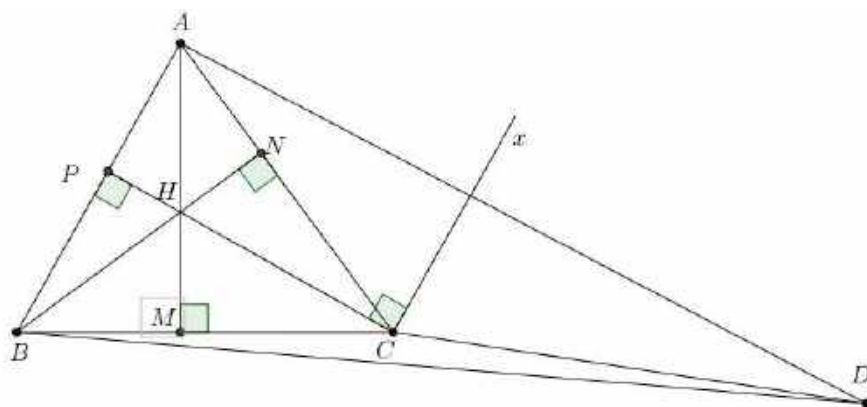
$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel CK (\parallel AB) \\ MN = CK \left(= \frac{1}{2} AB \right) \end{cases}$ nên $MNCK$ là hình bình hành $\Rightarrow CN \parallel MK$ (1)

Tam giác BMC có N là trực tâm $\Rightarrow CN \perp BM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM \perp MK$

2.



Vẽ $Cx \perp CP \Rightarrow Cx \parallel AP$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Ta có $\begin{cases} AB // Cx \\ Cx \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ$

ΔACD có Cx vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên ΔACD cân tại C .

Ta có tứ giác $APCI$ là hình chữ nhật (vì $\widehat{PAI} = \widehat{APC} = \widehat{PCI} = 90^\circ$)
 $\Rightarrow AI = CP$

Mà $AD = 2AI$ nên $AD = 2CP$

Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

ΔABD vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$

$\Rightarrow AB^2 + 4CP^2 \leq (BC + AC)^2 \Leftrightarrow 4CP^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$

Tương tự: $4AM^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$

$$4BN^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

Cộng vế theo vế ta được: $4(AM^2 + BN^2 + CP^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$$\text{Vậy } \frac{(AB + BC + CA)^2}{AM^2 + BN^2 + CP^2} \geq 4$$

Bài 5: (1,0 điểm) Tìm các nghiệm tự nhiên $(x; y)$ của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

Lời giải

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49) \Leftrightarrow (x^2 + 4(y^2 + 7))^2 = 17(x^4 + (y^2 + 7)^2)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có:

$$(x^2 + 4(y^2 + 7))^2 \leq (1^2 + 4^2)[x^4 + (y^2 + 7)^2] \Leftrightarrow (x^2 + 4(y^2 + 7))^2 \leq 17[x^4 + (y^2 + 7)^2]$$

Dấu “=” xảy ra khi $4x^2 = y^2 + 7 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 7$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $\begin{cases} 2x - y \leq 2x + y \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$, chúng đều có giá trị nguyên nên ta suy được

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $(2; 3)$.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT LỤC NGẠN**ĐỀ THI CHÍNH THỨC***(Đề thi gồm 1 trang)***ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN****NĂM HỌC: 2020 – 2021****MÔN THI : TOÁN – LỚP 8****Ngày thi: 18/3/2021***Thời gian làm bài: 120 phút không kể thời gian giao đề***Bài 1: (6 điểm)**

1. Cho biểu thức $P = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x - 3} - \frac{2x - 6}{x + 1} + \frac{x + 3}{3 - x}$ với $x \neq -1, x \neq 3$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình : $m(m - 2x) = x - 8m$ có một nghiệm $x = 3$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Gọi Q(x) là đa thức thương trong phép chia đa thức $A(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 12$ cho đa thức $B(x) = x^2 + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của Q(x)

2. Cho các số thực a, b thỏa mãn : $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ Tính giá trị của biểu thức $M = 3a^3 - 2b^4 - 1$

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Cho số nguyên tố p thỏa mãn $p + 6$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh $p^2 + 2021$ là hợp số

2. Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a^2 + 3a$ là số chính phương

Bài 4: (6,0 điểm)

1. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BM và CN cắt nhau tại H. Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở D.

a) Chứng minh tứ giác BHCD là hình bình hành

b) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AD. Qua điểm O kẻ đường thẳng song song với AH cắt BC tại K. Chứng minh K là trung điểm của BC và tính độ dài đoạn thẳng OK biết $AH = 6\text{cm}$

2. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I và $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. Tính số đo $\widehat{BAC}$

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{100}^3$ với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ là các số nguyên thỏa mãn

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100} = 2021^{2022}$. Chứng minh rằng: $S \equiv 1 \pmod{6}$.

===== HẾT =====

PHÒNG GD&ĐT LỤC NGẠN ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 1 trang)

NĂM HỌC: 2020 – 2021

MÔN THI : TOÁN – LỚP 8

Ngày thi: 18/3/2021

Thời gian làm bài: 120 phút không kể thời gian giao đề

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (6 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x - 3} - \frac{2x - 6}{x + 1} + \frac{x + 3}{3 - x}$ với $x \neq -1, x \neq 3$.

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình : $m(m - 2x) = x - 8m$ có một nghiệm $x = 3$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. a) P &= \frac{x^3 - 3}{(x + 1)(x - 3)} - \frac{(2x - 6)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)} - \frac{(x + 3)(x + 1)}{(x - 3)(x + 1)} \\ &= \frac{x^3 - 3 - 2x^2 + 12x - 18 - x^2 - 4x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 8x - 24}{(x + 1)(x - 3)} \\ &= \frac{(x - 3)(x^2 + 8)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x^2 + 8}{x + 1} \end{aligned}$$

$$b) P = \frac{x^2 + 8}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - (x + 1) + 9}{x + 1} = x - 1 + \frac{9}{x + 1}$$

P nguyên khi $\frac{9}{x + 1}$ nguyên hay $x + 1 \in U(9) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$

Suy ra $x \in \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$ thỏa mãn điều kiện

Vậy $x \in \{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$

2. Phương trình: $m(m - 2x) = x - 8m$ có một nghiệm $x = 3$ suy ra $m(m - 2.3) = 3 - 8m$

$$\Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m + 3) = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -3$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = -3$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Gọi $Q(x)$ là đa thức thương trong phép chia đa thức $A(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 12$ cho đa thức $B(x) = x^2 + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q(x)$

2. Cho các số thực a, b thỏa mãn : $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$ Tính giá trị của biểu thức $M = 3a^3 - 2b^4 - 1$

Lời giải

1

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 12 & x^2 + x - 1 \\
 \hline
 x^4 + x^3 + x^2 & x^2 + 2x - 5 \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & \\
 2x^3 + 2x^2 - 2x & \\
 \hline
 -5x^2 - 2x + 12 & \\
 -5x^2 - 5x + 5 & \\
 \hline
 3x + 7 &
 \end{array}$$

Vậy $Q(x) = x^2 + 2x - 5 = (x^2 + 2x + 1) - 6 = (x + 1)^2 - 6$

Ta có $(x + 1)^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow (x + 1)^2 - 6 \geq -6 \forall x$

Do đó $Q(x)_{\min} = -6 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

2. Ta có $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 = 0 \\ (a - 1)^2 = 0 \\ (b + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Thay $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ vào $M = 3a^3 - 2b^4 - 1$ ta được $M = 3.1^3 - 2(-1)^4 - 1 = 0$

Vậy giá trị của biểu thức $M = 0$.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Cho số nguyên tố p thỏa mãn $p + 6$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh $p^2 + 2021$ là hợp số

2. Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a^2 + 3a$ là số chính phương

Lời giải

1. $p = 2 \Rightarrow p + 6 = 8$ là hợp số (loại)

$p = 3 \Rightarrow p + 6 = 9$ là hợp số (loại)

$\Rightarrow p > 3$ mà p là số nguyên tố $\Rightarrow p$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2 : 3$ dư 1

$\Rightarrow p^2 + 2021$ là hợp số

2. Giả sử $a^2 + 3a = b^2 \Rightarrow 4a^2 + 12a = 4b^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 9 - 4b^2 = 9$

$\Leftrightarrow (2a + 3)^2 - (2b)^2 = 9 \Leftrightarrow (2a - 2b + 3)(2a + 2b + 3) = 9$

Lập bảng

$2a - 2b + 3$	1	-1	3	-3
$2a + 2b + 3$	9	-9	-3	3
$2a - 2b$	-2	-4	0	-6
$2a + 2b$	-6	-12	-6	0
a	-2	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
b	-1	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

Vậy $a \in \left\{-2; -4; -\frac{3}{2}\right\}$ thì $a^2 + 3a$ là số chính phương

Bài 4: (6,0 điểm)

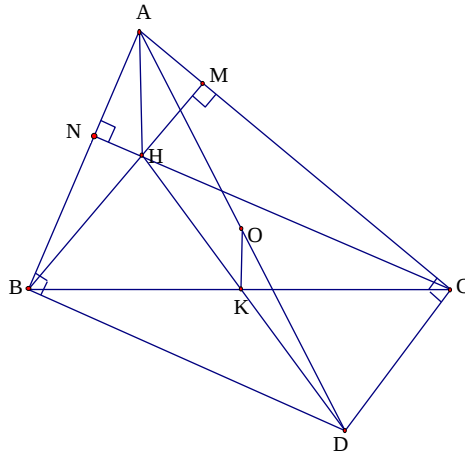
1. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BM và CN cắt nhau tại H . Đường thẳng vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng vuông góc với AB tại B ở D .

a) Chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành

b) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AD . Qua điểm O kẻ đường thẳng song song với AH cắt BC tại K . Chứng minh K là trung điểm của BC và tính độ dài đoạn thẳng OK biết $AH = 6\text{cm}$

2. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I và $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. Tính số đo $\widehat{BAC}$

Lời giải



1.

a) Ta có $BD \perp AB$ (gt) và $CH \perp AB$ (gt) suy ra $BD \parallel CH$ (1)

Ta có $DC \perp AC$ (gt) và $BH \perp AC$ (gt) suy ra $DC \parallel BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCD là hình bình hành

b) Xét $\triangle AHD$ có: $OA = OD$ (gt) và $OK \parallel AH$ (gt) suy ra K là trung điểm của HD (3)

Vì tứ giác BHCD là hình bình hành theo (cmt) có HD và BC là hai đường chéo (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ K là trung điểm của BC (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Vì OK là đường trung bình của $\triangle AHD$ (cmt)

$$\Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm})$$

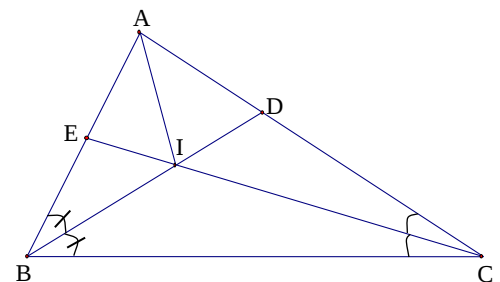
2. Đặt $AB = c$

$$AC = b$$

$$BC = a$$

BD là phân giác của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DA}{DA + DC} = \frac{AB}{AB + BC}$$



$$\Rightarrow \frac{DA}{AC} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{DA}{b} = \frac{c}{c + a} \Rightarrow DA = \frac{bc}{c + a}$$

AI là phân giác của $\triangle ABD$

$$\Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BI}{BI + ID} = \frac{AB}{AB + AD}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{c}{c + \frac{bc}{c+a}} = \frac{c+a}{a+b+c}$$

Tương tự $\frac{CI}{CE} = \frac{b+a}{a+b+c}$

Mà $DB \cdot CE = 2BI \cdot CI$

$$\Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{CE}{2CI} \Rightarrow \frac{c+a}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{2(b+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2(bc + ab + ac + a^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A . Vậy $\widehat{BAC} = 90^\circ$

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho $S = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{100}^3$ với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ là các số nguyên thỏa mãn:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100} = 2021^{2022}$. Chứng minh rằng: $S - 1 \vdots 6$.

Lời giải

$$S - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) = a_1(a_1^2 - 1) + a_2(a_2^2 - 1) + a_3(a_3^2 - 1) + \dots + a_{100}(a_{100}^2 - 1)$$

$$= a_1(a_1 - 1)(a_1 + 1) + a_2(a_2 - 1)(a_2 + 1) + a_3(a_3 - 1)(a_3 + 1) + \dots + a_{100}(a_{100} - 1)(a_{100} + 1) \vdots 6 \text{ (tích 3 số liên tiếp)}$$

$$\Rightarrow S - 2021^{2020} \vdots 6$$

$$\text{Mà } 2021 \equiv 5 \pmod{6} \equiv -1 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 2021^{2020} \equiv (-1)^{2020} \pmod{6} \equiv 1 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 2021^{2020} = 6k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow S - (6k + 1) \vdots 6 \Rightarrow S - 1 - 6k \vdots 6 \Rightarrow S - 1 \vdots 6 \text{ (đpcm)}$$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN Ý YÊN

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG LỚP 8

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài : 150 phút

I. Phần ghi kết quả (2 điểm) (thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)**Câu 1:** Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 0$ **Câu 2:** Tìm dư trong phép chia đa thức $x^5 + x^3 + x$ cho đa thức $x + 1$ **Câu 3:** Cho $x > y > 0$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính biểu thức $A = \frac{x+y}{x-y}$ **Câu 4:** Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD . Gọi O là giao điểm của AC và BD .Biết $OB = 2cm$, $OD = 4cm$, $S_{AOB} = 1cm^2$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.**II. Phần tự luận** (18 điểm) (thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)**Câu 1** (4 điểm): Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{x^2}{-x-2}\right) : \frac{x}{4+4x+x^2} - \frac{4+6x+x^2}{x}$, với $x \neq 0$; $x \neq -2$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A
- Tìm giá trị của x để $|A| = 2$

Câu 2: (4,5 điểm)a) Giải phương trình: $3x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)^2 + 2x^3 = 0$ b) Cho các số a, b, c khác không và thỏa mãn: $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ c) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x - 3y = 2xy - 11$ **Câu 3** (7,5 điểm): Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của cạnh BC .a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ABC$ b) Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = 4ME \cdot MF$ c) Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$ là một hằng số.d) Trên tia đối của FC lấy P sao cho $AP \parallel BE$, trên tia đối của EB lấy điểm Q sao cho $AQ \parallel CF$. Chứng minh $AM \perp PQ$.**Câu 4:** (2 điểm)a) Cho $a + b = 2$. Chứng minh $a^4 + b^4 \geq 2$ b) Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên biết rằng $f(0); f(1)$ là các số lẻ. Chứng tỏ rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG LỚP 8
PHÒNG GD&ĐT HUYỆN Ý YÊN
NĂM HỌC: 2018 – 2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I. Phần ghi kết quả (2 điểm)

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 0$

Giải:

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{0; 1\}$$

Câu 2: Tìm dư trong phép chia đa thức $x^5 + x^3 + x$ cho đa thức $x + 1$

Giải:

$$x^5 + x^3 + x = (x + 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 3) - 3$$

Nên số dư trong phép chia đó là : -3

Câu 3: Cho $x > y > 0$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Tính biểu thức $A = \frac{x + y}{x - y}$

Giải:

$$2x^2 + 2y^2 = 5xy$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 4xy) - (xy - 2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 2y) - y(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(2x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y) = 0 \\ (x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2y \end{cases}$$

Do $x > y > 0$ nên $x = 2y$

$$\Rightarrow A = \frac{x + y}{x - y} = \frac{2y + y}{2y - y} = 3$$

Câu 4: Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB , CD . Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Biết $OB = 2cm$, $OD = 4cm$, $S_{AOB} = 1cm^2$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Lời giải:

Do $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \triangle ABO \sim \triangle CDO$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{OCD}} = \left(\frac{OB}{OD}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{OCD} = 4cm^2$$

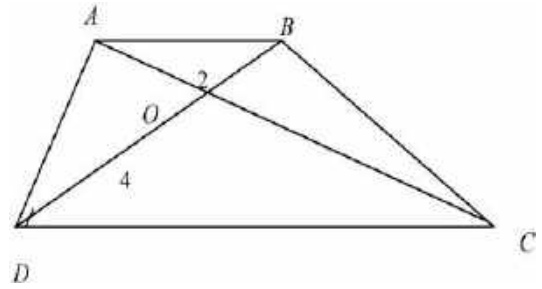
$$\Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{OB}{DB} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = 3S_{AOB} = 3cm^2$$

$$\frac{S_{OCD}}{S_{BCD}} = \frac{OD}{DB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{3}{2} \cdot S_{OCD} = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6cm^2$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 3 + 6 = 9cm^2$$



II. Phần tự luận

Câu 1(4 điểm): Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{x^2}{-x-2}\right) : \frac{x}{4+4x+x^2} - \frac{4+6x+x^2}{x}$, với $x \neq 0$; $x \neq -2$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

c) Tìm giá trị của x để $|A| = 2$

Lời giải:

a) Rút gọn biểu thức A

$$A = \left(1 + \frac{x^2}{-x-2}\right) : \frac{x}{4+4x+x^2} - \frac{4+6x+x^2}{x}$$

$$A = \left(\frac{-x-2+x^2}{-x-2}\right) : \frac{x}{(x+2)^2} - \frac{4+6x+x^2}{x}$$

$$A = \frac{-x-2+x^2}{-(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{x} - \frac{4+6x+x^2}{x}$$

$$A = \frac{(x+2-x^2) \cdot (x+2)}{x} - \frac{4+6x+x^2}{x}$$

$$A = \frac{x^2 + 2x - x^3 + 2x + 4 - 2x^2 - 4 - 6x - x^2}{x}$$

$$A = \frac{-x^3 - 2x^2 - 2x}{x}$$

$$A = -(x^2 + 2x + 2)$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

$$A = -(x^2 + 2x + 2)$$

$$A = -1 - (x^2 + 2x + 1)$$

$$A = -1 - (x+1)^2$$

$$\text{Do } (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow A = -1 - (x+1)^2 \leq -1$$

Nên A đạt giá trị nhỏ nhất khi A là -1 khi $x = -1$

c) Tìm giá trị của x để $|A| = 2$

$$A = |-1 - (x+1)^2| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - (x+1)^2 = 2 \\ -1 - (x+1)^2 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = -3 \text{ vn} \\ (x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị x nào thỏa mãn.

Câu 2: (4,5 điểm)

a) Giải phương trình : $3x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)^2 + 2x^3 = 0$

b) Cho các số a, b, c khác không và thỏa mãn : $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $5x - 3y = 2xy - 11$

Lời giải:

a) Giải phương trình : $3x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)^2 + 2x^3 = 0$

$$3x^2(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)^2 + 2x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left[3x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)^2 + 2x^2 \right] = 0$$

TH1: $x = 0$ là nghiệm

$$\text{TH2: } \left[3x(x^2+1) + (x^2+1)^2 + 2x^2 \right] = 0$$

$$\text{Đặt } a = (x^2+1)$$

$$\Rightarrow 3xa + a^2 + 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xa + a^2) + (2xa + 2x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x+a) + 2x(x+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(a+2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+a) = 0 \\ (a+2x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 + 1 = 0 \text{ (vn)} \\ x^2 + 1 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 0$

b) Cho các số a, b, c khác không và thỏa mãn : $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Lời giải:

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 3a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x = ab; \quad y = bc; \quad z = ac$$

$$(1) \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+y)^3 + z^3] - 3xy(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y+z) = 0 \\ (x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x+y+z=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0$$

$$M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc}{abc} = -1$$

$$\text{TH2: } (x+y)^2 - (x+y)z + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

$$\Leftrightarrow ab = bc = ca \Leftrightarrow a = b = c$$

$$\Rightarrow M = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{2a.2b.2c}{abc} = 8$$

$$c) 5x - 3y = 2xy - 11$$

$$\Leftrightarrow 10x - 4xy + 15 - 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(5-2y) + 3(5-2y) = -7$$

$$\Leftrightarrow (5-2y)(2x+3) = -7$$

$$\forall (5-2y); (2x+3) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (5-2y) \in U(-7); (2x+3) \in U(-7)$$

Ta có bảng sau:

$2x+3$	7	1	-7	1
$5-2y$	-1	-7	1	7
x	2	-1	-5	-2
y	3	6	2	-1

Vậy các cặp số $(x; y)$ là: $(2; 3); (-1; 6); (-5; 2); (-2; -1)$

Câu 3 (7,5 điểm): Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ABC$

b) Chứng minh $BH \cdot BE + CH \cdot CF = 4ME \cdot MF$

c) Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}$ là một hằng số.

d) Trên tia đối của FC lấy P sao cho $AP \parallel BE$, trên tia đối của EB lấy điểm Q sao cho $AQ \parallel CF$. Chứng minh $AM \perp PQ$.

Giải:

a) $\triangle ACF \sim \triangle ABE$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}; \hat{A} \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \text{ (cgc)}$$

b) $\triangle CHD \sim \triangle CBF$

$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CD}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = CB \cdot CD$$

Tương tự có $BH \cdot BE = CB \cdot BD$

$$\Rightarrow CH \cdot CF + BH \cdot BE = CB \cdot CD + CB \cdot BD = CB^2$$

Mà $CB = 2EM$ ($\triangle BEC$ có EM trung tuyến)

$CB = 2FM$ ($\triangle BFC$ có FM trung tuyến)

$$\Rightarrow CH \cdot CF + BH \cdot BE = 4EM \cdot FM$$

$$c) \frac{S_{HCD}}{S_{ADC}} = \frac{HD}{AD} (1); \frac{S_{BHD}}{S_{DAB}} = \frac{HD}{AD} (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{S_{HCD}}{S_{ADC}} = \frac{S_{BDH}}{S_{ADB}} = \frac{S_{HCD} + S_{BDH}}{S_{ADC} + S_{ADB}} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} \Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} \quad (4) ; \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} \quad (5)$$

$$(3), (4), (5) \Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$$

d) Trên tia đối của AP lấy P' sao cho $AP' = AC$

Trên tia đối của AQ lấy Q' sao cho $AQ' = AB$

Vì $AP \parallel BE$ mà $BE \perp AC$ nên $AP \perp AC \Rightarrow \widehat{PAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PAF} + \widehat{FAE} = 90^\circ$

Tương tự $\widehat{QAB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QAE} + \widehat{EAF} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{PAF} + \widehat{QAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PAF} = \widehat{QAE}$$

$$\Rightarrow \triangle APF \square \triangle AQE$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AF}{AE} ; \quad \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Mà } AC = AP' ; AB = AQ' \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AP'}{AQ'} \Rightarrow PQ \parallel P'Q'$$

Trên tia đối của MA lấy O sao cho $MA = MO$

$$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle OMC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AB = CO ; \quad \widehat{ABM} = \widehat{OCM}$$

$$\text{Vì } \widehat{ABM} = \widehat{OCM} \Rightarrow AB \parallel CO$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACO} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{P'AQ'} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{Q'AP'} = \widehat{ACO}$$

$$\Rightarrow \triangle Q'AP' = \triangle OCA \text{ (cgc)}$$

Gọi giao điểm của MA với $P'Q'$ là K ta có :

$$\widehat{KAP'} + \widehat{CAO} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{CAO} = \widehat{AP'Q'}$$

$$\Rightarrow \widehat{KAP'} + \widehat{AP'Q'} = 90^\circ$$

Nên $\triangle AKP'$ vuông tại K

$$\Rightarrow AM \perp P'Q'$$

$$\Rightarrow AM \perp PQ$$

Câu 4: (2 điểm)

- a) Cho $a + b = 2$. Chứng minh $a^4 + b^4 \geq 2$
- b) Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên biết rằng $f(0); f(1)$ là các số lẻ. Chứng tỏ rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.

Giải:

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq a^4 + b^4 + 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (a^4 + b^4) \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2}$$

$$\text{Tương tự: } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2^2}{2}$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{2^2}{2} = 2$$

b) Giả sử $f(x)$ có nghiệm nguyên là a thì $f(x) : (x - a)$

$$\Rightarrow f(x) = (x - a).g(x)$$

$$\Rightarrow f(0) = (-a).g(0) \text{ là một số lẻ} \Rightarrow a \text{ là số lẻ}$$

$$f(1) = (1 - a).g(1) \text{ là một số lẻ} \Rightarrow 1 - a \text{ là số lẻ} \Rightarrow a \text{ là số chẵn.}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\Rightarrow$ đpcm

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN TRỰC NINH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC: 2018 – 2019

MÔN TOÁN - LỚP: 8

Thì ngày 11 tháng 4 năm 2019

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề)

.....

Bài 1: (4,5 điểm)

1. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

b) $x^2 - 4x + 4y - 2xy + y^2 - 5$

2. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{2020} + \frac{x-2}{2019} + \frac{x-3}{2018} + \dots + \frac{x-2019}{2} = 2019$$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Các số thực a, b, c, d thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3$, và $dab - c = -6$. Chứng minh: $a + b + c + d \neq 0$.

2. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x + y + z = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Chứng minh mỗi số x, y, z đều thuộc đoạn $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{20} + x^{10} + x^5 + 1$ cho đa thức $x^2 - 1$

2. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

Bài 4: (8,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC

và BD , I là trung điểm của OB . Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = \frac{1}{2}CB$. Từ

D kẻ DM vuông góc với BE (M thuộc BE), DM cắt BC tại H .

1. Chứng minh $\triangle AOI \sim \triangle BCE$.

2. Chứng minh $\widehat{BIE} = 90^\circ$

3. Chứng minh MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

4. Gọi G là giao điểm của AC và DM , BG cắt IE tại P . Hãy tính diện tích $\triangle GHP$ theo a .

Bài 5: (1,5 điểm) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh } \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

===== HẾT =====

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN
TOÁN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN TRỰC
NINH
Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

Bài 1: (4,5 điểm)

1. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

b) $x^2 - 4x + 4y - 2xy + y^2 - 5$

2. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{2020} + \frac{x-2}{2019} + \frac{x-3}{2018} + \dots + \frac{x-2019}{2} = 2019$$

Lời giải

1. Phân tích thành nhân tử:

a) $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

$$= (x^4 - x) + 2019x^2 + 2019x + 2019$$

$$= x(x^3 - 1) + 2019(x^2 + x + 1)$$

$$= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2019(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019)$$

b) $x^2 - 4x + 4y - 2xy + y^2 - 5$

$$= (x^2 - 2xy + y^2) - 4(x - y) - 5$$

$$= (x - y)^2 - 4(x - y) + 4 - 9$$

$$= (x - y - 2)^2 - 3^2$$

$$= (x - y - 5)(x - y + 1)$$

2. Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{2020} + \frac{x-2}{2019} + \frac{x-3}{2018} + \dots + \frac{x-2019}{2} = 2019$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2020} - 1 + \frac{x-2}{2019} - 1 + \frac{x-3}{2018} - 1 + \dots + \frac{x-2019}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2021}{2020} + \frac{x-2021}{2019} + \frac{x-2021}{2018} + \dots + \frac{x-2021}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2021) \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} + \dots + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\text{Chúng minh được } \frac{1}{2020} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} + \dots + \frac{1}{2} > 0$$

Do đó tìm được và KL: $x = 2021$ **Bài 2: (3,0 điểm)**1. Các số thực a, b, c, d thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, \text{ và } dab - c = -6.$$

Chứng minh: $a + b + c + d \neq 0$.

2. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x + y + z = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Chứng minh mỗi số x, y, z đều thuộc đoạn $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

Lời giải

1. Giả sử $a + b + c + d = 0$, suy ra $abc + bcd + cda + dab = 0$

Thay $d = -a - b - c$ ta được

$$-b^2c - bc^2 - a^2c - ac^2 - abc - a^2b - ab^2 - abc = 0$$

$$\text{Hay } -(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Xét 3 trường hợp:

$$a = -b \Rightarrow bcd + b = 2 \text{ và } -bcd - b = 3, \text{ mâu thuẫn}$$

$$. a = -d \Rightarrow bcd + d = 2 \text{ và } -bcd - d = 1, \text{ mâu thuẫn}$$

KL: Vậy $a + b + c + d \neq 0$

2. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn: $x + y + z = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

$$\text{Ta có: } y + z = 4 - x \text{ và } y^2 + z^2 = 6 - x^2$$

$$\text{Theo BĐT Cosi ta có } y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(y + z)^2$$

$$\text{Hay } 6 - x^2 \geq \frac{1}{2}(4 - x)^2$$

$$\Rightarrow (3x - 2)(x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

Tương tự với y, z . Ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $x^{20} + x^{10} + x^5 + 1$ cho đa thức $x^2 - 1$

2. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$$

Lời giải

1. Gọi đa thức dư trong phép chia là $ax + b$

$$x^{20} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$

Xét với $x = 1$ ta được $a + b = 4$

Xét với $x = -1$ ta được $-a + b = 2$

Tìm được $a = 1$ và $b = 3$

Kết luận: Vậy đa thức dư là $x + 3$

2. Ta có: $2x^2 + 3y^2 + 4x = 19$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 3y^2 = 19 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7-y^2) \quad (*)$$

Vế trái (*) là số chẵn do đó vế phải (*) cũng là số chẵn,

Suy ra y^2 là số lẻ và vế trái (*) ≥ 0 nên vế phải (*) ≥ 0

Do đó $7 - y^2 \geq 0$, Suy ra $y^2 \leq 7$

Từ đó tìm được $y = 1, y = -1$

Khi đó $2(x+1)^2 = 18 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9$.

Tìm được $x = 2, x = -4$

Thử lại và kết luận các cặp số nguyên cần tìm:

$$(x, y) \in \{(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)\}$$

Bài 4:(8,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD , I là trung điểm của OB . Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho

$CE = \frac{1}{2}CB$. Từ D kẻ DM vuông góc với BE (M thuộc BE),

DM cắt BC tại H .

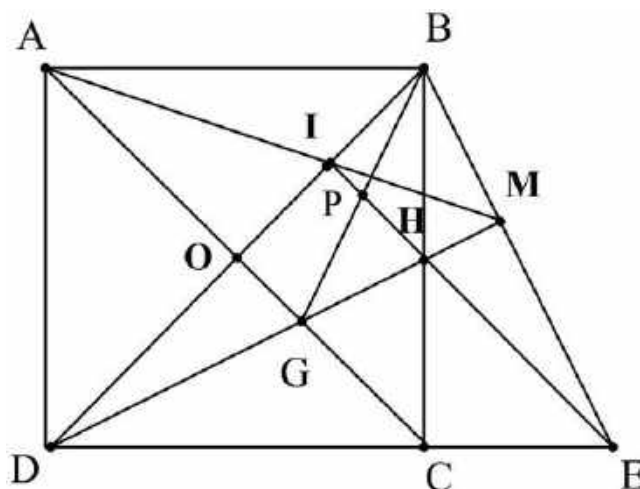
1. Chứng minh $\triangle AOI \sim \triangle BCE$.

2. Chứng minh $\widehat{BIE} = 90^\circ$

3. Chứng minh MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

4. Gọi G là giao điểm của AC và DM , BG cắt IE tại P . Hãy tính diện tích $\triangle GHP$ theo a .

Lời giải



1. Chứng minh $\frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}$

Chứng minh $\frac{OI}{OA} = \frac{1}{2}$ (vì I là trung điểm của OB , mà $OA = OB$)

Từ đó suy ra $\frac{CE}{CB} = \frac{OI}{OA}$ hay $\frac{OA}{CB} = \frac{OI}{CE}$

Chúng minh $\triangle AOI \square \triangle BCE$ (c.g.c)

2. Chúng minh $\widehat{CBE} = \widehat{CDH}$ (cùng phụ với $\widehat{BED}$)

Từ đó chứng minh $\triangle BCE \square \triangle DCH$ (g.g)

$$\text{Suy ra được } \frac{BC}{DC} = \frac{CE}{CH}$$

Kết hợp với $BC = DC$ suy ra $CE = CH$

Từ đó suy ra H là trung điểm của BC (vì có $CE = \frac{1}{2}CB$)

Chúng minh IH là đường trung bình của $\triangle BOC$

Suy ra $IH \parallel OC$

Kết hợp với $OC \perp BD$

Suy ra được $IH \perp BD$ (1)

Chúng minh H là trực tâm của $\triangle BDE$ (giao điểm hai đường cao DM và BC)

Suy ra được $EH \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) chứng minh được E, H, I thẳng hàng

Từ đó suy ra $EI \perp BD$ hay $\widehat{BIE} = 90^\circ$.

3. Chúng minh $\triangle BIE \square \triangle BMD$ (g.g)

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{BE}{BI} = \frac{BD}{BM}$$

Chúng minh $\triangle BIM \square \triangle BED$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{BIM} = \widehat{BED}$

Kết hợp với $\widehat{AIO} = \widehat{BEC}$ (vì $\triangle AOI \square \triangle BCE$)

Suy ra được $\widehat{AIO} = \widehat{BIM}$

Chúng minh $\widehat{DIM} + \widehat{BIM} = 180^\circ$ (ba điểm B, I, D thẳng hàng)

Từ đó suy ra $\widehat{DIM} + \widehat{AIO} = 180^\circ$

Suy ra được M, I, A thẳng hàng

Chúng minh $\widehat{BMI} = \widehat{BDC}$ (vì $\triangle BIM \square \triangle BED$)

Chúng minh $\widehat{BDC} = 45^\circ$ (vì $ABCD$ là hình vuông)

Từ đó suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{BDC} = 45^\circ$

Chúng minh $\widehat{IMD} = 45^\circ$ (vì $\widehat{BMI} = 45^\circ, \widehat{BMD} = 90^\circ$)

Suy ra được MI là tia phân giác của $\widehat{BMD}$

Kết hợp với ba điểm M, I, A thẳng hàng

Suy ra được MA là tia phân giác của $\widehat{BMD}$.

4. Chúng minh $S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} a^2$ (1)

Chúng minh $S_{GHB} = \frac{1}{2} S_{GBC}$ (2) (hai tam giác chung đường

cao kẻ từ D xuống BC và có $BH = \frac{1}{2} BC$)

Chứng minh G là trọng tâm của tam giác BCD

Suy ra $GH = \frac{1}{3} DH$

Từ đó suy ra $S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{DBC}$ (3) (hai tam giác có chung

đường cao kẻ từ B xuống DH và $GH = \frac{1}{3} DH$)

Chứng minh P là trung điểm của BG ($IP // OG, I$ là trung điểm của OB) nên $GP = \frac{1}{2} GB$

Lại có: $S_{GHP} = \frac{1}{2} S_{GHB}$ (4) (hai tam giác có chung đường

cao kẻ từ H xuống BG và $GP = \frac{1}{2} GB$)

Từ (1); (2); (3); (4) suy ra được:

$$S_{GHP} = \frac{1}{2} S_{GHB} = \frac{1}{4} S_{GBC} = \frac{1}{12} S_{DBC} = \frac{1}{24} S_{ABCD} = \frac{1}{24} a^2$$

(đvdt)

Bài 5: (1,5 điểm) Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

$$\text{Chứng minh } \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$$

Mà

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 \geq \frac{3}{2}$$

Do vai trò a, b, c như nhau nên có thể giả sử $a \leq b \leq c$

Suy ra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{a+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 + \frac{c}{a+b}$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên $a+b > c$

$$\text{Suy ra } 1 + \frac{c}{a+b} < 1 + 1 = 2$$

$$\text{Kết luận: } \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN PHÚ LƯƠNG
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

GIAO LƯU HỌC SINH SINH GIỎI LỚP 8

NĂM HỌC: 2018 – 2019

MÔN TOÁN - LỚP: 8

(Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian giao đề)

.....

Bài 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$

b) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x-2$ thì dư 5, khi chia cho $x-3$ thì dư 7, khi chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương và có dư. Tìm đa thức $f(x)$.

Bài 2: (2,0 điểm) Giải các phương trình

a) $(x+8)(x+7)^2(x+6) = 12$

b) $\|x-2\| + 5 = 7$

Bài 3: (1,0 điểm) Cho a, b là các số thỏa mãn $a+b+c=0$ và $-1 \leq a, b, c \leq 2$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$

Bài 4: (2,0 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^3 - a^2 - 4a + 4$

b) $2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh rằng tích $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Qua M kẻ MH vuông góc với DE ($H \in DE$). Chứng minh rằng khi D và E thay đổi trên cạnh AB và AC thì MH không đổi.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8
UBND HUYỆN PHÚ LƯƠNG
Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$

b) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x-2$ thì dư 5, khi chia cho $x-3$ thì dư 7, khi chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương và có dư. Tìm đa thức $f(x)$.

Lời giải

a) $P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$ (ĐKXĐ: $a \neq -b, a \neq -1, b \neq 1$)

$$P = \frac{a^2(1+a) - b^2(1-b) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)} = \frac{a^3 + a^2 - b^2 + b^3 - a^3b^2 - a^2b^3}{(a+b)(1-b)(1+a)}$$

$$P = \frac{(a^3 + b^3) + (a^2 - b^2) - (a^3b^2 + a^2b^3)}{(a+b)(1-b)(1+a)}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) + (a-b)(a+b) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1-b)(1+a)}$$

$$P = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 + a - b - a^2b^2)}{(a+b)(1-b)(1+a)} = \frac{(a^2 - a^2b^2) + (a - ab) + (b^2 - b)}{(1-b)(1+a)}$$

$$P = \frac{a^2(1-b)(1+b) + a(1-b) - b(1-b)}{(1-b)(1+a)} = \frac{(1-b)(a^2b + a^2 + a - b)}{(1-b)(1+a)}$$

$$P = \frac{(1-b)(a^2b + a^2 + a - b)}{(1-b)(1+a)} = \frac{(a^2 + a) + (a^2b - b)}{1+a} = \frac{a(a+1) + b(a+1)(a-1)}{1+a}$$

$$P = \frac{(a+1)(a+ab-b)}{(1+a)} = a + ab - b$$

b) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $(x-2)(x-3)$ được thương và có dư. (Đề bài cho thiếu $Q(x)$)

$$\text{Suy ra } f(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

$$\text{Vì đa thức } f(x) \text{ khi chia cho } x-2 \text{ thì dư } 5 \Rightarrow f(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ chia cho } x-3 \text{ thì dư } 7 \Rightarrow f(3) = 7 \Rightarrow 3a + b = 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 2, b = 1$

$$\text{Vậy } f(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + 2x + 1$$

Bài 2: (2,0 điểm) Giải các phương trình

a) $(x+8)(x+7)^2(x+6) = 12$

b) $||x-2|+5| = 7$

Lời giải

a) $(x+8)(x+7)^2(x+6) = 12 \quad (1)$

Đặt $t = x+7$ phương trình (1) trở thành:

$$(t+1)t^2(t-1) = 12$$

$$\Leftrightarrow (t^2-1)t^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 3t^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^4 - 4t^2) + (3t^2 - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t^2 - 4) + 3(t^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4)(t^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4 = 0 \quad (\text{vì } t^2 + 3 \geq 3 \text{ với mọi } t)$$

$$\Leftrightarrow t = \pm 2$$

Với $t = 2$ ta có $x+7 = 2 \Rightarrow x = -5$

Với $t = -2$ ta có $x+7 = -2 \Rightarrow x = -9$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-5; -9\}$

b) $||x-2|+5| = 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+5 = 7 \\ |x-2|+5 = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x-2|+5 = 7 \quad (\text{vì } |x-2|+5 = -7 \text{ vô nghiệm do } |x-2|+5 \geq 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2 \\ x-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{4; 0\}$

Bài 3: (1,0 điểm) Cho a, b là các số thỏa mãn $a+b+c=0$ và $-1 \leq a, b, c \leq 2$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$

Lời giải

$$-1 \leq a, b, c \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} (a+1)(a-2) \leq 0 \\ (b+1)(b-2) \leq 0 \\ (c+1)(c-2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq a+2 \\ b^2 \leq b+2 \\ c^2 \leq c+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6 \quad (\text{Vì } a + b + c = 0)$$

Bài 4: (2,0 điểm) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^3 - a^2 - 4a + 4$

b) $2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

Lời giải

a) $a^3 - a^2 - 4a + 4 = a^2(a-1) - 4(a-1) = (a-1)(a^2 - 4) = (a-1)(a-2)(a+2)$

b)

$$2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 = 2(a^3 + b^3) + 7ab(a+b) = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b) \\ = (a+b)(2a^2 - 2ab + 2b^2 + 7ab) = (a+b)(2a^2 + 5ab + 2b^2) = (a+b)(2a^2 + 4ab + ab + 2b^2)$$

$$= (a+b)[2a(a+2b) + b(a+2b)] = (a+b)(2a+b)(a+2b)$$

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $BC = 2a$, M là trung điểm của BC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh rằng tích $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

c) Qua M kẻ MH vuông góc với DE ($H \in DE$). Chứng minh rằng khi D và E thay đổi trên cạnh AB và AC thì MH không đổi.

Lời giải

a) Chứng minh rằng tích $BD \cdot CE$ không đổi.

$$\text{Ta có } \widehat{D_1} + \widehat{BMD} = 180^\circ - \widehat{B}$$

$$\widehat{EMC} + \widehat{BMD} = 180^\circ - \widehat{DME}$$

$$\text{Mà } \widehat{DME} = \widehat{B} \text{ nên } \widehat{D_1} = \widehat{EMC} \quad (1)$$

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CEM$ có:

$$\widehat{B} = \widehat{C} \quad (\text{Vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

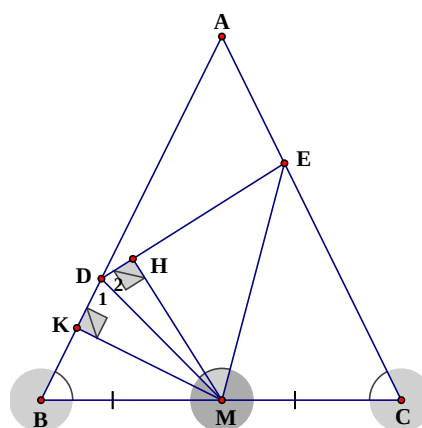
$$\widehat{D_1} = \widehat{EMC} \quad (\text{cmt})$$

Do đó $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE}$$

$$\Rightarrow BD \cdot CE = CM \cdot BM = a^2$$

Suy ra: $BD \cdot CE$ không đổi.



b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

Vì $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{BM}{CE} = \frac{MD}{EM} \Rightarrow \frac{CM}{CE} = \frac{MD}{EM} \Rightarrow \frac{DM}{CM} = \frac{EM}{EC}$$

Xét $\triangle MDE$ và $\triangle CME$ có:

$$\frac{DM}{CM} = \frac{EM}{EC} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{DME} = \widehat{C} (= \widehat{B})$$

Do đó $\triangle MDE \sim \triangle CME$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{EMC} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

Suy ra DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$

c) Chứng minh rằng khi D và E thay đổi trên cạnh AB và AC thì MH không đổi.

Kẻ $MK \perp AB$ ($K \in AB$)

Xét $\triangle HDM$ và $\triangle KDM$ có:

$$\widehat{MHD} = \widehat{MKD} (= 90^\circ), DM \text{ là cạnh chung, } \widehat{D_1} = \widehat{D_2} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle HDM = \triangle KDM$ (ch-gn)

Suy ra $MH = MK$

Mà MK không đổi nên MH không đổi khi D và E thay đổi trên cạnh AB và AC

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN HỒNG LĨNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Thời gian làm bài: 120 phút

I. PHẦN GHI KẾT QUẢ (10 điểm). (Thí sinh chỉ ghi kết quả)

Câu 1: Cho biết $a - b = 8$. Tính giá trị của biểu thức: $M = a(a + 2) + b(b - 2) - 2ab$

Câu 2: Tìm a và b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ thì dư 7, chia cho $x - 3$ thì dư -5

Câu 3: Phân tích đa thức $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ thành nhân tử

Câu 4: Tìm tập nghiệm của phương trình: $(x + 5)^2 - (x + 1)^2 = 64$

Câu 5: Cho $(a - 1)(b - 2)(c - 3) = 100$ và $a + b + c = 6$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (a - 1)^3 + (b - 2)^3 + (c - 3)^3$

Câu 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - 2x + y = 13$

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$

Câu 8: Tìm độ dài ba cạnh (là số nguyên) của tam giác vuông biết số đo chu vi bằng số đo diện tích

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông cân tại B , M là trung điểm cạnh BC và N là điểm nằm trên cạnh CA sao cho BN vuông góc với AM . Biết $CN = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài cạnh AB

Câu 10: Cho tam giác ABC , E là điểm nằm trên cạnh BC (E nằm giữa B và C). Qua E kẻ $ED \parallel AB$, $EK \parallel AC$ (D thuộc AC ; K thuộc AB). Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích các tam giác CDE và BEK lần lượt là 16 cm^2 và 25 cm^2

II. PHẦN TỰ LUẬN. (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

Câu 11: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$ ($x \neq 0, x \neq -1, x \neq 2$)

a) Rút gọn A

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Câu 12: (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF , gọi H là trực tâm, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC , đường thẳng qua M vuông góc với AC đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt nhau tại O .

a) Chứng minh $\triangle BDA$ đồng dạng với $\triangle FBC$, $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle DBF$,

b) Chứng minh: $AH = 2ON$

c) Khi $AH = OA$, tính góc BAC

Câu 13: (2,0 điểm)

a) Cho a, b là các số thực dương khác nhau. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$

b) Cho $A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}$ Chứng minh rằng $A > 1$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN HỒNG LĨNH

Năm học: 2018-2019

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I: (10 ĐIỂM)

Câu 1: Cho biết $a - b = 8$. Tính giá trị của biểu thức: $M = a(a+2) + b(b-2) - 2ab$

$$M = a(a+2) + b(b-2) - 2ab = (a-b)^2 + 2(a-b) = 8^2 + 2.8 = 80$$

Câu 2: Tìm a và b sao cho $f(x) = x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5

$$\text{Ta có } f(-1) = 7, f(3) = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1) + (-a) + b = 7 \\ 27 + 3a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 8 \\ 3a + b = -32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -2 \end{cases}$$

Câu 3: Phân tích đa thức $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ thành nhân tử

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 &= 2x^3 + 2x^2 - 7x^2 - 7x + 3x + 3 = (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 2(x-1)\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] \\ &= (x-1)(x-3)(2x-1) \end{aligned}$$

Câu 4: Tìm tập nghiệm của phương trình: $(x+5)^2 - (x+1)^2 = 64$

$$(x+5)^2 - (x+1)^2 = 64 \Leftrightarrow (x+5+x+1)(x+5-x-1) = 64$$

$$\Leftrightarrow 8(x+3) = 64 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy } S = \{5\}$$

Câu 5: Cho $(a-1)(b-2)(c-3) = 100$ và $a+b+c = 6$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = (a-1)^3 + (b-2)^3 + (c-3)^3$$

$$\text{Đặt } a-1 = x, b-2 = y, c-3 = z \text{ ta có } x+y+z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Vậy } P = (a-1)^3 + (b-2)^3 + (c-3)^3 = 3.100 = 300$$

Câu 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $xy - 2x + y = 13$

$$xy - 2x + y = 13 \Leftrightarrow x(y-2) + y - 2 = 11 \Leftrightarrow (x+1)(y-2) = 11$$

	1		11	1
		1	1	11
	0		12	2
		3		9

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$

$$A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019 = (2x + y - 1)^2 + (3x - 2)^2 + 2014 \geq 2014$$

$$\text{Min } A = 2014 \text{ khi } x = \frac{2}{3}, y = \frac{-1}{3}$$

Câu 8: Tìm độ dài ba cạnh (là số nguyên) của tam giác vuông biết số đo chu vi bằng số đo diện tích

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác vuông là $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ Ta có:
$$\begin{cases} ab = 2(a + b + c) & (1) \\ c^2 = b^2 + a^2 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = c^2 + 4(a + b) + 4c$$

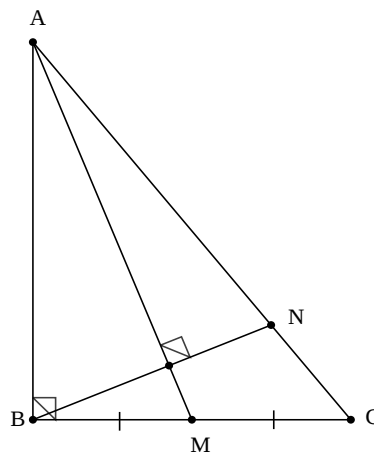
$$\Rightarrow (a + b)^2 - 4(a + b) = c^2 + 4c \Rightarrow a + b - c = 4 \Rightarrow a + b = c + 4$$

Thay vào (1) ta có $a \cdot b = 4c + 8$

$$a + b = c + 4 \Rightarrow 4a + 4b = 4c + 16 \Rightarrow 4a + 4b - ab = 8 \Rightarrow (a - 4)(b - 4) = 8$$

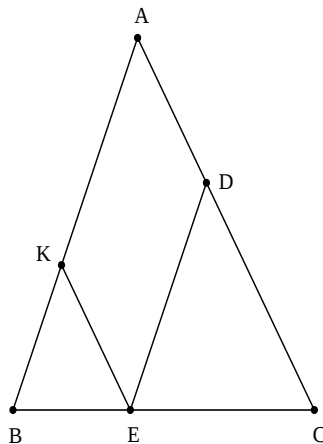
Giải phương trình nghiệm nguyên, ta được $a = 6, b = 8$

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông cân tại B , M là trung điểm cạnh BC và N là điểm nằm trên cạnh CA sao cho BN vuông góc với AM . Biết $CN = \sqrt{2}$ cm. Tính độ dài cạnh AB



Đáp số: $AB = 3\text{cm}$

Câu 10: Cho tam giác ABC , E là điểm nằm trên cạnh BC (E nằm giữa B và C). Qua E kẻ $ED \parallel AB$, $EK \parallel AC$ (D thuộc AC ; K thuộc AB). Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích các tam giác CDE và BEK lần lượt là 16 cm^2 và 25 cm^2



Đáp số: $S_{ABC} = 81 \text{ cm}^2$

PHẦN II: (10 ĐIỂM)

Câu 11: (4.0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x}$ ($x \neq 0, x \neq -1, x \neq 2$)

- Rút gọn A
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Lời giải

$$\text{a) } A = \left(\frac{x+2}{x+1} + \frac{2x}{2-x} + \frac{x^2+4x+6}{x^2-x-2} \right) : \frac{x^2+1}{2x^2-4x} \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq 2)$$

$$A = \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{2x}{x-2} + \frac{x^2+4x+6}{(x+1)(x-2)} \right) : \frac{x^2+1}{2x(x-2)}$$

$$A = \frac{x^2-4-2x(x+1)+x^2+4x+6}{(x+1)(x-2)} \cdot \frac{2x(x-2)}{x^2+1}$$

$$A = \frac{2.2x(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+1)(x^2+1)}$$

$$A = \frac{4x}{x^2+1}$$

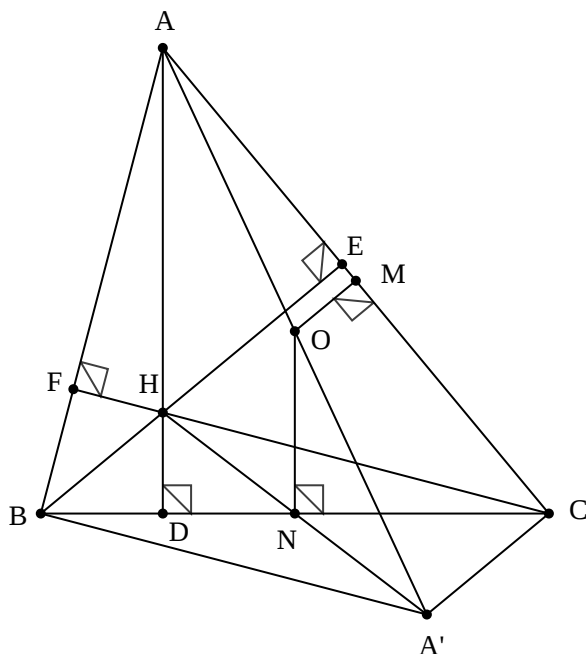
$$\text{b) Ta có } A = 2 - \frac{2(x^2-2x+1)}{x^2+1} \Rightarrow A = 2 - \frac{2(x-1)^2}{x^2+1} \leq 2$$

$$\text{Max } A = 2 \text{ Khi } x = 1$$

Câu 12: (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC , các đường cao AD, BE, CF , gọi H là trực tâm, gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và BC , đường thẳng qua M vuông góc với AC đường thẳng qua N vuông góc với BC cắt nhau tại O .

- a) Chứng minh $\triangle BDA$ đồng dạng với $\triangle FBC$, $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle DBF$,
 b) Chứng minh: $AH = 2ON$
 c) Khi $AH = OA$, tính góc BAC

Lời giải:



a) Xét $\triangle DAB$ và $\triangle FCB$ có $\widehat{ADB} = \widehat{CFB} = 90^\circ$, $\widehat{ABC}$ chung
 $\Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle FCB$ (g.g)

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBF$

có $\widehat{ABC}$ chung

$$\frac{DB}{BA} = \frac{FB}{BC} \quad (\triangle DAB \sim \triangle FCB)$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DBF \quad (\text{c.g.c})$$

b) Trên tia AO lấy điểm A' sao cho $OA = OA'$

Xét $\triangle AA'H$ có $OA = OA'$, $ON \parallel AH$ (Cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow ON$ đi qua trung điểm của $A'H$

Vậy ON là đường trung bình của $\triangle AA'H$

$$\Rightarrow ON = \frac{1}{2}AH$$

$$\Rightarrow AH = 2ON$$

c) Khi $AO = AH$ ta có $AO = OC$, $ON = \frac{1}{2}AH \Rightarrow ON = \frac{1}{2}OC$

Trong $\triangle NOC$ vuông tại N có $ON = \frac{1}{2}OC$ $\widehat{NOC} = 60^\circ$

Lại có $\widehat{NOC} = \widehat{NOB}$ (vì $\triangle OBC$ cân tại O) $\Rightarrow \widehat{COB} = 120^\circ$ mà $\widehat{BAC} = \widehat{BAO} + \widehat{CAO}$

$$= \frac{1}{2}\widehat{BOA} + \frac{1}{2}\widehat{COA} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 60^\circ$$

Vậy $AH = OA$ thì $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Câu 13: (2 điểm)

a) Cho a, b là các số thực dương khác nhau. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$

$$a, b > 0, a \neq b \Rightarrow (a-b)^2 > 0 \Rightarrow (a+b)^2 > 4ab$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} > \frac{4}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$$

b) Cho $A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}$ Chứng minh rằng $A > 1$

Áp dụng câu a ta có

$$A = \frac{1}{2019} + \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{6055}\right) + \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{6054}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4037} + \frac{1}{4038}\right)$$

$$A > \frac{1}{2019} + \left(\frac{4}{2020+6055} + \frac{4}{2021+6054} + \dots + \frac{4}{4037+4038}\right)$$

$$A > \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \dots + \frac{1}{2019} \text{ (có 2019 phân số)}$$

$$\Rightarrow A > 1$$

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN CAN LỘC
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (0,0 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$

b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{a^4 - a^5 + a - 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1}$

Bài 2: (0,0 điểm)

a) Cho các số a, b, x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$

Chứng minh rằng: $\frac{x^6}{a^3} + \frac{y^6}{b^3} = \frac{2}{(a+b)^3}$

b) Tìm các số tự nhiên x, y, z ($x > y > z$) sao cho:

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z = 2020$$

Bài 3:(0,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{137-x}{17} + \frac{150-x}{15} + \frac{159-x}{13} + \frac{164-x}{11} = 10$

b) Một người đi xe từ A đến B đúng giờ đã định. Sau khi đi 10km đầu trong 12 phút, anh ta tính ra rằng nếu tiếp tục đi với vận tốc như vậy thì sẽ đến sớm hơn dự định là 24 phút. Còn nếu giảm vận tốc đi 5km/h thì anh ta vẫn đến B sớm hơn 10 phút so với giờ đã định. Hãy tính khoảng cách AB.

Bài 4:(0,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Đường thẳng vuông góc với DE tại E cắt BC tại K. Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và K là trung điểm của HC.

Bài 5:(0,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC. Đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại D và E. Gọi M là trọng tâm của tam giác BDE và N là trung điểm của AE. Chứng minh: $\widehat{NMC} = 60^\circ$

Bài 6: (0,0 điểm)

a) Cho $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng: $f(x) \not\equiv 5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi các hệ số a, b, c, d, e đều chia hết cho 5.

b) Cho 5 đoạn thẳng có độ dài từ 10cm đến 45cm. Chứng minh rằng luôn chọn được 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng đã cho lập thành 3 cạnh của một tam giác.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN CAN LỘC**Năm học: 2018-2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (0,0 điểm)**a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$ b) Rút gọn biểu thức $B = \frac{a^4 - a^5 + a - 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1}$ **Lời giải**a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$

$$= (x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4) - 9x^2y^2 = (x^2 - y^2)^2 - (3xy)^2 = (x^2 + 3xy - y^2)(x^2 - 3xy - y^2)$$

b) Ta có $B = \frac{a^4 - a^5 + a - 1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1}$ (ĐK: $a \in \mathbb{R}$)

$$B = \frac{-a^4(-1+a) + a - 1}{a^4 - a^3 + a^2 + a^2 - a + 1} = \frac{(a-1)(1-a^4)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{(a-1)(1-a^2)(1+a^2)}{(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)} = \frac{-a^3 + a^2 + a - 1}{a^2 - a + 1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-a^3 + a^2 + a - 1}{a^2 - a + 1}$$

Bài 2: (0,0 điểm)a) Cho các số a, b, x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$ Chứng minh rằng: $\frac{x^6}{a^3} + \frac{y^6}{b^3} = \frac{2}{(a+b)^3}$ b) Tìm các số tự nhiên x, y, z ($x > y > z$) sao cho:

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z = 2020$$

Lời giảia) Từ giả thiết $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \neq 0; a+b \neq 0 \\ \frac{bx^4 + ay^4}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)(bx^4 + ay^4) = ab \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2y^4 + b^2x^4 + abx^4 + aby^4 = ab$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2y^4 + b^2x^4 + ab(x^4 + y^4 - 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2y^4 + b^2x^4 - 2abx^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0 \Leftrightarrow ay^2 = bx^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b} \quad (\text{Do } x^2 + y^2 = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^6}{a^3} = \frac{y^6}{b^3} = \frac{1}{(a + b)^3} \Rightarrow \frac{x^6}{a^3} + \frac{y^6}{b^3} = \frac{2}{(a + b)^3} \quad (\text{đpcm})$$

b) Ta có : $xyz - xy - yz - zx + x + y + z = 2020$

$$\Leftrightarrow (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + z - 1 = 2019$$

$$\Leftrightarrow xy(z - 1) - y(z - 1) - x(z - 1) + z - 1 = 2019$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(xy - y - x + 1) = 2019$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 2019 \quad (1)$$

Mà $x, y, z \in \mathbb{N}; x > y > z \Rightarrow x - 1 > y - 1 > z - 1 \geq -1 \quad (2)$

$$\text{Từ (1) \& (2)} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 673 \\ y - 1 = 3 \\ z - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 674 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \quad (T / M)$$

Vậy $(x; y; z) = (674; 4; 2)$

Bài 3: (0,0 điểm)

a) Giải phương trình : $\frac{137 - x}{17} + \frac{150 - x}{15} + \frac{159 - x}{13} + \frac{164 - x}{11} = 10$

b) Một người đi xe từ A đến B đúng giờ đã định. Sau khi đi 10km đầu trong 12 phút, anh ta tính ra rằng nếu tiếp tục đi với vận tốc như vậy thì sẽ đến sớm hơn dự định là 24 phút. Còn nếu giảm vận tốc đi 5km/h thì anh ta vẫn đến B sớm hơn 10 phút so với giờ đã định. Hãy tính khoảng cách AB.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{137 - x}{17} + \frac{150 - x}{15} + \frac{159 - x}{13} + \frac{164 - x}{11} = 10$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{137 - x}{17} - 1\right) + \left(\frac{150 - x}{15} - 2\right) + \left(\frac{159 - x}{13} - 3\right) + \left(\frac{164 - x}{11} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{120 - x}{17} + \frac{120 - x}{15} + \frac{120 - x}{13} + \frac{120 - x}{11} = 0$$

$$\Leftrightarrow (120 - x)\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{15} + \frac{1}{13} + \frac{1}{11}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 120 - x = 0 \left(\text{vì } \frac{1}{17} + \frac{1}{15} + \frac{1}{13} + \frac{1}{11} \neq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = 120$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{120\}$

$$b) \text{Đổi } 12' = \frac{1}{5}h; 24' = \frac{2}{5}h; 10' = \frac{1}{6}h;$$

Gọi khoảng cách từ A đến B là $x(km)$. DK $x > 10$. Khi đó

$$\text{Vận tốc xe đi } 10km \text{ đầu trong } 12 \text{ phút là: } 10 : \frac{1}{5} = 50(km/h)$$

Quãng đường còn lại xe đi với vận tốc giữ nguyên là $x - 10 km$.

$$\text{Thời gian xe đi hết quãng đường còn lại khi giữ nguyên vận tốc là: } \frac{x-10}{50}(h)$$

$$\text{Thời gian xe đi hết quãng đường còn lại khi giảm vận tốc } 5km/h \text{ là: } \frac{x-10}{50-5} = \frac{x-10}{45}(h)$$

$$\text{Theo bài ra ta có phương trình: } \frac{x-10}{45} - \frac{x-10}{50} = \frac{2}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{45} - \frac{x-10}{50} = \frac{7}{30}$$

$$\Leftrightarrow (x-10)\left(\frac{1}{45} - \frac{1}{50}\right) = \frac{7}{30}$$

$$\Leftrightarrow (x-10)\frac{1}{450} = \frac{7}{30}$$

$$\Leftrightarrow x-10 = \frac{7}{30} : \frac{1}{450}$$

$$\Leftrightarrow x-10 = 105$$

$$\Leftrightarrow x = 115 (T/M)$$

Vậy quãng đường AB là 115 km

Bài 4: (0,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Đường thẳng vuông góc với DE tại E cắt BC tại K. Chứng minh $AD.AB = AE.AC$ và K là trung điểm của HC.

Lời giải

Xét $\triangle ADH$ & $\triangle AHB$ có:

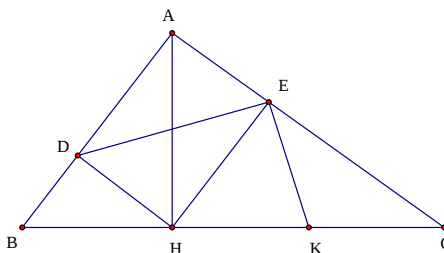
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADH} = \widehat{AHB} = 90^\circ \\ \widehat{DAH} \text{ chung} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle AHB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{AH}{AB} \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AD.AB \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } AH^2 = AE.AC \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot AB = AE \cdot AC (= AH^2)$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

Xét $\triangle ADE$ & $\triangle ACB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAE} \text{ chung} \\ \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \text{ (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{C} \text{ (góc tương ứng)}$$

$$\text{Có } \left. \begin{array}{l} HE \perp AC \\ AB \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow HE \parallel AB$$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DEH} \text{ (slt)}$$

$$\text{Mà } \widehat{DEH} + \widehat{HEK} = \widehat{DEK} = 90^\circ$$

$$\widehat{EHK} + \widehat{C} = 90^\circ \text{ (} \triangle HEC \text{ vuông tại } E \text{)}$$

$$\widehat{ADE} = \widehat{C} \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{HEK} = \widehat{EHK}$$

$$\Rightarrow \triangle KHE \text{ cân tại } K \Rightarrow KH = KE \text{ (3)}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{KEC} = \widehat{C} \Rightarrow \triangle KEC \text{ cân tại } K \Rightarrow KC = KE \text{ (4)}$$

$$\text{Từ (3) \& (4)} \Rightarrow KH = KC \text{ (= KE)}$$

Suy ra K là trung điểm của HC .

Bài 5: (0,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC . Đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại D và E . Gọi M là trọng tâm của tam giác BDE và N là trung điểm của AE . Chứng minh: $\widehat{NMC} = 60^\circ$

Lời giải

$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ đều (gt)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB = BC \\ \widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 60^\circ \end{array} \right.$$

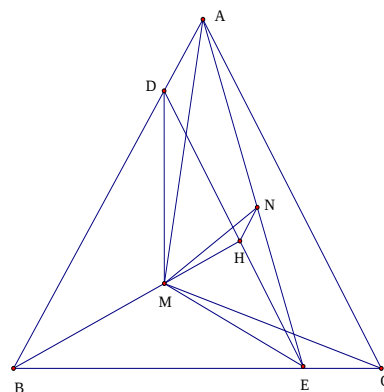
$$\text{Có } DE \parallel AC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{BDE} = \widehat{BAC} \\ \widehat{BED} = \widehat{BCA} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BDE} = \widehat{DBE} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BDE \text{ đều}$$

Mà M là trọng tâm của $\triangle BDE$ nên M đồng thời là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle BDE$

Gọi H là trung điểm của DE . Khi đó HN là đường trung bình của $\triangle ADE$



$$\Rightarrow \begin{cases} HN \parallel AD \\ HN = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{NHD} = \widehat{HDB} = 60^\circ \text{ (slt)} \\ \frac{HN}{AD} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

M là trọng tâm của của $\triangle BDE$; H là trung điểm của DE

$$\Rightarrow BM = \frac{2}{3} BH \Rightarrow \frac{MH}{BM} = \frac{1}{2}$$

Mà M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle BDE$

$$\Rightarrow \frac{MH}{ME} = \frac{MH}{MD} = \frac{MH}{MB} = \frac{1}{2}$$

Lại có M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDE$ nên

$$\begin{cases} \widehat{BDM} = \frac{1}{2} \widehat{BDE} = 30^\circ \\ \widehat{ABM} = \widehat{CBM} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \widehat{MDA} = \widehat{BDA} - \widehat{BDM} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\widehat{MHN} = \widehat{MHD} + \widehat{DHN} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MHN} \text{ (=150}^\circ\text{)}$$

Xét $\triangle MDA$ & $\triangle MHN$ có

$$\begin{cases} \widehat{MDA} = \widehat{MHN} \\ \frac{MH}{MD} = \frac{NH}{DA} \end{cases} \Rightarrow \triangle MDA \square \triangle MHN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MA} = \frac{MH}{MD} = \frac{NH}{DA} \text{ (1)}$$

Ta chứng minh được $\triangle MBA = \triangle MBC$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = MC$ (cạnh tương ứng)(2)

$$\text{Lại có } \begin{cases} AB = BC \\ BD = BE \end{cases} \Rightarrow AD = EC \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1),(2)\&(3)} \Rightarrow \frac{MN}{MC} = \frac{MH}{ME} = \frac{HN}{EC} \left(= \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \triangle MNH \square \triangle MCE \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NMH} = \widehat{EMC} \text{ (góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NMH} + \widehat{HMC} = \widehat{EMC} + \widehat{HMC} = \widehat{HME}$$

Mặt khác $\triangle MHE$ vuông tại H ($MH \perp DE$)

$$\text{Và } \widehat{MEH} = \frac{1}{2} \widehat{BEH} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ \text{ (EM là tia phân giác của } \widehat{BED} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{NMC} = \widehat{HME} = 60^\circ$$

Bài 6: (0,0 điểm)

- a) Cho $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng : $f(x) \vdots 5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi các hệ số a, b, c, d, e đều chia hết cho 5.
- b) Cho 5 đoạn thẳng có độ dài từ 10cm đến 45cm . Chứng minh rằng luôn chọn được 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng đã cho lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Lời giải

a) TH1: Nếu $a; b; c; d; e \vdots 5$ thì $ax^4 \vdots 5; bx^3 \vdots 5; cx^2 \vdots 5; dx \vdots 5; e \vdots 5 \forall x$
 $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \vdots 5 \forall x$

TH2: Ngược lại $f(x) \vdots 5 \forall x$ thì $a; b; c; d; e \vdots 5$

$$\text{Ta có } f(x) \vdots 5 \forall x \text{ nên } \begin{cases} f(0) \vdots 5 \\ f(1) \vdots 5 \\ f(-1) \vdots 5 \\ f(2) \vdots 5 \\ f(-2) \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e \vdots 5 \\ a + b + c + d + e \vdots 5 \\ a - b + c - d + e \vdots 5 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e \vdots 5 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e \vdots 5 \\ 2(a + c) \vdots 5 \\ 2(b + d) \vdots 5 \\ 8(4a + c) \vdots 5 \\ 4(4b + d) \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e \vdots 5 \\ a + c \vdots 5 \\ b + d \vdots 5 \\ 4a + c \vdots 5 \\ 4b + d \vdots 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e \vdots 5 \\ 3a \vdots 5 \\ 3b \vdots 5 \\ a + c \vdots 5 \\ b + d \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e \vdots 5 \\ a \vdots 5 \\ b \vdots 5 \\ c \vdots 5 \\ d \vdots 5 \end{cases}$$

Vậy $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \vdots 5 \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a, b, c, d, e \vdots 5$

b) Giả sử ngược lại, tồn tại 5 đoạn thẳng a, b, c, d, e có độ dài từ 10 cm đến 45 cm sao cho 3 đoạn thẳng bất kỳ trong 5 đoạn đó đều không lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Không mất tính tổng quát, giả sử $10 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq 45$

Khi đó ta có: $a + b \leq c; b + c \leq d; c + d \leq e$

Từ $10 \leq a \leq b \Rightarrow c \geq a + b \geq 10 + 10 = 20$

$\Rightarrow d \geq c + b \geq 20 + 10 = 30$

$\Rightarrow e \geq c + d \geq 20 + 30 = 50$ trái với giả thiết $e \leq 45$

Vậy trong 5 đoạn thẳng có độ dài từ 10 đến 45 luôn chọn được 3 trong 5 đoạn thẳng đã cho lập thành 3 cạnh của một tam giác.

===== **HẾT** =====

UBND THÀNH PHỐ CHÍ LINH
PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2018 – 2019
MÔN TOÁN 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ với $x \neq 0, x \neq -1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình sau: $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$
- b) Giải bất phương trình sau: $x^2 - 2x + 3 |x - 1| < 3$

Bài 3: (2,0 điểm)

- a) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.
- b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn: $(2014^{2014} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm nằm giữa B và C . Kẻ AN vuông góc với AM , AP vuông góc với MN (N và P thuộc đường thẳng CD).

- a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân.
- b) Chứng minh rằng: $AN^2 = NC \cdot NP$
- c) Gọi Q là giao điểm của tia AM và tia DC . Chứng minh tổng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AQ^2}$ không đổi khi điểm M thay đổi trên cạnh BC .

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho các số không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
 $Q = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI

MÔN TOÁN 8

Năm học: 2018-2019

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$ với $x \neq 0, x \neq -1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x} \quad \text{với } x \neq 0, x \neq -1. \\ &= \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - (x+1) \right) \right] : \frac{x-1}{x} = \left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right) : \frac{x-1}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy với } x \neq 0, x \neq -1 \text{ thì } A = \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{b) Ta có } A = \frac{2x}{x+1} \text{ với } x \neq 0, x \neq -1$$

$$= \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \text{ mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x-1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-1 \in U(2) \Rightarrow x-1 \in \{-2; -1; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2; 3\}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } x \neq 0, x \neq -1 \text{ ta có } x \in \{2; 3\} \text{ thì } A \in \mathbb{Z}$$

Bài 2: (2,0 điểm)

$$\text{a) Giải phương trình sau: } \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

$$\text{b) Giải bất phương trình sau: } x^2 - 2x + 3 | x - 1 | < 3$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4} \quad ((\text{ĐK: } x \in \mathbb{R}))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2+1} + \frac{2}{(x-1)^2+2} = \frac{6}{(x-1)^2+3} \quad (1)$$

Đặt $(x-1)^2+2=t, (t \geq 2)$

Khi đó phương trình (1) trở thành $\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1} \Leftrightarrow \frac{t(t+1)+2(t-1)(t+1)}{t(t-1)(t+1)} = \frac{6t(t-1)}{t(t-1)(t+1)}$

$$\Rightarrow t^2+t+2(t^2-1)=6(t^2-t) \Leftrightarrow 3t^2-7t+2=0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2-6t-t+2=0 \Leftrightarrow 3t(t+2)-(t-2)=0 \Leftrightarrow (t-2)(3t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow t-2=0 \text{ hoặc } 3t-1=0 \Leftrightarrow t=2 \text{ (thỏa mãn đk) hoặc } t=\frac{1}{3} \text{ (không thỏa mãn đk)}$$

Với $t=2$ thì $(x-1)^2+2=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn đk)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

b) Ta có: $x^2-2x+3|x-1|<3, (\text{đk: } x \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+3|x-1|<4 \quad (2)$$

Đặt $|x-1|=t \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2=t^2$

Phương trình (2) trở thành: $t^2+3t<4 \Leftrightarrow t^2+4t-t-4<0 \Leftrightarrow (t+4)(t-1)<0$

$$\Leftrightarrow t-1<0 \text{ (do } t+4 \geq 0+4>0, \forall t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow t<1 \Leftrightarrow |x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{x | 0 < x < 2\}$

Bài 3: (2,0 điểm)

a) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn: $(2014^{2014} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$.

Lời giải

Ta có $P = n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$

Mà $n \in \mathbb{N}$ nên $n^2 + 2n + 2 > n^2 - 2n + 2$ và P là số nguyên tố nên

$$n^2 - 2n + 2 = 1 (*) \text{ và } n^2 + 2n + 2 \text{ là số nguyên tố.}$$

$$(*) \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 0 \Leftrightarrow n=1$$

Thử lại với $n = 1$ thì $P = 5$ là số nguyên tố

Vậy với $n = 1$ thì P là số nguyên tố.

b) Đặt $A = 2014^{2014} + 1$; $B = n^3 + 2012n$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}$ để $A : B$ (1)

$$B = n^3 + 2012n = n^3 - n + 2013n = (n-1)n(n+1) + 2013n$$

Vì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $(n-1)n(n+1) : 6$

Mà $2013n : 3$ (do $2013 : 3$)

$$\Rightarrow B = (n-1)n(n+1) + 2013n : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A : 3$ (*)

Lại có $2014 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 2014^{2014} \equiv 1^{2014} \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A = 2014^{2014} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$\Rightarrow A \not\equiv 0 \pmod{3}$ (trái với (*)) mâu thuẫn $\Rightarrow$ giả sử là sai

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn: $(2014^{2014} + 1)$ chia hết cho $n^3 + 2012n$.

Bài 4: (3,0 điểm)

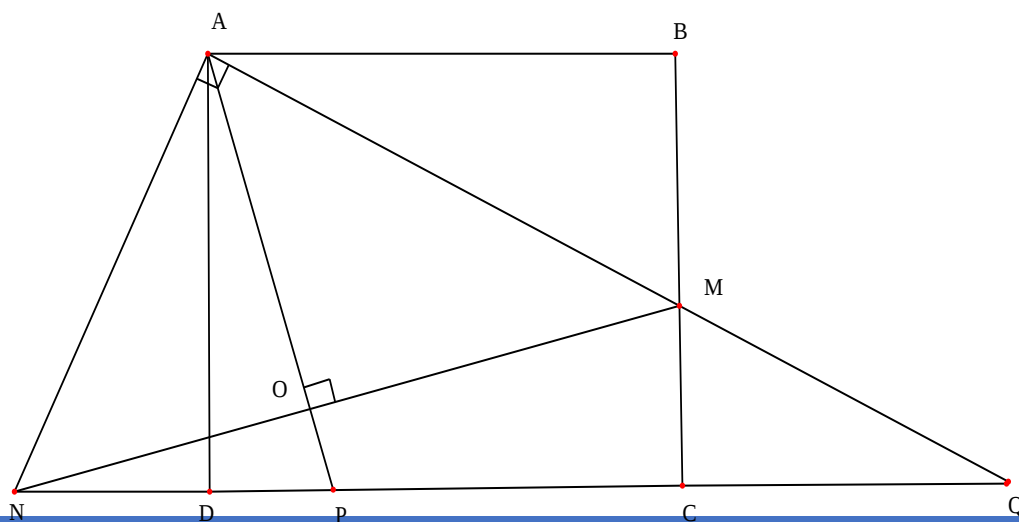
Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm nằm giữa B và C . Kẻ AN vuông góc với AM , AP vuông góc với MN (N và P thuộc đường thẳng CD).

a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân.

b) Chứng minh rằng: $AN^2 = NC \cdot NP$

c) Gọi Q là giao điểm của tia AM và tia DC . Chứng minh tổng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AQ^2}$ không đổi khi điểm M thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Ta có $ABCD$ là hình vuông (gt)

$$\Rightarrow \begin{cases} AD = AB \\ \widehat{DAB} = \widehat{B} = \widehat{CDA} = 90^\circ \end{cases} (t/c)$$

$$\Rightarrow AD \perp DC$$

$$\text{Vì } \widehat{NAD} + \widehat{DAM} = \widehat{NAM} = 90^\circ (AN \perp AM)$$

$$\widehat{BAM} + \widehat{DAM} = \widehat{DAB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NAD} = \widehat{MAB}$$

Xét $\triangle NAD$, $\triangle MAB$ ta có:

$$\widehat{NDA} = \widehat{MBA} = 90^\circ; AD = AB \text{ (cmt)}; \widehat{NAD} = \widehat{MAB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle NAD = \triangle MAB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AN$$

$$\text{Lại có: } \widehat{MAN} = 90^\circ (AN \perp AM)$$

$$\Rightarrow \triangle AMN \text{ vuông cân tại } A.$$

b) Gọi O là giao điểm của MN và $AP \Rightarrow AP \perp MN$ tại O

Xét $\triangle ANO$; $\triangle MAN$ có: $\widehat{AON} = \widehat{MAN} = 90^\circ$; $\widehat{ANO}$ chung

$$\Rightarrow \triangle ANO \sim \triangle MAN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NM} = \frac{NO}{AN} \Rightarrow AN^2 = NO \cdot NM \quad (1)$$

Xét $\triangle NOP$; $\triangle MCN$ có: $\widehat{NOP} = \widehat{NCM} = 90^\circ$; $\widehat{ONP}$ chung

$$\Rightarrow \triangle NOP \sim \triangle MCN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{NO}{NC} = \frac{NP}{NM} \Rightarrow NO \cdot NM = NP \cdot NC \quad (2)$$

Từ (1) VÀ (2) $\Rightarrow AN^2 = NP \cdot NC$ (đpcm)

c) Xét $\triangle ANQ$ có đường cao AD

$$S_{\triangle ANQ} = \frac{1}{2} DA \cdot NQ = \frac{1}{2} AN \cdot AQ \text{ (tam giác } ANQ \text{ vuông tại } A)$$

$$\Rightarrow AD \cdot NQ = AN \cdot AQ \Rightarrow \frac{NQ}{AN \cdot AQ} = \frac{1}{AD} \Rightarrow \frac{NQ^2}{AN^2 \cdot AQ^2} = \frac{1}{AD^2} \quad (3)$$

Áp dụng Pytago vào $\triangle ANQ$, ta có: $NQ^2 = AN^2 + AQ^2 \quad (4)$

$$\text{Từ (3), (4)} \Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{AN^2 + AQ^2}{AN^2 \cdot AQ^2} = \frac{1}{AQ^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Mà $AN = AM$ (cm câu a) và AD không đổi nên $\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AQ^2} + \frac{1}{AM^2}$ không đổi

Vậy tổng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AQ^2}$ không đổi khi điểm M thay đổi trên cạnh BC .

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho các số không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

Lời giải

Ta có: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ (do $x + y = 1$)

Do đó $Q = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

$$= 16x^2y^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy$$

$$= 16x^2y^2 - 2xy + 12$$

Đặt $x = \frac{1}{2} + a$, từ $x + y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - a$

Do $x, y \geq 0$ nên $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

Khi đó $Q = 16\left(\frac{1}{2} + a\right)^2\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} + a\right)\left(\frac{1}{2} - a\right) + 12$

$$= 16\left(\frac{1}{4} - a^2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4} - a^2\right) + 12$$

$$= 16\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}a^2 + a^4\right) - \frac{1}{2} + 2a^2 + 12$$

$$= 1 - 8a^2 + 16a^4 - \frac{1}{2} + 2a^2 + 12$$

$$= \frac{25}{2} + 16a^4 - 6a^2$$

$$= \frac{25}{2} + 2a^2(8a^2 - 3) \quad (1)$$

Do $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ nên $0 \leq 8a^2 \leq 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$

$$\Rightarrow 8a^2 - 3 < 0 \text{ mà } 2a^2 \geq 0, \forall a \Rightarrow 2a^2 \cdot (8a^2 - 3) \leq 0 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow Q \leq \frac{25}{2}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 2a^2 \cdot (8a^2 - 3) = 0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy GTLN của Q là $\frac{25}{2}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$.

===== **HẾT** =====

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HOÀ

KÌ THI THÀNH LẬP CÁC ĐỘI TUYỂN
HỌC SINH GIỎI LỚP 8- THCS

NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài 90 phút

Bài 1(3,0 điểm)

Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q, rút gọn Q.

b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

Bài 2(6,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$

2) Cho hai đa thức $M(x) = x^5 - 9x^3 + 6x + 1$; $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $M(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1), Q(x_2), Q(x_3), Q(x_4), Q(x_5)$

3) Cho $f(x) = x^2 + px + q$ với $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$. Chứng minh tồn tại số nguyên k để $f(k) = f(2019).f(2020)$

Bài 3(4,0 điểm)

1) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

2) Cho a,b,c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 4(5,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, gọi M là điểm bất kì trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, dựng hình vuông AMHN. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.

a) Chứng minh rằng: $BM = ND$.

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.

Bài 5(2,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Đáp án:**Bài 1(3,0 điểm)**

Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2)$

a) Tìm điều kiện xác định của Q, rút gọn Q.

* Điều kiện xác định của Q:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x^3+1 \neq 0 \\ x^2-x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

* Rút gọn Q: Với $x \neq -1, x \neq -2$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{6x+3}{x^3+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \right) : (x+2) \\ &= \frac{(x^2-x+1) + (6x+3) - 2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} : (x+2) \\ &= \frac{x^2-x+1+6x+3-2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{1}{(x+2)} \\ &= \frac{x^2+3x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{1}{(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2-x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

b) Tìm x khi $Q = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} Q = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2-x+1=3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2(\text{tm}) \\ x=-1(\text{ko tm}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy để $Q = \frac{1}{3}$ thì $x = 2$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q.

$$Q = \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\text{Ta có: } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{1}{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow Q \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } \max Q = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 2(6,0 điểm)

$$1) \text{ Giải phương trình: } \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$$

ĐKXD: $x \neq 0, x \neq -1$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2(x+1)^2} + \frac{3x^2(x+1)}{x^2(x+1)} - \frac{2x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x^2(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 3x^2(x+1) - 2x^2 = 2x^2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^4 - x^3 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3(2x+1) + (2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(1-x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 1-x^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ (tm)} \\ x = 1 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

2) Cho hai đa thức $M(x) = x^5 - 9x^3 + 6x + 1$; $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $M(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

Ta có: $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$

Vì x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $M(x)$ nên

$$M(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

$$M(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

$$M(-1) = (-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)(-1-x_4)(-1-x_5) = (-1)^5 - 9(-1)^3 + 6(-1) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)(x_5+1) = -3$$

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}-x_1\right)\left(\frac{1}{3}-x_2\right)\left(\frac{1}{3}-x_3\right)\left(\frac{1}{3}-x_4\right)\left(\frac{1}{3}-x_5\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{649}{243}$$

$$\left(x_4 - \frac{1}{3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)\left(x_2 - \frac{1}{3}\right)\left(x_3 - \frac{1}{3}\right)\left(x_5 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{649}{243}$$

$$Q(x_1) = 3(x_1+1)\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Q(x_2) = 3(x_2+1)\left(x_2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Q(x_3) = 3(x_3+1)\left(x_3 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Q(x_4) = 3(x_4+1)\left(x_4 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Q(x_5) = 3(x_5+1)\left(x_5 - \frac{1}{3}\right)$$

$$Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$$

$$= 3^5 (x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)(x_4+1)(x_5+1) \left(x_4 - \frac{1}{3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{3}\right)\left(x_2 - \frac{1}{3}\right)\left(x_3 - \frac{1}{3}\right)\left(x_5 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 243.(-3). \frac{-649}{243} = 1947$$

3) Cho $f(x) = x^2 + px + q$ với $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$. Chứng minh tồn tại số nguyên k để

$$f(k) = f(2019).f(2020)$$

$$\text{Ta có: } f(x).f(x+1) = f(x)[(x+1)^2 + p(x+1) + q]$$

$$= f(x)(x^2 + 2x + 1 + px + p + q)$$

$$= f(x)(x^2 + px + q + 2x + p + 1)$$

$$= f(x)[f(x) + 2x + p + 1]$$

$$= (f(x))^2 + 2f(x)x + pf(x) + f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= (f(x))^2 + 2f(x)x + pf(x) + (x^2 + px + q) \\
&= (f(x))^2 + 2f(x)x + x^2 + pf(x) + px + q \\
&= (f(x) + x)^2 + p(f(x) + x) + q \\
&= f(f(x) + x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(2019).f(2020) = f(f(2019) + 2019) = f(2019^2 + p.2019 + q + 2019) = f(k)$$

Với $k = 2019^2 + p.2019 + q + 2019 \in \mathbb{Z}$

Bài 3(4,0 điểm)

1) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

Ta có:

$$\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Leftrightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \\ b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \\ c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = \frac{b - c}{bc} \\ b - c = \frac{c - a}{ca} \\ c - a = \frac{a - b}{ab} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$$

$$\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a) - \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{a^2 b^2 c^2} = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a) \left(1 - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \right) = 0$$

$$\text{Vì } abc \neq \pm 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \text{ hay } a = b = c$$

2) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Rightarrow (a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a \Leftrightarrow a^2c + b^2c = ab^2 + ac^2 \Leftrightarrow a^2c + b^2c - ab^2 - ac^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ac(a - c) - b^2(a - c) = 0 \Leftrightarrow (a - c)(ac - b^2) = 0 \Rightarrow b^2 = ac \text{ (do } a \neq c)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c - b)(a + c + b)$$

Giả sử $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố thì một trong hai nhân tử $a + c - b$ hoặc $a + c + b$ bằng 1 hoặc -1

$$* a + c - b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 1, \text{ mà } a, b, c \text{ là các số nguyên khác } 0 \Rightarrow b = \pm 1, a = c = 1 \text{ trái}$$

với $a \neq c$ (loại)

$$* a + c - b = -1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -a - b - c \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 + b^2 + (c + 1)^2 = 1, \text{ mà } a, b, c \text{ là các số nguyên khác } 0 \Rightarrow b = \pm 1, a = c = -1 \text{ trái}$$

với $a \neq c$ (loại)

$$* a + c + b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a - b + c \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 1, \text{ mà } a, b, c \text{ là các số nguyên khác } 0 \Rightarrow b = \pm 1, a = c = 1 \text{ trái}$$

với $a \neq c$ (loại)

$$* a + c + b = -1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -a + b - c \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

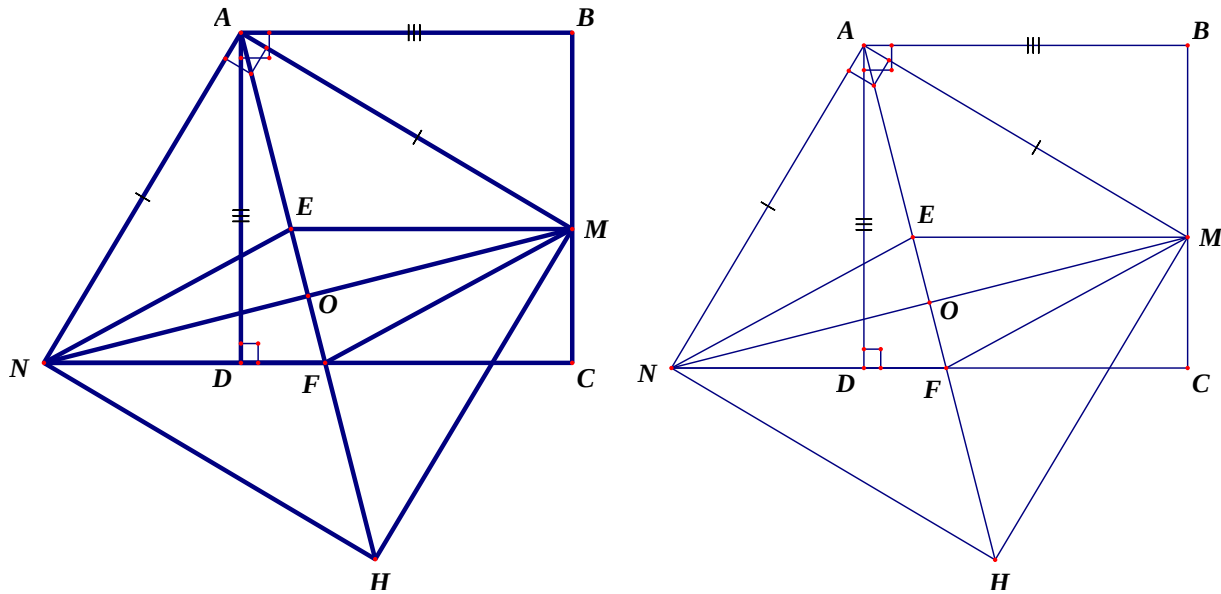
$$\Rightarrow (a + 1)^2 + b^2 + (c + 1)^2 = 1, \text{ mà } a, b, c \text{ là các số nguyên khác } 0 \Rightarrow b = \pm 1, a = c = -1 \text{ trái}$$

với $a \neq c$ (loại)

Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 4(5,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, gọi M là điểm bất kì trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, dựng hình vuông AMHN. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.



a) Chứng minh rằng: $BM = ND$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ADN$ có :

$$AB = AD(\text{gt})$$

$$\widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{MAD} \text{)}$$

$$AN = AM(\text{gt})$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ADN (\text{c.g.c})$$

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

$$\triangle ABM = \triangle ADN (\text{theo a}) \Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADN} + \widehat{ADF} = 180^\circ$$

$\Rightarrow N, D, F$ thẳng hàng.

Xét $\triangle EOM$ và $\triangle FON$ có :

$$\widehat{EOM} = \widehat{FON} = 90^\circ \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)}$$

$$OM = ON \text{ (tính chất đường chéo hình vuông)}$$

$$\widehat{EMO} = \widehat{FNO} \text{ (hai góc so le trong do } EM \parallel AB \parallel CD \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle EOM = \triangle FON (\text{g.c.g})$$

$$\Rightarrow EM = NF$$

Tứ giác EMFN có $EM \parallel NF$ và $EM = NF$ nên là hình bình hành

Lại có $EF \perp MN$ (tính chất đường chéo hình vuông)

$\Rightarrow EMFN$ là hình thoi.

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.

Vì EMFN là hình thoi nên $MF = FN$, lại có $BM = DN$ (cmt)

$$\Rightarrow \text{Chu vi } \Delta MFC = MF + MC + CF = FN + MC + CF = FD + DN + MC + CF \\ = DF + FC + BM + MC = DC + BC = 2BC$$

Do BC không đổi nên chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.

Bài 5(2,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0; a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{1+b^2} = \frac{a+ab^2-ab^2}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2}$$

$$\text{Vì } 1+b^2 \geq 2b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{2b} \Leftrightarrow -\frac{ab^2}{1+b^2} \geq -\frac{ab^2}{2b} \Leftrightarrow a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Nên } \frac{a}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ac}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\text{Lại có: } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \leq 3^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} \text{ hay } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**UBND THỊ XÃ KINH MÔN
PHÒNG GIAO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**ĐỀ GIAO LƯU OLYMPIC CẤP THỊ XÃ
NĂM HỌC: 2019 – 2020
MÔN: TOÁN - LỚP 8
Thời gian làm bài: 150 phút**

ĐỀ THI SỐ 42

Bài 1: (2,0 điểm)

1. Phân tích đa thức $2x^2 - 7x + 5$ thành nhân tử

2. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-1}{x^2+x-2} \right) : \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$ với

$x \neq 0, x \neq 1, x \neq -2, x \neq 0,5$

a) Rút gọn biểu thức Q

b) Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \left(x - \frac{x-5}{x+1} \right) = 6$

2. Xác định các số a, b biết đa thức $2x^2 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 và chia cho $x-2$ dư 21 .

Bài 3: (2,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $2n+1$ và $24n+1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $8n+3$ là hợp số.

Bài 4: (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Từ H hạ HM vuông góc với EF tại M và HN vuông góc với ED tại N .

a) Chứng minh $\triangle BED$ và $\triangle BCH$ đồng dạng.

b) Chứng minh $HM = HN$

c) Gọi I, J, Q, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên AC, AD, BE, BC . Chứng minh I, J, Q, K thẳng hàng.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $A = 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1962$.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU OLYMPIC CẤP THỊ XÃ**NĂM HỌC: 2019 – 2020****MÔN: TOÁN - LỚP 8****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (2,0 điểm)****1. Phân tích đa thức $2x^2 - 7x + 5$ thành nhân tử****2. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-1}{x^2+x-2} \right) : \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$ với** $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -2, x \neq 0,5$ **a) Rút gọn biểu thức Q****b) Tìm các giá trị nguyên của x để Q nhận giá trị nguyên.****Lời giải****1. Phân tích đa thức****Ta có:**

$$2x^2 - 7x + 5$$

$$= 2x^2 - 2x - 5x + 5$$

$$= 2x(x-1) - 5(x-1)$$

$$= (x-1)(2x-5)$$

2. Biểu thức $Q = \left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-1}{x^2+x-2} \right) : \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$ với $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -2, x \neq 0,5$ **a) $Q = \left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-1}{x^2+x-2} \right) : \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$ với $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -2, x \neq 0,5$**

$$Q = \left(\frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x-1}{x^2+x-2} \right) : \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$$

$$= \left[\frac{x+2}{(x-1)^2} - \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} \right] : \frac{2x+1}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - (x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \cdot \frac{x(x-1)^2}{2x+1}$$

$$= \frac{x^2+4x+4-x^2+2x-1}{x+2} \cdot \frac{x}{2x+1}$$

$$= \frac{6x+3}{x+2} \cdot \frac{x}{2x+1}$$

$$= \frac{3(2x+1)}{x+2} \cdot \frac{x}{2x+1}$$

$$= \frac{3x}{x+2}$$

b) Ta có $Q = \frac{3x}{x+2} = \frac{3x+6-6}{x+2} = 3 - \frac{6}{x+2}$

Để Q nhận giá trị nguyên thì $6 \mid (x+2)$

Suy ra $x+2 \in U(6)$

$$x+2 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$$

$$x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 0; 1; 4\}$$

Mà $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -2, x \neq 0, 5$

$$\text{Nên } x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 4\}$$

Vậy $x \in \{-8; -5; -4; -3; -1; 4\}$ thì Q nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \left(x - \frac{x-5}{x+1}\right) = 6$

2. Xác định các số a, b biết đa thức $2x^2 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 và chia cho $x-2$ dư 21 .

Lời giải

1. Giải phương trình: $\frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \left(x - \frac{x-5}{x+1}\right) = 6$

ĐKXD: $x \neq -1$

$$\frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \left(x - \frac{x-5}{x+1}\right) = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \left(\frac{x(x+1)-x+5}{x+1}\right) = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+5}{x+1} = 6$$

$$\Rightarrow -x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 25x = 6x^2 + 12x + 6$$

$$\Leftrightarrow -x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 13x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(TM) \\ x=2(TM) \\ x=3(TM) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm

$$S = \{1; 2; 3\}$$

2. Xác định các số a, b biết đa thức $2x^2 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 và chia cho $x-2$ dư 21 .

Đặt $f(x) = 2x^2 + ax + b$

$$f(x) \text{ chia cho } x+1 \text{ dư } -6 \text{ và chia cho } x-2 \text{ dư } 21 \text{ ta có } \begin{cases} f(-1) = -6 \\ f(2) = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2.(-1)^2 + a.(-1) + b = -6 \\ 2.2^2 + a.2 + b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = -8 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $a = 7, b = -1$ thì đa thức $2x^2 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6 và chia cho $x - 2$ dư 21 .

Bài 3: (2,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.
2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $2n + 1$ và $24n + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $8n + 3$ là hợp số.

Lời giải

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.

Ta có $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + 2y^2 - y + 2xy - x = -3$$

$$\Leftrightarrow x(x + y) + y(2y - 1) + x(2y - 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow x(x + y) + (2y - 1)(x + y) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = -3$$

Do x, y là nghiệm nguyên nên $\begin{cases} x + y \in U(3) \\ x + 2y - 1 \in U(3) \end{cases}$

Ta có bảng sau

$x + y$	-1	1	-3	3
$x + 2y - 1$	3	-3	1	-1
x	-6	4	-8	6
y	5	-3	5	-3

Vậy $(x; y) \in \{(-6; 5); (4; -3); (-8; 5); (6; -3)\}$.

2. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $2n + 1$ và $24n + 1$ là số chính phương. Chứng minh rằng $8n + 3$ là hợp số.

+ Nếu $n = 3k + 1$, ta có $24n + 1 = 24(3k + 1) + 1 = 3(24k + 8) + 1$ không là số chính phương. Do đó $n = 3k + 1$ loại (1)

+ Nếu $n = 3k + 2$, ta có $2n + 1 = 2(3k + 2) + 1 = 3(2k + 1) + 1$ không là số chính phương.

Do đó $n = 3k + 2$ loại (2)

Từ (1) và (2), suy ra $n = 3k$, ta có $\Rightarrow 8n : 3 \Rightarrow (8n + 3) : 3$ (3)

Do đó $n > 1 \Rightarrow 8n + 3 > 3$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $8n + 3$ là hợp số.

Vậy n là số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $2n + 1$ và $24n + 1$ là số chính phương thì $8n + 3$ là hợp số.

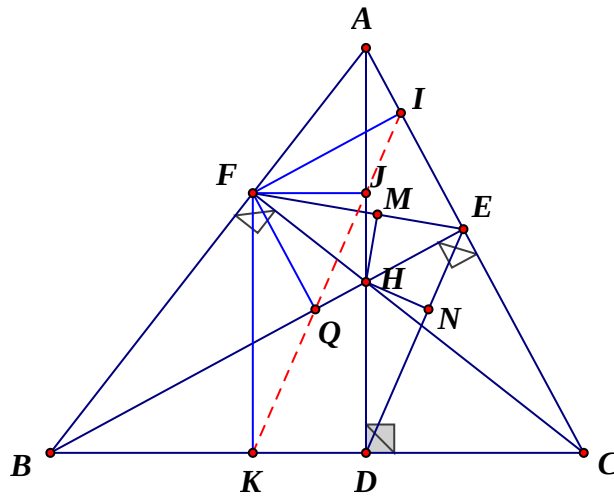
Bài 4: (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Từ H hạ HM vuông góc với EF tại M và HN vuông góc với ED tại N .

a) Chứng minh $\triangle BED$ và $\triangle BCH$ đồng dạng.

b) Chứng minh $HM = HN$

c) Gọi I, J, Q, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên AC, AD, BE, BC . Chứng minh I, J, Q, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét $\triangle BDH$ và $\triangle BEC$ có:

$\widehat{B}$ là góc chung

$$\widehat{BDH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle BDH \sim \triangle BEC$ (th3)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{BD}{BH} = \frac{BE}{BC}$$

Xét $\triangle BED$ và $\triangle BCH$ có:

$\widehat{B}$ là góc chung

$$\frac{BD}{BH} = \frac{BE}{BC} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle BED \sim \triangle BCH$ (th2).

b) Xét $\triangle BFH$ và $\triangle CEH$ có:

$$\widehat{BFH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$$

$$\widehat{BHF} = \widehat{CHE} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle BFH \sim \triangle CEH$ (th2)

$$\Rightarrow \frac{FH}{EH} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{FH}{BH} = \frac{EH}{CH}$$

+Xét $\triangle FEH$ và $\triangle BCH$ có:

$$\widehat{FHE} = \widehat{BHC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\frac{FH}{BH} = \frac{EH}{CH} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle FEH \sim \triangle BCH$ (th2) $\Rightarrow \widehat{FEH} = \widehat{BCH}$ hay $\widehat{MEH} = \widehat{BCH}$ (1)

Lại có $\triangle BED \sim \triangle BCH$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{CBH}$ hay $\widehat{HEN} = \widehat{BCH}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{HEN}$

+Xét $\triangle MHE$ và $\triangle NHE$ có:

$$\widehat{HME} = \widehat{HNE} = 90^\circ$$

HE: cạnh chung

$$\widehat{MEH} = \widehat{NEH} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle MHE = \triangle NHE$ (c.h-g.n) $\Rightarrow HM = HN$

$$\text{c) Do } FI \perp AC, QE \perp AC \Rightarrow FI \parallel BE \Rightarrow \frac{AI}{IE} = \frac{AF}{FB} \quad (3)$$

$$\text{Do } FJ \perp AD, BC \perp AD \Rightarrow FJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AJ}{JD} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \frac{AI}{IE} = \frac{AJ}{JD} \Rightarrow IJ \parallel ED \quad (5)$$

$$\text{Do } FI \perp AC, HE \perp AC \Rightarrow FI \parallel HE \Rightarrow \frac{IE}{EC} = \frac{FH}{HC} \quad (6)$$

$$\text{Do } FI \perp AC, HE \perp AC \Rightarrow FI \parallel HE \Rightarrow \frac{IE}{EC} = \frac{FH}{HC} \quad (7)$$

$$\text{Từ (6) và (7) suy ra } \frac{IE}{EC} = \frac{KD}{KC} \Rightarrow IK \parallel ED \quad (8)$$

$$\text{Do } FK \parallel AD \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{KD}{BK} \quad (9)$$

$$\text{Do } FQ \perp EB, AC \perp EB \Rightarrow FQ \parallel AC \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{QE}{BQ} \quad (10)$$

$$\text{Từ (9) và (10) suy ra } \frac{QE}{BQ} = \frac{KD}{BK} \Rightarrow QK \parallel ED \quad (11)$$

Từ (5), (8), (11) suy ra I, J, Q, K thẳng hàng.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $A = 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1962$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

Mặt khác $(a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} A &= 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1962 \\ &= 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5 \left(\frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \right)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1962 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5}{2(a^2 + b^2 + c^2)} - \frac{5}{2} + 1962 \\
&= 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5}{2(a^2 + b^2 + c^2)} + 1959,5 \\
&= \frac{45}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5}{2(a^2 + b^2 + c^2)} + 1959,5 \\
&\geq 2\sqrt{\frac{45}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{5}{2(a^2 + b^2 + c^2)}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1959,5 \\
&= 2 \cdot \frac{15}{2} + \frac{1}{2} + 1959,5 \\
&= 1975
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ \frac{45(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{5}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Vậy với a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 24(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{5(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 1962$ là 1975.

===== **Hết** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN THANH TRÌ
TRƯỜNG THCS
ĐỀ THI HSG SỐ 45

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH NĂNG KHIẾU
MÔN TOÁN
NĂM HỌC: 2019 – 2020
Thời gian làm bài: 120 phút
Ngày kiểm tra 04/7/2020

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + x^2 + 1$
2. Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$.

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 330$.
2. Cho phương trình: $\frac{x+a}{x+2} + \frac{x-2}{x-a} = 2(*)$.
 - a) Giải phương trình $(*)$ khi $a = -1$.
 - b) Tìm giá trị của a để $x=1$ là nghiệm của phương trình $(*)$.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Giả sử a, b, c là ba số đôi một khác nhau và $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.

2. Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên thỏa mãn: $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương thì n chia hết cho 24.
2. Chứng minh rằng nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì $a+b+c=0$.

Bài 5: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: Các tam giác ABC, AEF đồng dạng.
- b) Chứng minh: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
- c) Chứng minh: $BF \cdot BA + CE \cdot CA = BC^2$.
- d) Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng qua H vuông góc MH cắt AB, AC lần lượt tại N, K . Chứng minh: Tam giác MNK cân.

Bài 6: (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y, z sao cho: $x + y + z = xyz$.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH NĂNG KHIẾU MÔN TOÁN**TRƯỜNG THCS THANH TRÌ****Năm học: 2019-2020****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)**

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + x^2 + 1$.
2. Phân tích đa thức thành nhân tử: $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$.

Lời giải

1. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.
2. $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = xy(x-y) - yz(x-y) - yz(z-x) + zx(z-x)$
 $= y(x-y)(x-z) + z(z-x)(x-y) = (x-y)(x-z)(y-z)$.

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 330$.
2. Cho phương trình: $\frac{x+a}{x+2} + \frac{x-2}{x-a} = 2 (*)$.
 a) Giải phương trình (*) khi $a = -1$.
 b) Tìm giá trị của a để $x = 1$ là nghiệm của phương trình (*).

Lời giải

1. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 330$
 $\Leftrightarrow (12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4) = 7920$ (Nhân cả hai vế với 24)
 $\Leftrightarrow (144x^2 - 60x + 4)(144x^2 - 60x + 6) = 7920$

Đặt: $144x^2 - 60x + 5 = y$ Ta có phương trình: $(y-1)(y+1) = 7920 \Leftrightarrow y^2 = 7921 \Leftrightarrow y = 89$ hoặc $y = -89$ Với $y = 89$, ta có: $144x^2 - 60x + 5 = 89$. Giải ra: $x = 1$ hoặc $x = \frac{-7}{12}$ Với $y = -89$, ta có: $144x^2 - 60x + 5 = -89$. Giải thích được phương trình này vô nghiệm.Kết luận: Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = \frac{-7}{12}$.**2.**

- a) Với $a = -1$, ta có phương trình: $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-2}{x+1} = 2$ (ĐK: $x \neq -2; -1$)

Giải phương trình tìm ra: $x = \frac{-3}{2}$ (TMDK)

- b) Thay $x = 1$ vào phương trình (*) ta có: $\frac{1+a}{3} + \frac{-1}{1-a} = 2$ (ĐK: $a \neq 1$)

Giải phương trình tìm ra: $a = 2$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $a = 4$ (thỏa mãn điều kiện) và kết luận.

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Giả sử a, b, c là ba số đôi một khác nhau và $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.

2. Cho các số thực dương $x; y; z$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0 &\Rightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b}{a-c} + \frac{c}{b-a} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)} \\ &\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (1) \text{ (Nhân hai vế với } \frac{1}{b-c} \text{)} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (2)$$

$$\frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ac + cb - b^2}{(a-b)(c-a)(b-c)} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được đpcm.

$$\begin{aligned} 2. \text{Đặt } P &= \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c dương dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$$

Do đó :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right) \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}. \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên thỏa mãn: $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương thì n chia hết cho 24.
2. Chứng minh rằng nếu $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c$ chia hết cho $x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ thì $a+b+c=0$.

Lời giải

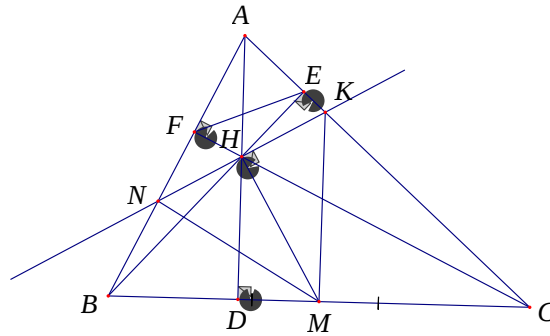
1. Vì $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương nên ta có:
 $n+1=k^2; 2n+1=m^2$ (k, m là các số tự nhiên)
 Ta thấy m là số lẻ (vì $2n+1$ là số lẻ) $\Rightarrow m=2t+1$ (t là số tự nhiên)
 $\Rightarrow m^2=4t(t+1)+1 \Rightarrow 2n+1=4t(t+1)+1 \Rightarrow n=2t(t+1) \Rightarrow n$ chẵn $\Rightarrow k$ lẻ
 Ta có: k^2, m^2 khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1.
 Mà: $k^2+m^2=3n+2$ chia 3 dư 2
 Nên k^2, m^2 chia cho 3 cùng có số dư là 1 $\Rightarrow n=m^2-k^2$ chia hết cho 3 (1)
 Ta có k lẻ $\Rightarrow k=2p+1$ (p là số tự nhiên) $\Rightarrow k^2=4p(p+1)+1=n+1$
 $\Rightarrow n=4p(p+1)$ chia hết cho 8 (2)
 Từ (1) và (2) suy ra: n chia hết cho 24.

2. Ta có: $x^4 - 4x^3 + 5ax^2 - 4bx + c = (x^3 + 3x^2 - 9x - 3)(x+m)$.
 $= x^4 + (m+3)x^3 + (3m-9)x^2 - (9m+3)x - 3m$
 Suy ra: $m+3=-4 \Rightarrow m=-7$
 $3m-9=5a \Rightarrow a=-6$
 $9m+3=4b \Rightarrow b=-15$
 $c=-3m \Rightarrow c=21$
 Vậy $a+b+c=0$.

Bài 5: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

- a) Chứng minh: Các tam giác ABC, AEF đồng dạng.
- b) Chứng minh: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
- c) Chứng minh: $BF \cdot BA + CE \cdot CA = BC^2$.
- d) Gọi M là trung điểm của BC Đường thẳng qua H vuông góc MH cắt AB, AC lần lượt tại N, K . Chứng minh: Tam giác MNK cân.

Lời giải



a) Vẽ hình đúng đến câu a

Chứng minh đúng: $\triangle AEB \square \triangle AFC$. Suy ra: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

Chứng minh đúng: $\triangle ABC \square \triangle AEF$

b) Chỉ ra được: $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$ đủ căn cứ

Tương tự: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$

Suy ra: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1$.

c) CMTT câu a, chỉ ra được $\triangle BDF$ đồng dạng $\triangle BAC$

Suy ra $\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow BF \cdot BA = BD \cdot BC$

Tương tự $CE \cdot CA = CD \cdot BC$

Cộng vế với vế của hai đẳng thức ta được:

$$BF \cdot BA + CE \cdot CA = CD \cdot BC + BD \cdot BC = (CD + DB) \cdot BC = BC^2$$

d) Chứng minh được $\widehat{BAH} = \widehat{BCH}$ (Cùng phụ $\widehat{ABC}$)

Chứng minh được $\widehat{ANH} = \widehat{CHM}$ (Cùng phụ $\widehat{NHF}$)

Suy ra: $\triangle ANH$ đồng dạng $\triangle CHM$ (g - g)

Suy ra: $\frac{NH}{HM} = \frac{AH}{CM}$, hay $\frac{NH}{AH} = \frac{HM}{CM}$ (1)

chứng minh tương tự: $\frac{KH}{AH} = \frac{HM}{BM}$ (2)

Từ (1); (2) và $CM = BM$ suy ra: $HK = NH$. Vậy $\triangle MNK$ cân (Vì MH vừa là đường cao vừa là trung tuyến).

Bài 6: (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y, z sao cho: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

a) Chia hai vế của: $x + y + z = xyz$ cho $xyz > 0$ ta có: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$

Do vai trò x, y, z như nhau nên giả sử: $1 \leq x \leq y \leq z$ ta có:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{3}{x^2} \geq 1 \Rightarrow x = 1 \text{ (vì } x \text{ nguyên dương)}$$

Thay $x = 1$ ta có: $yz = y + z + 1 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 2 \Leftrightarrow y = 2, z = 3$ (vì $y < z$)

Vậy ba số cần tìm là: 1; 2; 3.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT QUẬN QUỐC OAI
TRƯỜNG THCS ABC
ĐỀ THI THỬ SỐ 00

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 8
NĂM HỌC: 2016 – 2017
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (2,5 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

- a) Tìm TXĐ của A
- b) Rút gọn A
- c) Tính A nếu x thỏa mãn $2x^2 - 3x - 14 = 0$

Bài 2: (4,0 điểm): Giải các phương trình

- a) $\frac{5-x}{3} + \frac{3x-5}{4} = \frac{x-2}{6}$
- b) $\frac{1}{x+1} + \frac{5-x}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} - 1$
- c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 12 = 0$
- d) $(x+y)^2 = (x-1)(y+1)$

Bài 3: (1,5 điểm) Tìm các số a, b sao cho $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x + 2$ dư $-4x - 1$

Bài 4: (2,0 điểm) Một hội trường có 500 ghế ngồi, người ta xếp thành các dãy có số ghế như nhau. Nếu mỗi dãy thêm 3 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong hội trường sẽ tăng thêm 6 chiếc. Hỏi lúc đầu người ta định xếp bao nhiêu dãy ghế?

Bài 5: (3,0 điểm)

- a) Cho a, b, c, d là 4 số nguyên bất kỳ
Chứng minh $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d):12$
- b) Tìm số nguyên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố

Bài 6: (7,0 điểm) Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC, OI cắt AB tại E, cắt CD tại F

- a) Chứng minh: $\frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{LA+IB}{IC+ID}$
- b) Chứng minh: $EA = EB$
- c) Kẻ $OP \parallel AB, P \in AD$, Chứng minh: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OP}$
- d) Nếu $CD = 3AB$ và diện tích hình thang ABCD bằng $48cm^2$. Tính diện tích tứ giác IAOB

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN**MÔN TOÁN 8****NĂM HỌC: 2016 – 2017****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

Bài 1: (2,5 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right)$

- a) Tìm TXĐ của A
 b) Rút gọn A
 c) Tính A nếu x thỏa mãn $2x^2 - 3x - 14 = 0$

Lời giảia) TXĐ $x \neq \pm 2$

b) Rút gọn A

$$A = \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x-2 + \frac{10-x^2}{x+2} \right) = \frac{x-2x-4+x-2}{(x-2)(x+2)} : \frac{x^2-4+10-x^2}{x+2}$$

$$= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{-1}{x-2}$$

Vậy $A = \frac{-1}{x-2}$ với $x \neq \pm 2$

c) Ta có

$$2x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 4x - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x-7) + 2(2x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-7)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

Với $x = \frac{7}{2}$ ta có $A = \frac{-1}{\frac{7}{2}-2} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

Với $x = 2$ không thỏa mãn điều kiện xác định

Vậy $A = -\frac{2}{3}$ khi $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 14 = 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$

Bài 2: (4,0 điểm) Giải các phương trình

a) $\frac{5-x}{3} + \frac{3x-5}{4} = \frac{x-2}{6}$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{5-x}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} - 1$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 12 = 0$

d) $(x+y)^2 = (x-1)(y+1)$

Lời giải**a)**

$$\frac{5-x}{3} + \frac{3x-5}{4} = \frac{x-2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20-4x+9x-15}{12} = \frac{2x-4}{12}$$

$$\Leftrightarrow 5x+5-2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow 3x=-9$$

$$\Leftrightarrow x=-3$$

$$\text{Vậy } S = \{-3\}$$

b)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{5-x}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} - 1 \quad \text{dk } x \neq -1; x \neq 2$$

$$\Rightarrow x-2 + (5-x)(x+1) = 3 - (x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x-2+5+4x-x^2-3+x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x=2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

c)

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 8x + 3x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) - 2x(x-4) + 3(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ x^2-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ (x-1)^2+2=0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}$$

d)

$$(x+y)^2 = (x-1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = xy + x - y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - xy - x + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \\ (y+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (1; -1)$

Bài 3: (1,5 điểm) Tìm các số a, b sao cho $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x + 2$ dư $-4x - 1$

Lời giải

Ta có

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$	$x^2 - x + 2$
$x^4 - x^3 + 2x^2$	$x^2 + 3x - 2$
$3x^3 - 5x^2 + ax + b$	
$3x^3 - 3x^2 + 6x$	
$-2x^2 + (a-6)x + b$	
$-2x^2 + 2x - 4$	
$(a-8)x + b + 4$	

Vì $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x + 2$ dư $-4x - 1$ nên

$$(a-8)x + b + 4 = -4x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-8 = -4 \\ b+4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$ thì $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho $x^2 - x + 2$ dư $-4x - 1$

Bài 4: (2,0 điểm) Một hội trường có 500 ghế ngồi, người ta xếp thành các dãy có số ghế như nhau. Nếu mỗi dãy thêm 3 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong hội trường sẽ tăng thêm 6 chiếc. Hỏi lúc đầu người ta định xếp bao nhiêu dãy ghế?

Lời giải

Gọi x là số dãy ghế lúc đầu người ta định xếp ($x \in \mathbb{N}^*; x > 3$)

Số ghế trên một dãy lúc đầu là $\frac{500}{x}$ (chiếc)

Vì mỗi dãy thêm 3 ghế và bớt đi 3 dãy thì số ghế trong hội trường sẽ tăng thêm 6 chiếc ta có phương trình

$$\left(\frac{500}{x} + 3\right)(x-3) = 500 + 6$$

$$\Leftrightarrow 500 + 3x - \frac{1500}{x} - 9 = 506$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 15x - 1500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 500 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 25)(x + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -20(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy lúc đầu người ta định xếp 25 dãy ghế

Bài 5: (3,0 điểm)

a) Cho a, b, c, d là 4 số nguyên bất kỳ

Chứng minh $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d):12$

b) Tìm số nguyên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố

Lời giải

a)

Đặt $A = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

Chia 4 số nguyên a, b, c, d cho 3 ta được 3 số dư 0; 1; 2. Theo nguyên lý DIRICHLET sẽ có 2 trong 4 số có cùng số dư khi chia cho 3 nên hiệu của hai số đó chỉ hết cho 3 hay A chia hết cho 3.

Nếu 4 số a, b, c, d có ít nhất 3 số chẵn hoặc ít nhất 3 số lẻ nên có 2 hiệu chia hết cho 2 hay A chia hết cho 4.

Nếu 4 số a, b, c, d có 2 số chẵn 2 số lẻ nên có 2 hiệu chia hết cho 2 hay A chia hết cho 4.

Do đó A luôn chia hết cho 3 và 4. Mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên A chia hết cho 12

b) Ta có

$$\begin{aligned} (n^2 - 8)^2 + 36 &= n^4 - 16n^2 + 64 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 &= n^4 + 20n^2 + 100 - 36n^2 \\ &= (n^2 + 10)^2 - 36n^2 &= (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10) \end{aligned}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$

$$\text{để } (n^2 - 8)^2 + 36 \text{ là số nguyên tố thì } \begin{cases} n^2 + 6n + 10 = 1 \\ n^2 - 6n + 10 = 1 \end{cases}$$

Mà $n^2 + 6n + 10 > n^2 - 6n + 10$ nên $n^2 - 6n + 10 = 1$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6n + 9 = 0 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$$

Với $n = 3 \Rightarrow (n^2 - 8)^2 + 36 = (3^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố

Vậy với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố

Bài 6: (7,0 điểm) Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$). Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của AD và BC , OI cắt AB tại E , cắt CD tại F

a) Chứng minh: $\frac{OA + OB}{OC + OD} = \frac{LA + IB}{IC + ID}$

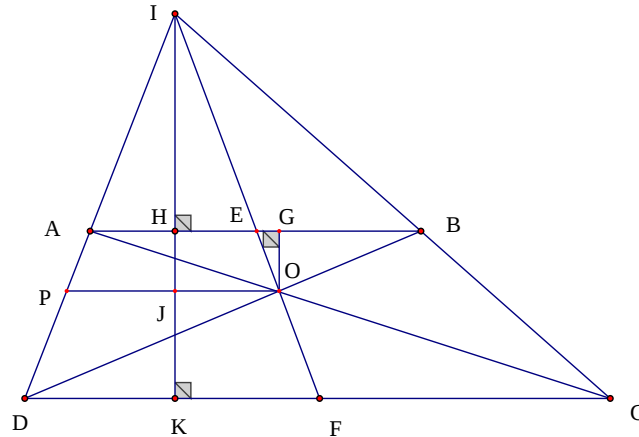
b) Chứng minh: $EA = EB$

c) Kẻ $OP \parallel AB, P \in AD$, Chứng minh: $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OP}$

d) Nếu $CD = 3AB$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng 48cm^2 . Tính diện tích tứ giác $IAOB$

Lời giải

a, Xét $\triangle IDC$ có



$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle IAB \sim \triangle IDC$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{IA+IB}{ID+IC} = \frac{AB}{CD} \quad (1)$$

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \quad (\text{Đối đỉnh})$$

$$\widehat{BAO} = \widehat{DCO} \quad (\text{So le trong})$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD \quad (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{AB}{CD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{IA+IB}{IC+ID}$

b, +, Xét $\triangle EOA$ và $\triangle FOC$ có

$$\widehat{AOE} = \widehat{FOC} \quad (\text{Đối đỉnh})$$

$$\widehat{EAO} = \widehat{FCO} \quad (\text{So le trong})$$

$$\Rightarrow \triangle EOA \sim \triangle FOC \quad (\text{g-g})$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{EA}{CF} \quad \text{mà} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{EA}{CF} = \frac{AB}{CD} \quad (3)$$

+, Xét $\triangle IFC$ có

$$EB \parallel CF \Rightarrow \triangle IEB \sim \triangle IFC$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{CF} = \frac{IB}{IC} \quad \text{mà} \quad \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{EB}{CF} = \frac{AB}{CD} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{EA}{CF} = \frac{EB}{CF} \Rightarrow EA = EB$

c, Xét $\triangle ADB$ có

$OP \parallel AB \Rightarrow \triangle DAB \sim \triangle DPO$

$$\Rightarrow \frac{OP}{AB} = \frac{DP}{DA}$$

Tương tự ta có $\frac{OP}{CD} = \frac{AP}{DA}$

$$\frac{OP}{AB} + \frac{OP}{CD} = \frac{DP}{DA} + \frac{AP}{DA} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OP}$$

d, Vẽ $IK \perp CD (K \in CD)$. Gọi H là giao điểm của IK và AB , J là giao điểm của IK và OP , vẽ $OG \perp AB (G \in AB)$ $IK \perp CD (K \in CD)$

Gọi S_{ABCD} là diện tích hình thang $ABCD$, S_{IAOB} là diện tích tứ giác $IAOB$

Xét tứ giác $HIOG$ có $\widehat{OIH} = \widehat{IHG} = \widehat{HGO} = 90^\circ$ nên $HIOG$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow HJ = OG$

$$S_{IAOB} = S_{IAB} + S_{OAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB + \frac{1}{2} OG \cdot AB = \frac{1}{2} AB \cdot (IH + OG) = \frac{1}{2} AB \cdot (IH + HJ) = \frac{1}{2} AB \cdot IJ$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} HK (AB + CD) = \frac{1}{2} HK (AB + 3AB) = \frac{1}{2} HK \cdot 4AB = 2HK \cdot AB$$

$$\text{Ta có } \frac{HJ}{HK} = \frac{AP}{AD} \text{ mà } \frac{AP}{AD} = \frac{OP}{CD} = \frac{OP}{3AB} \Rightarrow \frac{HJ}{HK} = \frac{OP}{3AB}$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{OP} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{3AB} = \frac{1}{OP} \Rightarrow \frac{4}{3AB} = \frac{1}{OP} \Rightarrow \frac{OP}{AB} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{HJ}{HK} = \frac{3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{IH}{IK} = \frac{IB}{IC} \text{ mà } \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{IH}{IK} = \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{3AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IH}{HK} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \frac{S_{IAOB}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} AB (IH + HJ)}{4AB \cdot HK} = \frac{IH + HJ}{4HK} = \frac{IH}{4HK} + \frac{HJ}{4HK}$$

$$\text{Mà } \frac{IH}{HK} = \frac{1}{2}; \frac{HJ}{HK} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{IAOB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow S_{IAOB} = \frac{3}{16} S_{ABCD} = \frac{3}{16} \cdot 48 = 9 (cm^2)$$

Vậy diện tích tứ giác $IAOB$ bằng $9 (cm^2)$

===== HẾT =====

PHÒNG GD&ĐT QUẬN CHUÔNG MỸ

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 8

ĐỀ 49

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,5 điểm)

Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-1}{3-x}$ (với $x \neq 2$ và $x \neq 3$)

a) Rút gọn biểu thức A ;

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $|2x-1| = 3$;

c) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{x^2-x+1}{x-1} \cdot A$ nhận giá trị nguyên;

d) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{x}{x+2}$.

Bài 2: (3 điểm)

1) Xác định các số a, b biết $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 , chia cho $x-2$ dư 21 .

2) Giải phương trình: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$.

Bài 3: (3 điểm)

1) Cho $M = x^5 - x$

a) Chứng minh rằng M chia hết cho 30 với mọi $x \in \mathbb{Z}$;

b) Chứng minh rằng $M+2$ không là số chính phương với mọi $x \in \mathbb{N}$.

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^2y + 2xy + y = 32x$.

Bài 4: (2,5 điểm)

1) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 2021$

Bài 5: (7 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $AB < AC$, đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC .

a) Chứng minh: $MN = AH$;

b) Chứng minh rằng: $AM \cdot AB = AN \cdot AC = AH^2$;

c) Gọi K là giao điểm của NM và BC . Chứng minh rằng $KB \cdot KC = KH^2$;

d) Gọi O là trung điểm của BC , I là giao điểm của MN và AH . Chứng minh rằng OI vuông góc với AK ;

e) $\frac{AH}{AO} = \frac{40}{41}$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

===== **HẾT** =====

HƯỚNG DẪN GIẢI**Bài 1: (4,5 điểm)**

Cho biểu thức: $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-1}{3-x}$ (với $x \neq 2$ và $x \neq 3$)

- a) Rút gọn biểu thức A ;
 b) Tính giá trị của biểu thức A khi $|2x-1| = 3$;
 c) Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{x^2-x+1}{x-1} \cdot A$ nhận giá trị nguyên;
 d) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{x}{x+2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-1}{3-x} \\ &= \frac{2x-9}{(x-2)(x-3)} - \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x-1}{x-3} \\ &= \frac{2x-9 - (x+3)(x-3) + (2x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} \\ &= \frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \end{aligned}$$

b) Ta có $A = \frac{x-1}{x-3}$ với $x \neq 2$ và $x \neq 3$

$$|2x-1| = 3 \Rightarrow 2x-1 = 3 \text{ hoặc } 2x-1 = -3$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

+ Với $x = 2$ không thỏa mãn điều kiện không thay vào A .

+ Với $x = -1$ thỏa mãn điều kiện thay vào A ta được $A = \frac{-1-1}{-1-3} = \frac{1}{2}$.

$$\text{c) } P = \frac{x^2-x+1}{x-1} \cdot A = \frac{x^2-x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x-3} = \frac{x^2-x+1}{x-3}$$

(với $x \neq 1; x \neq 2$ và $x \neq 3$)

$$P = \frac{x^2-x+1}{x-3} = x+2 + \frac{7}{x-3}$$

Để P nguyên $\Leftrightarrow \frac{7}{x-3}$ nguyên $\Leftrightarrow x-3$ là một ước của 7

$x-3$	-7	-1	1	7
x	-4	2	4	10

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x \in \{-4; 4; 10\}$ thỏa yêu cầu bài toán.

d) Từ điều kiện suy ra: $(x-1)(x+2) = x(x-3) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện)

Bài 2: (3 điểm)

1) Xác định các số a, b biết $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 , chia cho $x-2$ dư 21 .

2) Giải phương trình: $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$.

Lời giải

1) $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6

$$\Rightarrow 2x^3 + ax + b = (x+1)f(x) - 6$$

$$\Rightarrow -2 - a + b = -6 \Rightarrow b - a = -4 \quad (1)$$

$2x^3 + ax + b$ chia cho $x-2$ dư 21 .

$$\Rightarrow 2x^3 + ax + b = (x-2)g(x) + 21$$

$$\Rightarrow 16 + 2a + b = 21 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (2)$$

Từ (1) $b - a = -4 \Rightarrow b = -4 + a$ thay vào (2) $2a + b = 5$ ta được $2a - 4 + a = 5 \Rightarrow a = 3$.

Với $a = 3 \Rightarrow b = -1$

Vậy $a = 3; b = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

2) $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$.

$$\Leftrightarrow (x^2 - 9x + 14)(x^2 - 9x + 20) = 72$$

Đặt $t = x^2 - 9x + 17$

Phương trình trở thành $(t-3)(t+3) = 72 \Leftrightarrow t^2 = 81 \Leftrightarrow t = \pm 9$

Với $t = 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 17 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-8) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 8$$

Với $t = -9 \Rightarrow x^2 - 9x + 17 = -9 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 26 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} = 0$ (vô nghiệm)

Vậy $S = \{1; 8\}$

Bài 3: (3 điểm)

1) Cho $M = x^5 - x$

a) Chứng minh rằng M chia hết cho 30 với mọi $x \in \mathbb{Z}$;

b) Chứng minh rằng $M + 2$ không là số chính phương với mọi $x \in \mathbb{N}$.

2) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $x^2y + 2xy + y = 32x$.

Lời giải

1) Ta có $M = x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

$$= x(x - 1)(x + 1)(x^2 - 4 + 5)$$

$$= x(x - 1)(x + 1)(x^2 - 4) + 5x(x - 1)(x + 1)$$

$$= x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) + 5x(x - 1)(x + 1)$$

+ Ta có $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 30.

+ $x(x - 1)(x + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 $\Rightarrow 5x(x - 1)(x + 1)$

chia hết cho 30.

Suy ra $M = x^5 - x$ chia hết cho 30 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

b) Xét biểu thức $M + 2 = x^5 - x + 2$

Theo câu a ta có M luôn chia hết cho 30 với mọi x là số nguyên $\Rightarrow M$ chia hết cho 30 với mọi x là số tự nhiên.

$\Rightarrow$ Số tận cùng của M là 0.

$\Rightarrow$ Số tận cùng của $M + 2$ là 2.

Mà tất cả các số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9

Vậy $M + 2$ không là số chính phương với mọi $x \in \mathbb{N}$.

2) $x^2y + 2xy + y = 32x$.

$$\Rightarrow y(x + 1)^2 = 32x$$

$$\Rightarrow y = \frac{32x}{(x + 1)^2} \text{ (Do } x \text{ nguyên dương nên } x + 1 \neq 0)$$

Mà x và $x + 1$ là nguyên tố cùng nhau nên $\Rightarrow 32$ chia hết cho $(x + 1)^2$

$$32 = 2^5 \Rightarrow (x+1)^2 = 2^2 \text{ hoặc } (x+1)^2 = 2^4 \text{ (vì } x+1 > 1)$$

$$x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x+1 = 2^2 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 8$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = 6$$

Bài 4: (2,5 điểm)

1) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $H = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 2021$

Lời giải

1) Ta có $\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Tương tự: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{b+c}{a+b+c+d} \quad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \quad (6)$$

Cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2. \text{ (đpcm)}$$

2) Ta có $H = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 2021$

$$= (x-y-1)^2 + (x+1)^2 + 2019 \geq 2019$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = -1; y = -2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của H bằng 2019 khi $x = -1; y = -2$

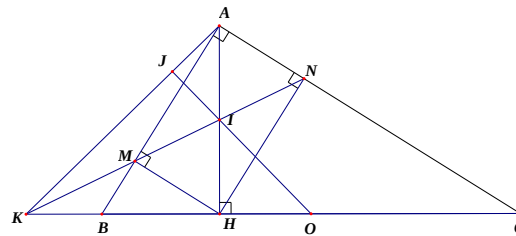
Bài 5: (7 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $AB < AC$, đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC .

- Chứng minh: $MN = AH$;
- Chứng minh rằng: $AM \cdot AB = AN \cdot AC = AH^2$;
- Gọi K là giao điểm của NM và BC . Chứng minh rằng $KB \cdot KC = KH^2$;
- Gọi O là trung điểm của BC , I là giao điểm của MN và AH . Chứng minh rằng OI vuông góc với AK ;

e) $\frac{AH}{AO} = \frac{40}{41}$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải



a) Ta có $HM \perp AB$ tại M (vì M là hình chiếu của H trên AB)

$$\Rightarrow \widehat{AMH} = 90^\circ$$

$HN \perp AC$ tại N (vì N là hình chiếu của H trên AC)

$$\Rightarrow \widehat{ANH} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $AMHN$ có $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = \widehat{MAN} = 90^\circ$

$\Rightarrow AMHN$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AH = MN \text{ (tính chất hình chữ nhật)}$$

b) Ta có $AMHN$ là hình chữ nhật (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{ANM} \text{ (tính chất hình chữ nhật)}$$

Mà $\widehat{AHM} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ với $\widehat{HAB}$)

$$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{ABH} \text{ hay } \widehat{ANM} = \widehat{ABC}$$

Xét hai tam giác ANM và ABC có

Góc A chung, $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$

Suy ra $\triangle ANM \sim \triangle ABC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC$$

$$\text{Mà } AN \cdot AC = AH^2$$

$$\text{Suy ra } AM \cdot AB = AH^2$$

c) Xét hai tam giác KHM và KNH có

$$\text{Góc } K \text{ chung, } \widehat{KHM} = \widehat{KNH} = \widehat{HAB}$$

Do đó $\triangle KHM \sim \triangle KNH$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{KH}{KN} = \frac{KM}{KN} \Rightarrow KH^2 = KM \cdot KN \quad (1)$$

Xét hai tam giác KMB và KCN có

$$\text{Góc } K \text{ chung, } \widehat{KMB} = \widehat{KCN} = \widehat{AMN}$$

Do đó $\triangle KMB \sim \triangle KCN$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{KB}{KN} \Rightarrow KM \cdot KN = KB \cdot KC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } KH^2 = KB \cdot KC$$

d) Tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AO

$$\Rightarrow OA = OB = OC \quad (\text{tính chất trung tuyến trong tam giác vuông})$$

$$\Rightarrow \triangle OAC \text{ cân tại } O \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} \quad (\text{tính chất tam giác cân})$$

$$\text{Mà } \widehat{OCA} = \widehat{AMN} \quad (\triangle ANM \text{ đồng dạng với } \triangle ABC)$$

$$\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{AMN}$$

$$\text{Mà } \widehat{ANM} + \widehat{AMN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{ANM} = 90^\circ \Rightarrow OA \perp MN \text{ hay } OA \perp KN$$

Xét tam giác KAO có

$$AH \perp KO, KN \perp OA \text{ mà } AH \text{ cắt } KN \text{ tại } I \Rightarrow I \text{ là trực tâm của } \triangle KAO \Rightarrow OI \perp AK$$

$$\text{e) } \frac{AH}{AO} = \frac{40}{41} \Rightarrow \frac{AH}{40} = \frac{AO}{41} = t$$

$$\Rightarrow AH = 40t; AO = 41t$$

Xét tam giác HAO vuông tại H ta có:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = (41t)^2 - (40t)^2 = 81t$$

$$\Rightarrow OH = 9t$$

Mà $OA = OA = OC$ (tính chất trung tuyến tam giác vuông ABC)

$$\Rightarrow OC = 41t; \Rightarrow HC = 41t + 9t = 50t$$

Xét hai tam giác HAC và ABC có

$$\widehat{AHC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

$\hat{C}$ là góc chung

Do đó $\triangle HAC \sim \triangle ABC$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{HA}{AB} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC} = \frac{40t}{50t} = \frac{4}{5}$$

===== **HẾT** =====

PGD & ĐT HN
HUYỆN SÓC SƠN

ĐỀ THI THỬ HSG TOÁN 8
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (5,0 điểm) Cho các biểu thức

$$C = \frac{x^2}{x+y-xy-y^2} - \frac{y^2}{x+y+xy+x^2} ; \quad D = \frac{x^2y^2 + x^2y^3}{1+x-y^2-xy^2}$$

- a) Tính $C - D$
b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) để $C - D = 10$

Bài 2: (4,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho số
b) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}}$

Bài 3: (4,0 điểm)

- a) Giải phương trình
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}\right) \cdot 503x = 1 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012}$$

b) Cho $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$

Bài 4: (6,0 điểm)

- a) Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , BD là đường trung tuyến. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E . Chứng minh rằng $EB = 2EC$.
b) Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ một điểm M trong tam giác vẽ $MI \perp BC$,
 $MJ \perp CA$, $MK \perp AB$ ($I \in BC$, $J \in AC$, $K \in AB$). Xác định vị trí điểm M sao cho tổng $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho các số $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN
TRƯỜNG THCS ABC
Năm học: 2020-2021
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm) Cho các biểu thức

$$C = \frac{x^2}{x+y-xy-y^2} - \frac{y^2}{x+y+xy+x^2} ; \quad D = \frac{x^2y^2 + x^2y^3}{1+x-y^2-xy^2}$$

a) Tính $C - D$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) để $C - D = 10$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \frac{x^2}{x+y-xy-y^2} - \frac{y^2}{x+y+xy+x^2} \\ &= \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} \\ &= \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y)}{(x+y)(1-y)(1+x)} = \frac{x^2 + x^3 - y^2 - y^3}{(x+y)(1-y)(1+x)} \\ &= \frac{(x+y)(x-y) + (x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)(1-y)(1+x)} \\ &= \frac{(x+y)(x-y+x^2-xy+y^2)}{(x+y)(1-y)(1+x)} \\ &= \frac{x-y+x^2-xy+y^2}{(1-y)(1+x)} \\ D &= \frac{x^2y^2 + x^2y^3}{1+x-y^2-xy^2} = \frac{x^2y^2(1+y)}{(1+x)(1-y^2)} = \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)} \\ \text{Suy ra } C - D &= \frac{x-y+x^2-xy+y^2}{(1-y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)} \\ &= \frac{x-y+x^2-xy+y^2-x^2y^2}{(1-y)(1+x)} = \frac{(1-y)(1+x)(x-y+xy)}{(1-y)(1+x)} = x-y+xy \end{aligned}$$

Vậy $C - D = x - y + xy$

b) Với $x \neq -1, y \neq \pm 1, x \neq -y$ được xác định $C - D$ được xác định

Mà $C - D = 10$ nghĩa là $x - y + xy = 10 \Leftrightarrow (x + xy) - (y + 1) = 9 \Leftrightarrow (x - 1)(1 + y) = 9$

Do $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có

$x - 1$	1	- 1	3	-	9	- 9
x	2	0	4	-	10	- 8
$y + 1$	9	- 9	3	-	1	- 1
y	8	-10	2	-	0	- 2

Các cặp số này đều thỏa mãn ĐKXD nên :

$$(x, y) = (2, 8); (0, -10); (4, 2); (-2, -4); (10, 0); (-8, -2)$$

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho số

b) Cho $a^2 + a + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}}$

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho số

$$A = 4x^4 + y^4 \text{ là một số nguyên tố.}$$

Ta có $A > 0$ với mọi x, y

$$A = 4x^4 + y^4 = (2x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = (2x^2 + y^2 - 2x^2y^2)((2x^2 + y^2 + 2x^2y^2))$$

Do A là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 + 2xy = A \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = A \\ 2x^2 + y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

Giải các trường hợp trên ta được $(x, y) = (1, 1)$

b. Cho $a^2 + a + 1 = 0$ Tính giá trị biểu thức $P = a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}}$

Ta có $a^2 + a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$

$\forall (a + \frac{1}{2})^2 \geq 0$ với mọi a

$\Rightarrow (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi a . Do đó không tìm được giá trị nào của a thỏa mãn

$a^2 + a + 1 = 0$.

Vậy biểu thức P không có giá trị

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}) \cdot 503x = 1 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012}$$

b) Cho $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$

Lời giải

a) Giải phương trình

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}) \cdot 503x = 1 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012} \\
&= 2013 + \frac{2014}{2} + \frac{2015}{3} + \dots + \frac{4023}{2011} + \frac{4024}{2012} - 2012 \\
&= \left(\frac{2013}{1} - 1 \right) + \left(\frac{2014}{2} - 1 \right) + \left(\frac{2015}{3} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{4023}{2011} - 1 \right) + \left(\frac{4024}{2012} - 1 \right) \\
&= \frac{2012}{1} + \frac{2012}{2} + \frac{2012}{3} + \dots + \frac{2012}{2011} + \frac{2012}{2012} \\
&= 2012 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} \right)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} \right) \cdot 503x = 2012 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} \right) \\
& \Leftrightarrow 503x = 2012 \\
& \Leftrightarrow x = 4
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{ 4 \}$

b) Cho $(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz$

Chứng minh rằng : $x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = (x + y + z)^{2019}$

Ta có

$$\begin{aligned}
& (x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz \\
& \Leftrightarrow xy(x + y + z) - xyz + (yz + zx)(x + y + z) = 0 \\
& \Leftrightarrow xy(x + y + z - z) + (y + x)(zx + zy + z^2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (y + x)(xy + zx + zy + z^2) = 0 \\
& \Leftrightarrow (y + x)(y + z)(x + z) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Với } x = -y \text{ thì } \begin{cases} x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = (-y)^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = z^{2019} \\ (x + y + z)^{2019} = (-y + y + z)^{2019} = z^{2019} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = (x + y + z)^{2019}$$

Chứng minh tương tự như trên với trường hợp $y = -z$ và $z = -x$

Ta suy ra được điều phải chứng minh

$$\text{Vậy } x^{2019} + y^{2019} + z^{2019} = (x + y + z)^{2019}$$

Bài 4: (6,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , BD là đường trung tuyến. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại E . Chứng minh rằng $EB = 2EC$.

b) Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ một điểm M trong tam giác vẽ $MI \perp BC$,

$MJ \perp CA$, $MK \perp AB$ ($I \in BC$, $J \in AC$, $K \in AB$). Xác định vị trí điểm M sao cho tổng $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Kẻ $CF \parallel AE$ ($F \in AB$)

Khi đó ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{A_2}$)

Mặt khác $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (hai góc so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACF \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

$$\text{Mà } AD = \frac{1}{2} AC; AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$$

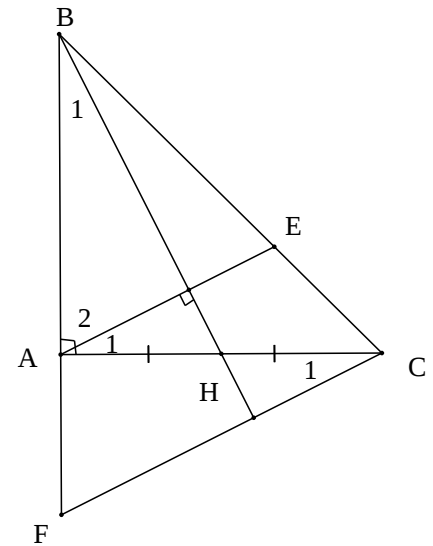
$$\Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mà } AE \parallel CF \text{ nên } \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AF} = 2$$

$$\Rightarrow BE = 2EC$$

b) Kẻ đường cao AH của tam giác vuông ABC . Qua

M kẻ $MH \parallel BC$ cắt AH tại M' .



Ta có $MI = M'H$

Tứ giác AKMJ là hình chữ nhật nên $KJ = MA$

Mặt khác $MJ^2 + MK^2 = KJ^2$ (định lý Py-ta-go)

Do đó $MI^2 + MJ^2 + MK^2 = MI^2 + MA^2$

Có $M'A^2 \leq MA^2$

$$\Rightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 \geq M'H^2 + M'A^2$$

$$\Rightarrow M'H^2 + M'A^2 \geq 2M'H.M'A$$

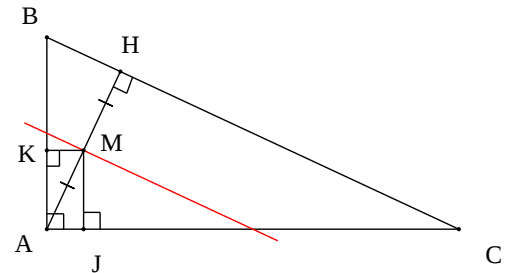
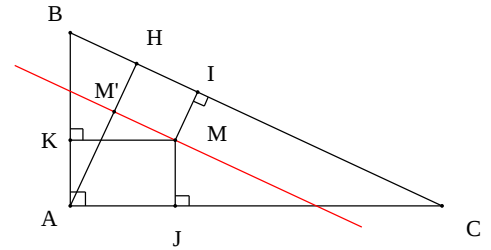
$$\Rightarrow 2(M'H^2 + M'A^2) \geq M'H^2 + M'A^2 + 2M'H.M'A$$

$$\Rightarrow 2(M'H^2 + M'A^2) \geq (M'H + M'A)^2 = AH^2$$

$$\Rightarrow M'H^2 + M'A^2 \geq \frac{1}{2}AH^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $M'H = M'A$

Vậy $MI^2 + MJ^2 + MK^2$ có giá trị nhỏ nhất khi M là trung điểm của đường cao AH trong tam giác ABC.



Bài 5: (1,0 điểm) Cho các số $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Lời giải

Cho các số $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{x^2 + y^2}{4xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) + \frac{3(x^2 + y^2)}{4xy}$$

$$\text{Do } x > 0, y > 0 \text{ nên } xy > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4xy} > 0; \frac{xy}{x^2 + y^2} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$A \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4xy} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}} + \frac{3(x^2 + y^2)}{4\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 0$

Bất đẳng thức sử dụng. $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ và $a + b \geq 2ab$

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$
2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì số $n^4 + 4$ là hợp số

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho $3a^2 + 3b^2 = 10ab$ và $b > a > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$
2. Cho $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Chứng minh rằng $1 - ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $2xy + x + y = 83$
2. Tìm x, y biết $\frac{-9x^2 + 18x - 17}{x^2 - 2x + 3} = y(y + 4)$

Bài 4: (7,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, I là điểm bất kỳ trên cạnh AB, kẻ HI vuông góc với HK ($K \in AC$)

- a) Chứng minh $\triangle BIH \sim \triangle AKH$
- b) Chứng minh $HI \cdot BC = IK \cdot AB$
- c) Tìm vị trí điểm I trên cạnh AB để diện tích tam giác HIK đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 5: (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $\begin{cases} 2^x - 1 = y^z \\ x > 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $z = 1$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LỚP 8**Năm học: 2018-2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)****1. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$** **Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } & x^3 + 3x^2 + 6x + 4 \\
 &= x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4 \\
 &= x^2(x+1) + x(x+1) + 4(x+1) \\
 &= (x+1)(x^2 + 2x + 4)
 \end{aligned}$$

2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì số $n^4 + 4$ là hợp số**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } & n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\
 &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\
 &= (n^2 - 2n + 2) \cdot (n^2 + 2n + 2)
 \end{aligned}$$

Vì là số tự nhiên $n > 1$ nên $n^2 - 2n + 2$; $n^2 + 2n + 2$ là số tự nhiên và $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 \geq 2$ nên số $n^4 + 4$ là hợp số

Bài 2: (4,0 điểm)**1. Cho $3a^2 + 3b^2 = 10ab$ và $b > a > 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a-b}{a+b}$**

$$\text{Vì } 3a^2 + 3b^2 = 10ab \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{10}{3}ab$$

$$\text{Ta có } P = \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow P^2 = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab} = \frac{\frac{10}{3}ab-2ab}{\frac{10}{3}ab+2ab} = \frac{\frac{4}{3}ab}{\frac{16}{3}ab} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |P| = \frac{1}{2}$$

Mà $0 < a < b$ nên $a - b < 0$ và $a + b > 0 \Rightarrow P < 0$

$$\Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

Lời giải**2. Cho $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Chứng minh rằng $1 - ab$ là bình phương của một số hữu tỉ.****Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } & a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a^3b + ab^3 + 2a^2b^2) + (2a+2b) + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & ab(a+b)^2 + 2(a+b) + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + 1 - 1 + ab = 0$$

$$\Leftrightarrow [ab(a+b)+1]^2 = 1 - ab$$

Vì $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $[ab(a+b)+1]^2$ là bình phương của số hữu tỉ

Vậy $a, b \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$ thì $1 - ab$ là bình phương của số hữu tỉ

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $2xy + x + y = 83$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2xy + x + y = 83 \Leftrightarrow 4xy + 2x + 2y + 1 = 167$$

$$\Leftrightarrow 2x(2y+1) + (2y+1) = 167 \Leftrightarrow (2y+1)(2x+1) = 167$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x+1, 2y+1 \in \mathbb{Z}$ và là ước của 167

Ta có bảng

$2x+1$	1	-1	167	-167
$2y+1$	167	-167	1	-1
x	0	-1	83	-84
y	83	-84	0	-1

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $(0; 83); (-1; -84); (83; 0); (-84; -1)$

2. Tìm x, y biết $\frac{-9x^2+18x-17}{x^2-2x+3} = y(y+4)$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{-9x^2+18x-17}{x^2-2x+3} = y(y+4) \Leftrightarrow \frac{-9(x-1)^2+9-17}{(x-1)^2+2} = y^2 + 4y$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9(x-1)^2-18+10}{(x-1)^2+2} = y^2 + 4y \Leftrightarrow \frac{10}{(x-1)^2+2} = y^2 + 4y + 4 + 5 = (y+2)^2 + 5$$

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ nên } \frac{10}{(x-1)^2+2} \leq \frac{10}{2} = 5$$

$$(y+2)^2 + 5 \geq 5 \text{ với mọi } y$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \begin{cases} x-1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy với } x=1 \text{ và } y=-2 \text{ thì } \frac{-9x^2+18x-17}{x^2-2x+3} = y(y+4)$$

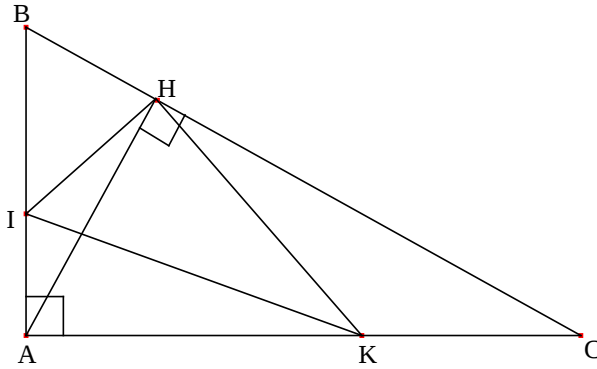
Bài 4: (7,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, I là điểm bất kỳ trên cạnh AB, kẻ HI vuông góc với HK ($K \in AC$)

a) Chứng minh $\triangle BIH \sim \triangle AKH$

b) Chứng minh $HI \cdot BC = IK \cdot AB$

c) Tìm vị trí điểm I trên cạnh AB để diện tích tam giác HIK đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải



a) Xét $\triangle BIH$ và $\triangle AKH$ có

$$\widehat{HBI} = \widehat{HAK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{C} \text{)}$$

$$\widehat{BHI} = \widehat{AHK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{IHA} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BIH \sim \triangle AKH \text{ (g.g)}$$

b) Xét $\triangle BHA$ và $\triangle IHK$ có

$$\widehat{AHB} = \widehat{IHK} = 90^\circ$$

$$\frac{BH}{AH} = \frac{IH}{KH} \text{ (Vì } \triangle BIH \sim \triangle AKH \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHA \sim \triangle IHK \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{Lại có } \triangle BHA \sim \triangle BAC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \triangle IHK \sim \triangle BAC$$

$$\Rightarrow \frac{HI}{AB} = \frac{IK}{BC} \Rightarrow HI \cdot BC = IK \cdot AB$$

c) Ta có $\triangle IHK \sim \triangle BAC$ (c/m trên)

Mà $\triangle BAC$ cố định nên H không đổi

$\Rightarrow \triangle IHK$ đồng dạng với chính nó khi I thay đổi

Đề S_{IHK} nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH \perp AB$

Vậy khi I là chân đường vuông góc hạ từ H xuống AB thì S_{IHK} nhỏ nhất

Bài 5: (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn $\begin{cases} 2^x - 1 = y^z \\ x > 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $z = 1$

Lời giải

Ta có $2^x - 1 = y^z \Rightarrow 2^x = y^z + 1$ mà $x > 1$ nên $y^z + 1$ là số chẵn $\Rightarrow y$ lẻ

Đặt $y = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Giả sử $z > 1$ khi đó có hai trường hợp

+ Trường hợp 1: z là số chẵn, đặt $z = 2m$ ta có

$$y^z + 1 = (2k + 1)^{2m} + 1 = (2q + 1)^2 + 1 = 4q^2 + 4q + 2 = 4q(q + 1) + 2$$

Vì $x > 1$ và x nguyên dương nên $x \geq 2$ nên $2^x : 4$

Mà $y^z + 1 = 4q(q + 1) + 2$ không chia hết cho 4

$\Rightarrow z$ là số chẵn là sai

+ Trường hợp 1: z là số lẻ, đặt $z = 2m + 1$ ta có

$$y^z + 1 = +1 = (y + 1)(y^{2m} - y^{2m-1} + y^{2m-2} - \dots - y + 1)$$

$\Rightarrow (y^{2m} - y^{2m-1} + y^{2m-2} - \dots - y + 1) > 1$ và là số lẻ vì nó là tổng lẻ các số lẻ

$\Rightarrow y^z + 1$ có ước lẻ lớn hơn 1

Mà 2^x không có ước lẻ lớn hơn 1 (vô lí)

Vậy giả sử $z > 1$ là sai

Mà z nguyên dương $\Rightarrow z = 1$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT BA VÌ
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2018 – 2019

Môn : Toán 8

Khóa thi ngày :10/4/2019

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

c) Tìm x để $A < \frac{1}{2}$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Xác định m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-2}{x} = 2$$

2. Giải phương trình

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 13x + 42) = 180$$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Cho a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) : 6$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{3x^2 - 14x + 17}{x^2 - 4x + 4}$$

Bài 4: (6,0 điểm) : Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kì ($CM < CD$), vẽ hình vuông CMNP (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H; MP cắt BD tại K;

a) Chứng minh : DH vuông góc với BM

b) Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

Bài 5: (1,0 điểm) Tìm các giá trị x,y nguyên dương thỏa mãn

$$x^2 - y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 8
Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A
 b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên
 c) Tìm x để $A < \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Biểu thức A xác định khi $x \neq 0; x \neq 2$

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$A = \frac{(x^2 - 2x)(x - 2) + 2.2x}{2.(x - 2).(x^2 + 4)} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$A = \frac{x^3 + 4x}{2(x - 2)(x^2 + 4x)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2}$$

$$A = \frac{x + 1}{2x}$$

b) Để $A < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{2x} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

Đổi chiều điều kiện ta có

$$x < 0 \text{ thì } A < \frac{1}{2}$$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Xác định m để phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{x + m}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2(*)$$

2. Giải phương trình

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 13x + 42) = 180$$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq -1$

$$\text{PT } (*) \Leftrightarrow x^2 + mx + x^2 - x - 2 = 2(x + 1)x$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)x = 2$$

Để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow m - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$ thì phương trình (*) vô nghiệm

2. Giải phương trình

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 13x + 42) = 180$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-6)(x-7) = 180$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x - 14) - 180 = 0$$

Đặt $x^2 - 5x - 10 = y$ ta có

$$(y+4)(y-4) - 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 196 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-14)(y+14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 14 \\ y = -14 \end{cases}$$

Khi $y = 14$ ta có $x^2 - 5x - 10 = 14$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 8 \end{cases}$$

Khi $y = -14$ ta có $x^2 - 5x - 10 = -14$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-3; 1; 4; 8\}$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $(a^3 + b^3 + c^3) : 6$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c) : 6$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{3x^2 - 14x + 17}{x^2 - 4x + 4}$$

Lời giải

1. Ta có $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a+1)(a-1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp

$$\Rightarrow a(a+1)(a-1) : 2;$$

$$a(a+1)(a-1) : 3 \text{ mà } (2, 3) = 1$$

$$\Rightarrow a(a+1)(a-1) : 6 \text{ hay } a^3 - a : 6$$

Chứng minh tương tự ta có $b^3 - b : 6; c^3 - c : 6$

$$\Rightarrow [a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)] : 6$$

$$\text{Mà } (a^3 + b^3 + c^3) : 6 \Rightarrow (a + b + c) : 6 \text{ (đpcm)}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{3x^2 - 14x + 17}{x^2 - 4x + 4}$$

ĐK: $x \neq 2$

Ta có $B = \frac{(2x^2 - 8x + 8) + (x^2 - 6x + 9)}{x^2 - 4x + 4}$

$$B = 2 + \frac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$$

Vì $(x-3)^2 \geq 0; (x-2)^2 > 0$ với mọi $x \neq 2$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{(x-2)^2} \geq 0$$

$\Rightarrow B \geq 2$..Dấu “=” xảy ra khi $x = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $B = 2$ khi $x = 3$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kì ($CM < CD$), vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H ; MP cắt BD tại K ;

a) Chứng minh: DH vuông góc với BM

b) Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$

c) Chứng minh: $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

Lời giải

a) Chứng minh $\widehat{KDM} = \widehat{KMD} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle KDM$ vuông cân tại K

$\Rightarrow KM \perp BD$

Xét $\triangle BDM$ có

$KM \perp BD; BC \perp DM$

MK cắt BC tại P

$\Rightarrow P$ là trực tâm $\triangle BDM$

$\Rightarrow DP \perp BM$ hay $DH \perp BM$

b) Ta có: $\frac{PC}{BC} = \frac{PC \cdot DM}{BC \cdot DM} = \frac{S_{\triangle PDM}}{S_{\triangle BDM}}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{PH}{DH} = \frac{S_{\triangle PBM}}{S_{\triangle BDM}}; \frac{PK}{MK} = \frac{S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle BDM}}$

$$\Rightarrow \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{PK}{MK} = \frac{S_{\triangle PDM} + S_{\triangle PBM} + S_{\triangle PBD}}{S_{\triangle BDM}} = 1$$

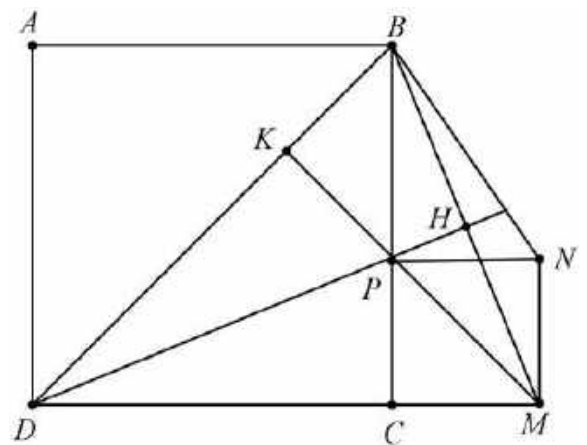
Vậy $\frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{PK}{MK} = 1$

c) Chứng minh $DM^2 = MP \cdot MK + DK \cdot DB$

+ Ta có $\triangle MCP \sim \triangle DKM$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MP} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow MP \cdot MK = MC \cdot MD(1)$$

+ Ta có $\triangle DCB \sim \triangle DKM$



$$\Rightarrow \frac{DC}{DK} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow DK.DB = DC.MD(2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MP.MK + DK.DB = MD.(MC + DC)$$

$$\text{Hay } DM^2 = MP.MK + DK.DB \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: (1,0 điểm) Tìm các giá trị x,y nguyên dương thỏa mãn

$$x^2 - y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

Lời giải

$$x^2 - y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) - (4y^2 - 12y + 9) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 - (2y-3)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (2x-1-2y+3)(2x-1+2y-3) = 8$$

$$\Leftrightarrow (2x-2y+2)(2x+2y-4) = 8$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+y-2) = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=1 \\ x+y-2=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-y+1=2 \\ x+y-2=1 \end{cases}$$

(vì x,y nguyên dương nên $x+y-2 \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ thì } x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT MỸ ĐỨC

ĐỀ THI OLYMPIC

Môn: Toán 8

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.
- Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Bài 2: (4,0 điểm)

- Giải phương trình: $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$
- Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thoả mãn $(4x+15y+1)(4^{|x|}+x^2+x+y)=305$

Bài 3: (4,0 điểm)

- Cho $B = \frac{a}{ab+a+2019} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2019c}{ac+2019c+2019}$ (các mẫu số đều khác 0)

Tính giá trị của B biết $abc = 2019$.

- Cho a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b}.$$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$, đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh AB và AC .

- Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC = AH^2$
- Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh rằng $KB \cdot KC = KH^2$.
- Gọi O là trung điểm của BC , I là giao điểm của MN và AH . Chứng minh rằng OI vuông góc với AK .
- Giả sử $\frac{AH}{OA} = \frac{40}{41}$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho $(n+1)$ và $(2n+1)$ (với $n \in \mathbb{N}$) đều là số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 24.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI ĐỀ THI OLYMPIC**PHÒNG GD&ĐT MỸ ĐỨC****Năm học: 2020-2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (5,0 điểm)**

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.
 c) Tìm x để $A < \frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Đkxđ: $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x - 2)} \right) \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$A = \frac{(x^2 - 2x)(x - 2) + 4x^2}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2}$$

$$A = \frac{x \cdot [(x - 2)^2 + 4x](x + 1)}{2(x^2 + 4)x^2}$$

$$A = \frac{(x^2 - 4x + 4 + 4x)(x + 1)}{2(x^2 + 4) \cdot x}$$

$$A = \frac{(x^2 + 4)(x + 1)}{2(x^2 + 4) \cdot x}$$

$$A = \frac{x + 1}{2x}$$

Vậy $A = \frac{x + 1}{2x}$ khi $x \neq 0, x \neq 2$.

b) Để A nguyên thì $x + 1 : 2x \Rightarrow 2(x + 1) : 2x \Rightarrow 2x + 2 : 2x \Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x$
 $\Rightarrow x = \pm 1$ (thỏa mãn đkxđ).

Với $x = 1$ thì $A = 1 \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

Với $x = -1$ thì $A = 0 \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

Vậy để A nguyên thì $x = \pm 1$.

c) Để $A < \frac{1}{3}$ thì $\frac{x + 1}{2x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x + 3}{6x} < 0$

$\Rightarrow x+3$ và x trái dấu

$$\text{Mà } x+3 > x \text{ nên } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 0$$

Vậy $-3 < x < 0$.

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

b) Tìm các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn $(4x+15y+1)(4^{|x|}+x^2+x+y)=305$

Lời giải

a) Ta có $x(x+2)(x^2+2x+2)+1=0$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x).(x^2+2x+2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)+2.(x^2+2x)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

Vậy $x=-1$.

b) $(4x+15y+1)(4^{|x|}+x^2+x+y)=305$ (*)

Vì 305 là số lẻ nên $4x+15y+1$ và $4^{|x|}+x^2+x+y$ đều là số lẻ.

Lại có $4x+1 \not\equiv 2, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow 15y:2 \Rightarrow y:2$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2+x=x(x+1):2 \\ y:2 \end{cases}$$

Nên để $4^{|x|}+x^2+x+y \not\equiv 2$ thì $4^{|x|} \not\equiv 2 \Rightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Khi đó, phương trình (*) trở thành:

$$(15y+1).(y+1)=305 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 15y \Rightarrow 15y+1 \in U(305) = \{\pm 1; \pm 305; \pm 5; \pm 61\}$$

Mà $15y+1 \geq 1$ và $15y+1$ chia 15 dư 1

$$\Rightarrow 15y+1 \in \{1; 61\} \Rightarrow 15y \in \{0; 60\} \Rightarrow y \in \{0; 4\} \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $y=0$, thay vào (1) suy ra $1.1=305$ (vô lý)

Với $y=4$, thay vào (1) ta được $61.5=305$ (đúng) $\Rightarrow y=4$ thỏa mãn

Vậy $(x; y)=(0; 4)$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Cho $B = \frac{a}{ab+a+2019} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2019c}{ac+2019c+2019}$ (các mẫu số đều khác 0)

Tính giá trị của B biết $abc=2019$.

b) Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b}.$$

Lời giải

a) Với $abc = 2019$, ta có:

$$B = \frac{a}{ab+a+2019} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2019c}{ac+2019c+2019}$$

$$B = \frac{a}{ab+a+abc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{abc.c}{ac+abc.c+abc}$$

$$B = \frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b}$$

$$B = \frac{1+b+bc}{bc+b+1} = 1$$

$$\text{b) Ta có: } \begin{cases} (a-1)^2 \geq 0 \\ (b-1)^2 \geq 0 \\ (c-1)^2 \geq 0 \\ (d-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \\ c^2 + 1 \geq 2c \\ d^2 + 1 \geq 2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 4 \geq 2(a+b+c+d)$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c+d) \leq 8 \Rightarrow a+b+c+d \leq 4$$

Áp dụng BĐT Svaxo, ta được:

$$S = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b}$$

$$\geq \frac{16}{3(a+b+c+d)} \geq \frac{4}{3}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$

Vậy $\text{Min } S = \frac{4}{3}$ khi $a = b = c = d = 1$.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB < AC$, đường cao AH . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh AB và AC .

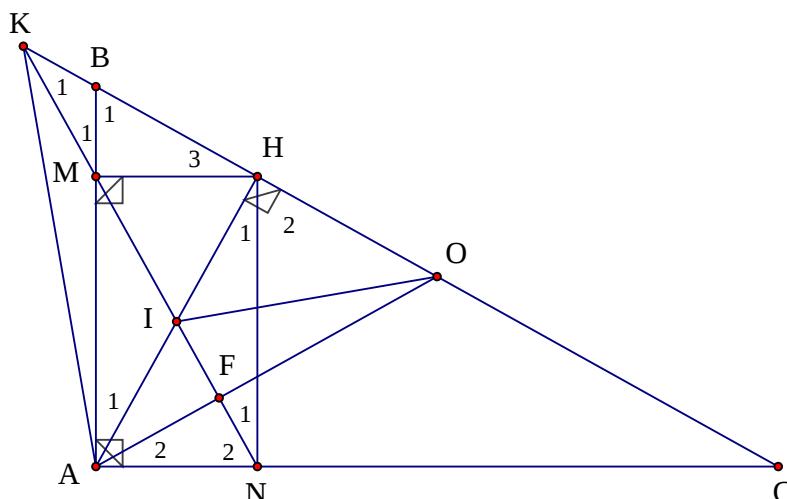
a) Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC = AH^2$

b) Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh rằng $KB \cdot KC = KH^2$.

c) Gọi O là trung điểm của BC , I là giao điểm của MN và AH . Chứng minh rằng OI vuông góc với AK .

d) Giả sử $\frac{AH}{OA} = \frac{40}{41}$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMH$ và $\triangle AHB$ có

$$\widehat{BAH} \text{ chung}$$

$$\widehat{HMA} = \widehat{AHB} (= 90^\circ)$$

Do đó $\triangle AMH \sim \triangle AHB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AM \cdot AB = AH^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \triangle HNA \sim \triangle CHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AN}{AH} \Rightarrow AN \cdot AC = AH^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AM \cdot AB = AN \cdot AC = AH^2$

b) Vì $MB \parallel HN \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$ mà $\widehat{N}_1 = \widehat{H}_1$ (do I là tâm hình chữ nhật $MHNA$ nên $IN = IH$)

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{H}_1$$

Lại có: $\widehat{H}_1 = \widehat{C}$ (cùng phụ với $\widehat{H}_2$)

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}$$

Xét $\triangle KMB$ và $\triangle KCN$ có:

$$\widehat{K}_1 \text{ chung}$$

$$\widehat{M}_1 = \widehat{C}$$

Do $\triangle KMB \sim \triangle KCN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{KB}{KN} \Rightarrow KM \cdot KN = KB \cdot KC \quad (3)$$

Xét $\triangle KMH$ và $\triangle KHN$ có:

$$\widehat{K}_1 \text{ chung}$$

$$\widehat{H}_3 = \widehat{N}_1 \text{ (cùng phụ với } \widehat{H}_2)$$

Do $\triangle KMH \sim \triangle KHN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KM}{KH} = \frac{KH}{KN} \Rightarrow KB \cdot KC = KH^2 \quad (4)$$

Từ (1) và (2) suy ra $KB \cdot KC = KH^2$

c) Gọi F là giao điểm của KN và AO

Vì $\widehat{C} = \widehat{H_1}$ (cùng phụ với $\widehat{H_2}$), mà $\widehat{H_1} = \widehat{N_1}$ nên $\widehat{C} = \widehat{N_1}$ (5)

Vì AO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC của $\triangle BAC$ vuông tại A nên $AO = OC$

$\Rightarrow \triangle AOC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A_2}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{N_1} = \widehat{A_2}$

Mà $\widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{N_2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AFN} = 90^\circ \Rightarrow KF \perp AO$

Xét $\triangle KAO$ có: $KF \perp AO$; $AH \perp KO$ và KF cắt AH tại I

$\Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle KAO \Rightarrow OI \perp KA$

d) Vì $\frac{AH}{OA} = \frac{40}{41}$ nên đặt $AH = 40a$; $OA = 41a$ ($a > 0$)

Theo định lý Py-ta-go ta có: $OH^2 = OA^2 - AH^2 = (41a)^2 - (40a)^2 = 81a^2$

$\Rightarrow OH = 9a$

Mà $OA = OB = OC \Rightarrow OB = OC = 41a$

$\Rightarrow \begin{cases} BH = 41a - 9a = 32a \\ CH = 41a + 9a = 50a \end{cases}$

Áp dụng Py-ta-go vào các tam giác AHB, AHC vuông tại H , ta được:

$\begin{cases} AB^2 = AH^2 + BH^2 = (40a)^2 + (32a)^2 = 2624a^2 \\ AC^2 = AH^2 + CH^2 = (40a)^2 + (50a)^2 = 4100a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AB = 8\sqrt{41}a \\ AC = 10\sqrt{41}a \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{8\sqrt{41}a}{10\sqrt{41}a} = \frac{4}{5}$

Vậy $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$ khi $\frac{AH}{OA} = \frac{40}{41}$.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho $(n+1)$ và $(2n+1)$ (với $n \in \mathbb{N}$) đều là số chính phương. Chứng minh rằng n chia hết cho 24.

Lời giải

Vì $2n+1$ là số lẻ mà $2n+1$ là số chính phương (gt)

$\Rightarrow 2n+1$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow 2n:4 \Rightarrow n:2 \Rightarrow n+1$ là số lẻ mà $n+1$ là số chính phương

$\Rightarrow n+1$ chia 8 dư 1 $n:8$ (1)

Mặt khác $(n+1)(2n+1) = 3n+2$ chia cho 3 dư 2

Mà $(n+1)$ và $(2n+1)$ đều là số chính phương nên chúng chia cho 3 đều dư 1.

Vì $n+1$ chia cho 3 dư 1 nên $n:3$ (2)

Vì $(3,8)=1$ và $3.8=24$ nên từ (1) và (2) suy ra $n:24$.

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN PHÚ XUYỀN

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH KHÁ, GIỎI

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \left[\frac{3}{2} - \left(x^4 - \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x - 1) - 4}{x^7 + 6x^2 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}$

- Tìm điều kiện xác định của biểu thức A .
- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

- Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $B = n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 49.
- Tìm số nguyên dương n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Bài 3: (3,5 điểm)

Giải các phương trình sau:

- $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$
- $\frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} + \frac{x^2 + 12x + 42}{x + 6} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 16x + 72}{x + 8}$

Bài 4: (4,5 điểm)

Gọi O là trung điểm của cạnh đáy BC của tam giác đều ABC . Mà $\widehat{xOy} = 60^\circ$ quay quanh O có các cạnh Ox , Oy lần lượt cắt các cạnh BA và CA của tam giác ở M và N .

- Chứng minh $OB^2 = BM \cdot CN$
- Xác định tính chất của các tia MO và NO đối với $\widehat{BMN}$ và $\widehat{CMN}$.
- Chu vi $\triangle AMN$ không đổi.

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến AM lớn nhất.

Bài 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu a , b , c là độ dài các cạnh của một tam giác thì:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

===== HẾT =====

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH KHÁ, GIỎI
HUYỆN PHÚ XUYỀN
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Thời gian làm bài: 120 phút**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \left[\frac{3}{2} - \left(x^4 - \frac{x^4+1}{x^2+1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x-1) - 4}{x^7 + 6x^2 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36}$

- a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A.
b) Rút gọn biểu thức A.
c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho A có giá trị nguyên.

Lời giải

- a) Để biểu thức A xác định thì

$$\begin{cases} x^2 + 1 \neq 0 (TM \forall x) \\ x^7 + 6x^6 - x - 6 \neq 0 \\ 3x^2 + 12x - 36 \neq 0 \\ \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^6 - 1)(x + 6) \neq 0 \\ 3(x - 2)(x + 6) \neq 0 \\ (x + 3)(x + 26) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq -6 \\ x \neq 2 \\ x \neq -3 \\ x \neq -26 \end{cases}$$

- b)

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{3}{2} - \left(x^4 - \frac{x^4+1}{x^2+1} \right) \cdot \frac{x^3 - x(4x-1) - 4}{x^7 + 6x^6 - x - 6} \right] : \frac{x^2 + 29x + 78}{3x^2 + 12x - 36} \\ &= \left[\frac{3}{2} - \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + x - 4}{(x^6 - 1)(x + 6)} \right] : \frac{(x + 3)(x + 26)}{3(x - 2)(x + 6)} \\ &= \left[\frac{3}{2} - \frac{x^6 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x - 4)(x^2 + 1)}{(x^6 - 1)(x + 6)} \right] : \frac{3(x - 2)(x + 6)}{(x + 3)(x + 26)} \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{x - 4}{x + 6} \right) \cdot \frac{3(x - 2)(x + 6)}{(x + 3)(x + 26)} \\ &= \frac{3x + 18 - 2x + 8}{2(x + 6)} \cdot \frac{3(x - 2)(x + 6)}{(x + 3)(x + 26)} \\ &= \frac{3(x + 26)(x - 2)}{2(x + 3)(x + 26)} \\ &= \frac{3(x + 26)(x - 2)}{2(x + 3)(x + 26)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3(x-2)}{2(x+3)}$$

$$= \frac{3x-6}{2x+6}$$

c) Với $x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn ĐKXD, để A nguyên thì:

$$\begin{aligned} & 3x-6 : 2x+6 \\ \Rightarrow & 2(3x-6) : 2x+6 \\ \Rightarrow & 6x-12 : 2x+6 \\ \Rightarrow & 3(2x+6) - 30 : 2x+6 \end{aligned}$$

Mà $3(2x+6) : 2x+6, \forall x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \text{suy ra } 30 : 2x+6 \\ \Rightarrow & 15 : x+3 \\ \Rightarrow & x+3 \in U(15) = \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\} \\ \Rightarrow & x \in \{-18; -8; -6; -4; -2; 0; 2; 12; 15\} \end{aligned}$$

Thử lại và kết hợp ĐKXD và $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x \in \{-18; -8; -4; -2; 0; 12\}$ thỏa mãn điều kiện của đề bài.

$$\text{Vậy } x \in \{-18; -8; -4; -2; 0; 12\}$$

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $B = n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 49.

b) Tìm số nguyên dương n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= n^2 + 3n + 4 \\ &= (n+5)(n-2) + 14 \end{aligned}$$

+ Nếu $(n+5) : 7 \Rightarrow (n-2) : 7 \Rightarrow (n+5)(n-2) : 49$

Mà $14 \nmid 49$ nên $B \nmid 49$

+ Nếu $(n+5) \nmid 7 \Rightarrow (n-2) \nmid 7 \Rightarrow (n+5)(n-2) \nmid 7$

Mà $14 : 7$ nên $B \nmid 7 \Rightarrow B \nmid 49$

Vậy $B = n^2 + 3n + 4$ không chia hết cho 49 với mọi số nguyên n .

$$\begin{aligned} \text{b) } n^4 + 4 &= (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} n^2 + 2 + 2n > n^2 + 2 - 2n, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ n^2 + 2 + 2n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Suy ra để $n^4 + 4$ là số nguyên tố thì $n^2 + 2 - 2n = 1$

$$\Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 1 \text{ (TMĐK)}$$

Khi đó $n^4 + 4 = 5$ là số nguyên tố (TM)

Vậy $n^4 + 4$ là số nguyên tố khi $n=1$

Bài 3: (3,5 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $\frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} + \frac{x^2 + 12x + 42}{x + 6} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 16x + 72}{x + 8}$

Lời giải

a) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + x - 6) + x(x^2 + x - 6) + (x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3) = 0 \\ (x - 2) = 0 \\ (x^2 + x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Ta có $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{-3}{4}$ (vô lý).Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{-3; 2\}$

b) ĐKXĐ: $x \notin \{-4; -6; -2; -8\}$

$$\frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} + \frac{x^2 + 12x + 42}{x + 6} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 16x + 72}{x + 8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} + \frac{(x+6)^2 + 6}{x+6} = \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} + \frac{(x+8)^2 + 8}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow x + 4 + \frac{4}{x+4} + x + 6 + \frac{6}{x+6} = x + 2 + \frac{2}{x+2} + x + 8 + \frac{8}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+4} + \frac{3}{x+6} = \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x+8} - \frac{3}{x+6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x+4)(x+2)} = \frac{x}{(x+8)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(t/m) \\ x^2 + 6x + 8 = x^2 + 14x + 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5(t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{0; -5\}$

Bài 4: (4,5 điểm)

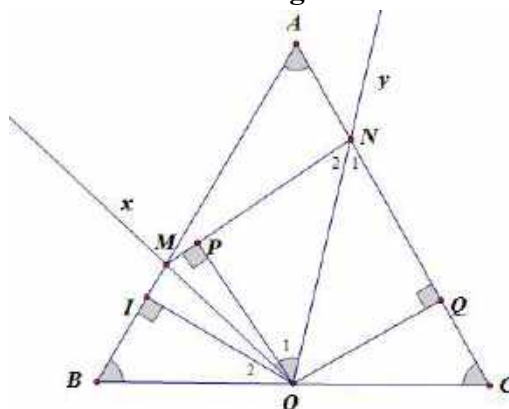
Gọi O là trung điểm của cạnh đáy BC của tam giác đều ABC . Mà $\widehat{xOy} = 60^\circ$ quay quanh O có các cạnh Ox , Oy lần lượt cắt các cạnh BA và CA của tam giác ở M và N

a) Chứng minh $OB^2 = BM \cdot CN$

b) Xác định tính chất của các tia MO và NO đối với $\widehat{BMN}$ và $\widehat{CMN}$.

c) Chu vi $\triangle AMN$ không đổi.

Lời giải



Ta có $\widehat{BON}$ là góc ngoài của $\triangle NOC$ nên:

$$\widehat{BON} = \widehat{ONC} + \widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{BOM} + \widehat{MON} = \widehat{ONC} + \widehat{C}$$

Mà $\widehat{MON} = \widehat{C} (= 60^\circ)$ nên $\widehat{BOM} = \widehat{ONC}$

Xét $\triangle BOM$ và $\triangle CNO$ có:

$$\widehat{B} = \widehat{C} (= 60^\circ)$$

$$\widehat{BOM} = \widehat{ONC}$$

$$\Rightarrow \triangle BOM \sim \triangle CNO (g.g)$$

$$\frac{BO}{CN} = \frac{BM}{CO} \Rightarrow BO \cdot CO = BM \cdot CN$$

Mà $BO = CO$ (do O là trung điểm BC).

$$\Rightarrow OB^2 = BM \cdot CN \text{ (đpcm)}$$

b) Xét $\triangle ONM$ và $\triangle CNO$ có:

$$\frac{BO}{CN} = \frac{BM}{CO} \text{ và } \widehat{MON} = \widehat{C} (= 60^\circ) \Rightarrow \triangle ONM \sim \triangle CNO (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{ONM}$$

$$\Rightarrow NO \text{ là tia phân giác của } \widehat{MNC}.$$

Chứng minh tương tự ta có MO là tia phân giác của góc $\widehat{BMN}$.

Vậy NO tia là tia phân giác của $\widehat{MNC}$ MO là tia phân giác của góc $\widehat{BMN}$.

c) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB , AC và MN lần lượt tại I , Q , P .

Xét $\triangle IMO$ vuông tại I và $\triangle MPO$ vuông tại P có:

Cạnh MO chung.

$\widehat{IMO} = \widehat{PMO}$ Xét (vì MO là phân giác của $\widehat{BMN}$ - theo câu b)

$\Rightarrow \triangle IMO = \triangle MPO$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow MN = MP$

Chứng minh tương tự ta có: $PN = NQ$

Chu vi $\triangle AMN$ bằng: $AM + MN + AN = AM + MP + PN + AN$

$$= AM + MP + MI + NQ$$

$$= AI + AQ$$

Do O cố định, AB và AC không đổi nên điểm I và Q cố định.

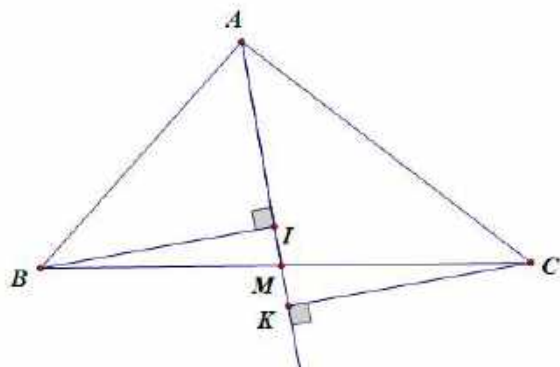
$\Rightarrow AI, AQ$ không đổi.

Vậy chu vi $\triangle AMN$ không đổi. (đpcm)

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC . Hãy xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến AM lớn nhất.

Lời giải



Kẻ $BI \perp AM$; $CK \perp AM$ ($I, K \in AM$)

$\Rightarrow BI + CK \leq BM + CM = BC$ không đổi.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} BI = BM \\ CK = CM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \equiv M \\ K \equiv M \end{cases}$

$\Rightarrow BM \perp AM \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên BC

Vậy M là hình chiếu của A trên BC thì tổng khoảng cách từ B và C đến AM lớn nhất.

Bài 6: (1,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên theo bất đẳng thức tam giác ta được:

$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} < 1; \frac{b}{c+a} < 1; \frac{c}{a+b} < 1;$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c} \\ \frac{b}{b+c} < \frac{b+b}{a+b+c} = \frac{2b}{a+b+c} \\ \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c} = \frac{2c}{a+b+c} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \left\{ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2 \right.$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2 \text{ (Đpcm)}$$

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN THANH TRÌ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI HSG SỐ

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH NĂNG KHIẾU
NĂM HỌC: 2018-2019
Môn: Toán 8
Thời gian làm bài: 120 phút
Ngày kiểm tra: 16 tháng 3 năm 2019

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$
2. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 4$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = 7\left(\frac{x^2-9}{x^2-4}\right)$
2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Cho 3 số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2019(z+x)}{y}$

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng: tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.
2. Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Biết đa thức $F(x)$ chia cho đa thức $x+1$ dư -4 , đa thức $F(x)$ chia cho đa thức $x-2$ dư 5 .

Hãy tính giá trị của $A = \left(a^{2019} + b^{2019}\right)\left(b^{2020} - c^{2020}\right)\left(c^{2021} + a^{2021}\right)$

Bài 5: (6,0 điểm)

Cho điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa cạnh AB , vẽ các tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C ($C \neq A$), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

1. Chứng minh: $AB^2 = 4AC \cdot BD$
2. Kẻ $OM \perp CD$ tại M . Chứng minh: CO là tia phân giác góc ACD và $AC = MC$.
3. Tia BM cắt tia Ax tại N . Chứng minh: C là trung điểm AN .
4. Kẻ $MH \perp AB$ tại H . Chứng minh: Các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy.

Bài 6: (1,0 điểm) Tìm số nguyên n sao cho $n^3 + 2018n = 2020^{2019} + 4$

===== HẾT =====

(Đề thi có 01 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ KIỂM TRA NĂNG KHIẾU NĂM HỌC 2018 - 2019
MÔN: TOÁN 8

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

2. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 4$

Lời giải

1) Ta có $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$

Đặt $x^2 + 5x + 4 = t$

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = (t+1)(t-1) - 24 = t^2 - 25 = (t-5)(t+5)$

$= (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10)$

2) Ta có $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$
 $= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = 7\left(\frac{x^2-9}{x^2-4}\right)$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

Lời giải

1) $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 + 6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2 = 7\left(\frac{x^2-9}{x^2-4}\right)$ (đkxđ: $x \neq \pm 2$)

Đặt $\frac{x+3}{x-2} = a; \frac{x-3}{x+2} = b$, ta có $a^2 + 6b^2 = 7ab$

$\Leftrightarrow (a-b)(a-6b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ hoặc $a = 6b$

Giải PT: $a = b$ tìm được $x = 0$ (TMĐK)

Giải PT: $a = 6b$ tìm được $x = 1$ hoặc $x = 6$ (TMĐK)

Kết luận

2) $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 = -5x^2y^2 + 35xy - 60 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(xy-3)(4-xy)$

Vì VT ≥ 0 nên $5(xy-3)(4-xy) \geq 0$. Suy ra $3 \leq xy \leq 4$

$\Rightarrow xy = 3$ hoặc $xy = 4$ (vì xy nguyên)

Với $xy = 3$ và $(x-y)^2 = 0$ thì $x = y$ và $x^2 = 3$ (loại)

Với $xy = 4$ và $(x-y)^2 = 0$ thì $x = y = 2$ và $x = y = -2$ (loại)

Bài 3: (3,0 điểm)

1. Cho 3 số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2019(z+x)}{y}$

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$

Lời giải

1) Ta có $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$

Do x, y, z đôi một khác nhau $\Rightarrow x+y+z=0$

Thay $x+y=-z; y+z=-x; z+x=-y$ ta có $P = -16 - 3 + 2019 = 2000$

2) Viết được $A = \frac{27-12x}{x^2+9} = \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1 \geq -1$

$\Rightarrow A_{\min} = -1$ khi $x = 6$

Viết được $A = \frac{27-12x}{x^2+9} = \frac{-(2x+3)^2}{x^2+9} + 4 \leq 4$

$\Rightarrow A_{\max} = 4$ khi $x = -1,5$

Bài 4: (3,0 điểm)

1. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng: tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

2. Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Biết đa thức $F(x)$ chia cho đa thức $x+1$ dư -4 , đa thức $F(x)$ chia cho đa thức $x-2$ dư 5 .

Hãy tính giá trị của $A = (a^{2019} + b^{2019}) \left(b^{2020} - c^{2020} \right) \left(c^{2021} + a^{2021} \right)$

Lời giải

1) Gọi hai số chính phương liên tiếp là k^2 và $(k+1)^2$

Ta có $k^2 + (k+1)^2 + k^2(k+1)^2 = [k(k+1)+1]^2$

Lập luận và kết luận

2) Gọi thương của phép chia $F(x)$ cho $x-2$ và $x+1$ là $P(x), Q(x)$

Ta có $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x-2).P(x) + 5$ (1)

$F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x+1).Q(x) - 4$ (2)

Thay $x = 2$ vào (1) ta được $4a + 2b + c = -3$ (3)

Thay $x = -1$ vào (2) ta được $a - b + c = -3$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $a = b$. Nên $A = 0$

Bài 5: (6,0 điểm)

Cho điểm O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa cạnh AB , vẽ các tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C ($C \neq A$), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

1. Chứng minh: $AB^2 = 4AC.BD$

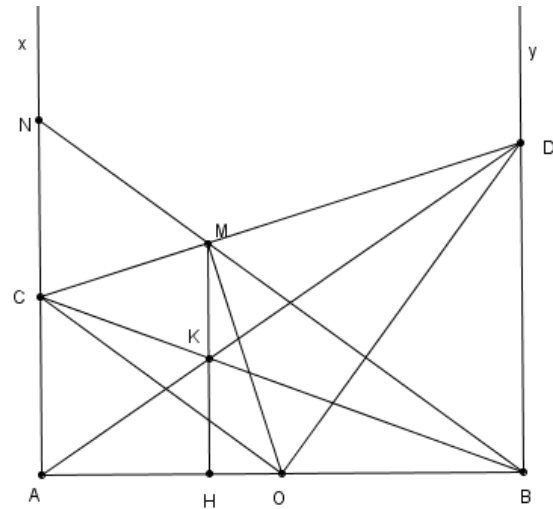
2. Kẻ $OM \perp CD$ tại M . Chứng minh: CO là tia phân giác góc ACD và $AC = MC$.

3. Tia BM cắt tia Ax tại N . Chứng minh: C là trung điểm AN .

4. Kẻ $MH \perp AB$ tại H . Chứng minh: Các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy.

Lời giải

1) Chứng minh được $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ đồng dạng
 $\Rightarrow AB^2 = 4AC \cdot BD$
 2) $\triangle ACO$ và $\triangle BOD$ đồng dạng
 $\Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OB}$ hay $\frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$
 Đưa ra đk và kl:
 $\triangle ACO$ và $\triangle OCD$ đồng dạng
 $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{DCO}$
 Chứng minh:
 $\triangle ACO = \triangle MCO$ (ch – gn)
 $\Rightarrow AC = CM$



3) Nêu ra được $BD = DM$ (tương tự câu 2) $\Rightarrow \frac{CA}{BD} = \frac{CM}{DM}$

Sử dụng hệ quả định lý TaLét đưa ra $\frac{CN}{BD} = \frac{CM}{DM}$ (vì $CN \parallel BD$)

Do đó suy ra $CA = CN$

4) Gọi K là giao điểm của MH và BC

Nêu ra được $\frac{HK}{AC} = \frac{MK}{NC}$

Suy ra $MK = HK$ hay BC cắt MH tại trung điểm của MH

Tương tự AD cắt MH tại trung điểm của MH

Vậy MH, BC, AD đồng quy tại K là trung điểm MH

Bài 6: (1,0 điểm) Tìm số nguyên n sao cho $n^3 + 2018n = 2020^{2019} + 4$

Lời giải

Ta có $n^3 + 2018n = (n^3 - n) + 2019n$ chia hết cho 3.

Ta có $2020^{2019} + 4$ chia 3 dư 2

Vậy không tìm được n .

===== **HẾT** =====

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GD&ĐT TỈNH BẮC NINH
ĐỀ THI THỬ SỐ 60

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2020 – 2021

Môn: Toán 8

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (3,0 điểm) Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

1. Rút gọn M
2. Tìm giá trị của a để M đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $n^3 - n$ chia hết cho 24
2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau $|x-1|(x^2+3x-7) = x^3-1$
2. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7, chia cho $(x+2)$ dư 1.

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho O trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C khác A . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D .
 - a. Chứng minh rằng: $AB^2 = 4AC \cdot BD$.
 - b. Kẻ OM vuông góc với CD tại M . Gọi K là trung điểm của CD . Chứng minh $\triangle KOD$ cân tại K , từ đó suy ra $DB = DM$.
 - c. Tìm vị trí của C trên tia Ax , để diện tích tứ giác $ABDC$ là nhỏ nhất.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Hai tia phân giác trong BD và CE cắt nhau tại O . Chứng minh rằng $\frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = 2$.

Bài 5: (3,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}$.
2. Hình vuông có 3×3 ô chứa số 9 mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi cùng đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH**Năm học: 2020-2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (3,0 điểm)**

Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

1. Rút gọn M
2. Tìm giá trị của a để M đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1. Điều kiện $a \neq 0, a \neq 1$

$$M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$$

$$M = \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$$

$$M = \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$$

$$M = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$$

$$M = \frac{a^3-1}{a^3-1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4}$$

$$2. \text{ Ta có } M = \frac{4a}{a^2+4} = \frac{(a^2+4) - (a^2-4a+4)}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$$\text{Vì } \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \geq 0 \text{ với mọi } a \text{ nên } 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4} \leq 1 \text{ với mọi } a.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ với mọi } a.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = 2$.

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $n^3 - n$ chia hết cho 24.
2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương.

Lời giải

1. Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Vì $n, (n-1), (n+1)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên có một số trong ba số đó chia hết cho 3

$$\text{Do đó } n^3 - n : 3(1)$$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là hai số tự nhiên chẵn liên tiếp.

$$\text{Do đó } (n-1)(n+1) : 8(2)$$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1) và (2) suy ra $n^3 - n : 24$

2. Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2, (m \in \mathbb{N})$.

$$\text{Suy ra } (n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$$

$$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$$

Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau xảy ra:

$$+ \text{ Trường hợp 1: } \begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$$

$$+ \text{ Trường hợp 2: } \begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$$

$$+ \text{ Trường hợp 3: } \begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là: 1002, 138, 2.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau $|x-1|(x^2 + 3x - 7) = x^3 - 1$.

2. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7, chia cho $(x+2)$ dư 1.

Lời giải

1. $|x-1|(x^2 + 3x - 7) = x^3 - 1$.

Th1: Nếu $x \geq 1$ phương trình đã cho trở thành:

$$(x-1)(x^2 + 3x - 7) = x^3 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 7 - x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{thỏa mãn}) \\ x=4(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Th2: Nếu $x < 1$ phương trình đã cho trở thành:

$$-(x-1)(x^2+3x-7)=x^3-1$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)(2x^2+4x-6)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{không thỏa mãn}) \\ x=-3(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=1; x=-3; x=4$.

2. Do $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$ là đa thức bậc hai nên phần dư của phép chia $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2.

Giả sử $ax+b (a, b \in \mathbb{R})$ là phần dư cần tìm.

Từ giả thiết bài toán: Tồn tại các đa thức $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$$

Xét $P(1)=7=a+b; P(-2)=1=-2a+b$ từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=7 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$$

Vậy phần dư cần tìm là: $2x+5$.

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho O trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C khác A . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D .

a) Chứng minh rằng: $AB^2 = 4AC \cdot BD$.

b) Kẻ OM vuông góc với CD tại M . Gọi K là trung điểm của CD .

Chứng minh $\triangle KOD$ cân tại K , từ đó suy ra $DB = DM$.

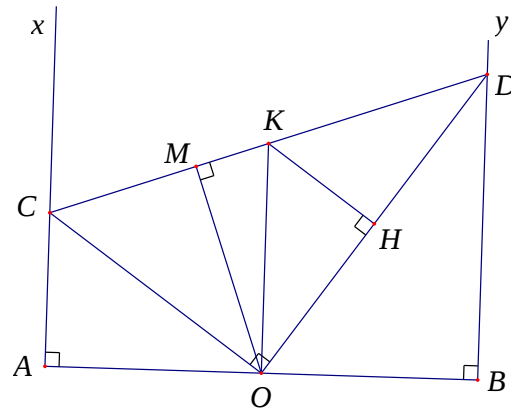
c) Tìm vị trí của C trên tia Ax , để diện tích tứ giác $ABDC$ là nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Hai tia phân giác trong BD và CE cắt nhau tại O .

Chứng minh rằng $\frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = 2$.

Lời giải

1.



a) Xét tam giác ACO , tam giác ACO có :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 90^\circ \\ \widehat{AOC} = \widehat{ODB} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BOD}) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta BOD (g.g).$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{BD} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$$

$$\Rightarrow 2OA \cdot 2OB = 4AC \cdot BD \Rightarrow AB \cdot AB = 4AC \cdot BD \Rightarrow AB^2 = 4AC \cdot BD$$

b) Dựng $HK \perp OD$ nên $HK \parallel OC$ suy ra H là trung điểm của OD

$$\text{Ta có } \Delta KHO = \Delta KHD (c.g.c) \Rightarrow KO = KD$$

Do đó ΔKHD cân tại K .

$$\text{Từ đó } \widehat{KOD} = \widehat{KDO} \text{ mà } \widehat{KOD} = \widehat{BDO} \text{ (so le trong)}$$

$$\text{Nên } \widehat{KOD} = \widehat{BDO} \Rightarrow \Delta ODM = \Delta ODB. \text{ Vậy } DB = DM.$$

c) Theo chứng minh trên ta có $\Delta ODM = \Delta ODB \Rightarrow OM = OB = OA$ nên $\Delta COM = \Delta COA$

$$\text{Suy ra } S_{COM} = S_{COA}; S_{OBD} = S_{OMD} \Rightarrow S_{COD} = \frac{1}{2} S_{ABDC} \Rightarrow S_{ABDC} = 2S_{COD}$$

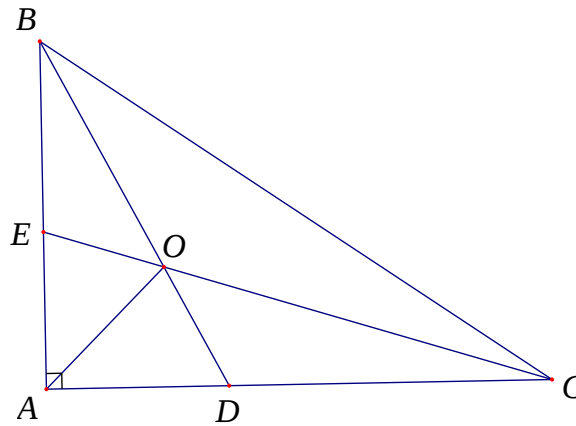
$$\text{Ta có } S_{COD} = \frac{1}{2} OM \cdot CD = \frac{1}{2} OA \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot CD$$

Do đó S_{ABDC} nhỏ nhất khi S_{COD} nhỏ nhất. S_{COD} nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất.

Lại có $CD \geq AB$

Nên S_{ABDC} khi $CD \parallel AB$ và cách AB một khoảng là $\frac{AB}{2}$.

2.



Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$)

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{DC + DA}{DA} = \frac{a + c}{c} \Rightarrow DA = \frac{bc}{a + c}$.

Xét $\triangle ABD$ có OA là phân giác trong. Ta có :

$$\frac{DO}{BO} = \frac{DA}{BA} \Rightarrow \frac{DO}{BO} = \frac{b}{a + c} \Rightarrow \frac{DB}{BO} = \frac{a + b + c}{a + c} \quad (1).$$

Chứng minh tương tự : $\frac{CE}{OC} = \frac{a + b + c}{a + b} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DO}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = \frac{(a + b + c)^2}{(a + c)(a + b)}$.

Mà $\triangle ABC$ vuông tại A nên theo Pitago có: $c^2 + b^2 = a^2$

Như vậy

$$\frac{(a + b + c)^2}{(a + c)(a + b)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{a^2 + ab + bc + ca} = \frac{2(a^2 + ab + bc + ca)}{a^2 + ab + bc + ca} = 2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: (3,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{1 + 2bc} + \frac{b^2}{1 + 2ca} + \frac{c^2}{1 + 2ab} \geq \frac{3}{5}$.

2. Hình vuông có 3×3 ô chứa số 9 mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi cùng đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

Lời giải

1. Sử dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ Ta có:

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{a^2}{1+b^2+c^2} + \frac{b^2}{1+c^2+a^2} + \frac{c^2}{1+a^2+b^2}$$

$$\frac{a^2}{1+b^2+c^2} + \frac{b^2}{1+c^2+a^2} + \frac{c^2}{1+a^2+b^2} = \frac{a^2}{2-a^2} + \frac{b^2}{2-b^2} + \frac{c^2}{2-c^2}$$

$$\frac{a^2}{1+b^2+c^2} + \frac{b^2}{1+c^2+a^2} + \frac{c^2}{1+a^2+b^2} = \frac{a^2}{2-a^2} + \frac{b^2}{2-b^2} + \frac{c^2}{2-c^2}$$

$$= -3 + 2 \left(\frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \right)$$

$$\text{Lại có: } \frac{1}{2-a^2} + \frac{1}{2-b^2} + \frac{1}{2-c^2} \geq \frac{9}{6-a^2-b^2-c^2} = \frac{9}{5}$$

$$\text{Kết hợp lại ta được: } \frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Giả sử hình vuông kỳ diệu điền các số $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ như hình vẽ

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\text{Đặt } S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$$

$$\text{Suy ra } d + e + f = b + e + h = a + e + i = c + e + g = \frac{S}{3} \quad (1)$$

$$(d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g) = \frac{4S}{3} \Rightarrow S + 3e = \frac{4S}{3} \Rightarrow e = \frac{S}{9} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow d + f = b + h = a + i = c + g = \frac{2S}{9} = 2e \text{ (đpcm)}$$

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN QUẾ VÕ
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI THỬ SỐ 00

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2020-2021
Thời gian làm bài 120 phút

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 + y^2 - 2xy - xz + yz$

b) $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$

2. Tìm hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 - 2(3x + 2y) + 11 = 0$

3. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$$

2. Xác định các số a, b biết: $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 ; chia cho $x-2$ dư 21

Bài 3: (7,0 điểm)

1. Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD , kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$;

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy;

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

2. Cho tam giác ABC nhọn, O là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AB, AC ; M, I lần lượt là trung điểm của BC, DE . Chứng minh rằng MI vuông góc với DE

Bài 4: (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 6054 = 0$

2. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 + 4ab$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

HUYỆN QUẾ VÕ Năm học: 2020-2021 HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 + y^2 - 2xy - xz + yz$

b) $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$

2. Tìm hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 - 2(3x + 2y) + 11 = 0$

3. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Lời giải

1. Phân tích đa thức thành nhân tử

$$a) x^2 + y^2 - 2xy - xz + yz = (x - y)^2 - z(x - y) = (x - y)(x - y - z)$$

$$b) x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y) + 3xy(x + y)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 1 + 3xy) = (x + y)[(x + y)^2 - 1] = (x + y)(x + y + 1)(x + y - 1)$$

2. Tìm hai số x, y thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 - 2(3x + 2y) + 11 = 0$

$$x^2 + 2y^2 - 2(3x + 2y) + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + 2(y - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Do } (x - 3)^2 \geq 0; 2(y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + 2(y - 1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 3$ và $y = 1$

3. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$$\text{Có } x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z)$$

Xét vế trái:

$$x^3 + y^3 + z^3 = [-(y + z)]^3 + y^3 + z^3 = -y^3 - 3y^2z - 3zy^2 - z^3 + y^3 + z^3 = -3yz(y + z) = 3xyz$$

$$= \text{Vế phải (do } x = -(y + z)) \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 2: (3,0 điểm)

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x + y}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$$

2. Xác định các số a, b biết: $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 ; chia cho $x-2$ dư 21

Lời giải

1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}$$

Ta có $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$ (ĐKXĐ: $x \neq 0, y \neq 0, y \neq -2x$)

$$\Rightarrow 2y(2x+y) - x(2x+y) = xy \Leftrightarrow 4xy + 2y^2 - 2x^2 - xy = xy \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2xy$$

$$\text{Do } x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 4$$

Vậy giá trị của $M = 4$

2. Xác định các số a, b biết: $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 ; chia cho $x-2$ dư 21

Đặt $f_{(x)} = 2x^3 + ax + b$

Ta có

$$f_{(x)} = Q_{(x)}(x+1) - 6 \Rightarrow f_{(-1)} = -6 \Rightarrow -2 - a + b = -6 \Leftrightarrow a - b = 4 \quad (1)$$

Ta có

$$f_{(x)} = P_{(x)}(x-2) + 21 \Rightarrow f_{(2)} = 21 \Rightarrow 16 + 2a + b = 21 \Leftrightarrow 2a + b = 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 3, b = -1$

Vậy $a = 3, b = -1$

Bài 3: (7,0 điểm)

1. Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD , kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

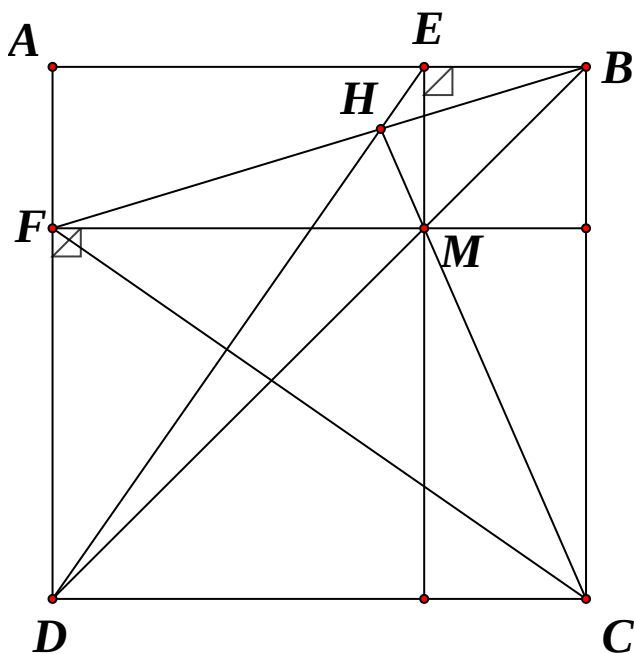
a) Chứng minh $DE = CF$;

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy;

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

2. Cho tam giác ABC nhọn, O là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AB, AC ; M, I lần lượt là trung điểm của BC, DE . Chứng minh rằng MI vuông góc với DE

Lời giải



a) Chứng minh $DE = CF$

+ Có tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} AF = ME \\ AE = MF \end{cases}$

+ ΔFMD có $\widehat{MED} = 90^\circ$ (gt) và $\widehat{MDF} = 45^\circ$ (Do DB là phân giác)
 $\Rightarrow \Delta MDF$ vuông cân tại $F \Rightarrow MF = FD$ nên $FD = AE (= FM) \Rightarrow \Delta AED = \Delta DFC$ (c-g-c)
 $\Rightarrow DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

 $+ \text{Goi } CF \cap DE \text{ tai } Q$

Vì $\Delta AED = \Delta DFC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (2 góc tương ứng)

Mà $\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 90^\circ$ (Do $\widehat{ADC} = 90^\circ$) $\Rightarrow \widehat{ECD} + \widehat{EDC} = 90^\circ$ Hay $\widehat{DQC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow DE \perp CF \text{ tại } Q$$

+ Chứng minh tương tự ta được $CE \perp BF$

+ Gọi $EM \cap DC$ tại K . Có $DC \parallel AB$ (Do $DFMK$ là hình vuông) mà $ME \perp AB$ (gt)

$$\Rightarrow EM \perp DC \text{ hay } \widehat{MKC} = 90^0$$

+ C/m tứ giác $DFMK$ là hình chữ nhật (Do có 3 góc vuông)

Mà DM là phân giác của $\widehat{FDK}$ (Do DB là phân giác của $\widehat{ADC}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $DFMK$ là hình vuông $\Rightarrow MK = MF$

+ C/m tứ giác $EKCB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KC = EB \Rightarrow AC = DK$

+ Mà $\triangle BEM$ vuông cân tại $E \Rightarrow EB = EM$ nên $EM = KC (= EB)$

$$+ \Delta MEF = \Delta KCM \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{EFM}$$

Gọi $CM \cap EF$ tại $H \Rightarrow \widehat{HME} = \widehat{KMC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HME}$

Mà $\widehat{EMH} + \widehat{HMF} = 90^\circ$ (Do tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \widehat{EFM} + \widehat{HMF} = 90^\circ$ hay $\widehat{FHM} = 90^\circ \Rightarrow CH \perp EF$

+ Xét $\triangle CEF$ có $CM \perp EF$ tại H (cmt); $ED \perp CF$ (cmt); $FB \perp EC$ (cmt)

$\Rightarrow DE, BF, CM$ đồng quy (đpcm)

c) Xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

Giải: Có tứ giác $MEAF$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow S_{MEAF} = AE \cdot EM = AE \cdot EB$ (Do $EB = EM$)

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$AE + EB \geq 2\sqrt{AE \cdot EB} \Leftrightarrow AB \geq 2\sqrt{AE \cdot EB} \Leftrightarrow AE \cdot EB \leq \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow S_{MEAF} \leq \frac{AB^2}{4}$$

Dấu = xảy ra khi $AE = EB$ hay $AE = EM$. Mà $AEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AEMF$ là hình vuông

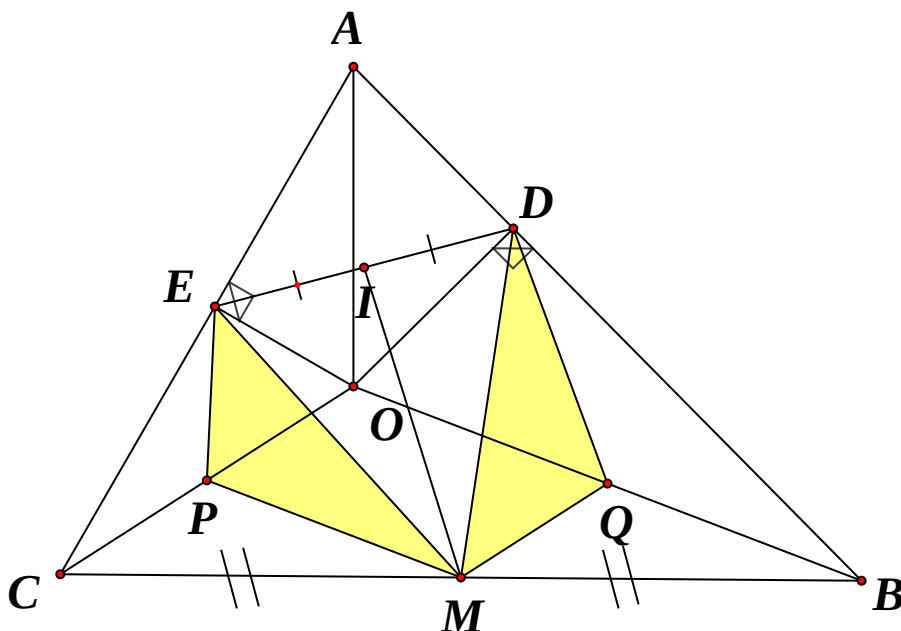
$\Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{EAF}$. Mà AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ ($E \in AB; F \in AD$) $\Rightarrow M \in AC$

Vậy M là giao điểm của AC

và BD thì S_{AEMF} lớn nhất

2. Cho tam giác ABC nhọn, O là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$.
Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên AB, AC ; M, I lần lượt là trung điểm của BC, DE . Chứng minh rằng MI vuông góc với DE

Lời giải



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của OC và OB

Xét tam giác vuông EPC có P là trung điểm của $CO \Rightarrow EP = CP = PO = \frac{CO}{2}$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)

Xét tam giác CPE có $EP = CP \Rightarrow \triangle CPE$ cân tại $P \Rightarrow \widehat{ECP} = \widehat{CEP} \Rightarrow \widehat{EPO} = 2\widehat{ECP}$ (1) (tính chất góc ngoài của tam giác)

Tương tự ta có $\widehat{DQO} = 2\widehat{DBQ}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{EPO} = \widehat{DQO}$ (do $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ theo giả thiết)

Xét $\triangle OBC$ có Q là trung điểm của OB và M là trung điểm của $BC \Rightarrow MQ$ là đường trung bình của $\triangle OBC \Rightarrow MQ \parallel CO$ (3) (theo tính chất của đường trung bình).

Tương tự $PM \parallel OB$ (4)

Xét tứ giác $POQM$ có $MQ \parallel CO$ và $PM \parallel OB \Rightarrow POQM$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết tứ giác có hai cặp cạnh đối song song là hình bình hành) $\Rightarrow \widehat{OPM} = \widehat{OQM}$

Xét hai tam giác EPM và tam giác MQD có

$EP = MQ$ (vì cùng bằng PO)

$\widehat{OPM} = \widehat{OQM}$

$PM = DQ$ (vì cùng bằng OQ)

Suy ra $\triangle EPM = \triangle MQD$ ($c - g - c$) $\Rightarrow EM = DM$ (2 cạnh tương ứng)

Xét $\triangle EMD$ có $EM = DM \Rightarrow \triangle EMD$ cân tại M , mặt khác I là trung điểm của $ED \Rightarrow MI$ đồng thời là đường trung tuyến và là đường cao $\Rightarrow MI \perp ED$ (điều phải chứng minh)

Bài 4: (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 6054 = 0$
2. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 + 4ab$$

Lời giải

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 6054 = 0$

Ta có:

$$x^2 + xy - 2020x - 2021y - 6054 = 0 \Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2021(x + y + 1) = 4033 \Leftrightarrow (x - 2021)(x + y + 1) = 4033$$

Có

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2021; x + y + 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x - 2021 \in U_{(4033)} \\ x + y + 1 \in U_{(4033)} \end{cases}$$

$$\text{Mà } U_{(4033)} = \{\pm 1; \pm 37; \pm 109; \pm 4033\}$$

Ta có bảng:

$x - 20$	-40	-109	-37	-1	1	37	109	403
$x + y$	-1	-37	-109	-40	403	109	37	1
x	-20	1912	1984	202	202	205	213	605
y	201	-19	-20	-60	201	-19	-20	-60

Vậy

$(x; y) \in \{(-2012; 2010); (1912; -1950); (1984; -2094); (2020; -6054); (2022; 2010); (2058; -1950); (2130; -2094); (6054; -6054)\}$

2. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^4 + b^4 + 4ab$$

Giải: Xét $P = a^4 + b^4 + 4ab = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + 4ab$ mà $a^2 + b^2 = 4$

$$\Rightarrow P = 16 - 2a^2b^2 + 4ab$$

$$P = 16 - 2(a^2b^2 - 2ab)$$

$$P = 18 - 2(ab - 1)^2$$

Do $a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 4 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq 2$

Có $ab \leq 2 \Leftrightarrow ab - 1 \leq 1 \Leftrightarrow (ab - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -2(ab - 1)^2 \geq -2 \Leftrightarrow P \geq 16$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} ab = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 4 \Leftrightarrow a^4 - 4a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

Vậy $\begin{cases} a = \sqrt{2}; b = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2}; b = -\sqrt{2} \end{cases}$ để giá trị nhỏ nhất của $P = 16$

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN THUẬN THÀNH ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

a. Rút gọn A . Tìm x để A nhận giá trị nguyên.

b. Tìm giá trị lớn nhất của A .

2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn: $13a + b + 2c = 0$.

Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

Bài 2: (6,0 điểm)

1. Cho $M = (n^2 + 2n + 5)^3 - (n+1)^2 + 2018$

Chứng minh rằng M chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $N = a^4 - 2a^3 + 3a^2 + 4a + 5$.

3. Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là các số chính phương.

Bài 3: (6,0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A lấy điểm H bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB và AC

1. Chứng minh tứ giác $BEFC$ là hình thang.

2. Tìm vị trí của H để $BEFC$ trở thành một hình bình hành, hình chữ nhật được không. ?

3. Xác định vị trí của H để tam giác EHF có diện tích lớn nhất?

Bài 4: (2,0 điểm)

Có hay không hai số nguyên dương a và b có tổng bằng 2022 và tích của chúng chia hết cho 2022.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI
HUYỆN THUẬN THÀNH
NĂM HỌC: 2020 – 2021

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (6,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1}$

a. Rút gọn A . Tìm x để A nhận giá trị nguyên.

b. Tìm giá trị lớn nhất của A .

2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn: $13a + b + 2c = 0$.

Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$

Lời giải

1. a. Điều kiện xác định: $x^3 + x^2 + x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$A = \frac{3x+3}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{x^2+1}$$

Vì $x^2+1 \geq 1$ nên $0 < A = \frac{3}{x^2+1} \leq 3$. Do đó $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow A \in \{1; 2; 3\}$

$$*) A=1 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}(tm)$$

$$*) A=2 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}(tm)$$

$$*) A=3 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0(tm)$$

Vậy các giá trị cần tìm $x \in \left\{ \pm\sqrt{2}; 0; \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$

b. Với nhận xét ở trên $A \leq 3$ và $A=3 \Leftrightarrow x=0(tm)$. Do đó $A_{\max} = 3$ khi $x=0$.

2.

Ta có $f(-2) = 4a - 2b + c$

$$f(3) = 9a + 3b + c$$

$$\Rightarrow f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$$

Do đó: $f(-2) = -f(3) \Rightarrow f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ (đpcm).

Bài 2: (6,0 điểm)

1. Cho $M = (n^2 + 2n + 5)^3 - (n + 1)^2 + 2018$

Chứng minh rằng M chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $N = a^4 - 2a^3 + 3a^2 + 4a + 5$.

3. Cho a và b là các số tự nhiên thoả mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$

Chứng minh rằng: $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là các số chính phương.

Lời giải

1. Ta có $x^3 - x : 6$ ($x \in \mathbb{N}$). Khi đó :

$$\begin{aligned} M &= \left[(n^2 + 2n + 5)^3 - (n^2 + 2n + 5) \right] + n^2 + 2n + 5 - (n + 1)^2 + 2018 \\ &= \left[(n^2 + 2n + 5)^3 - (n^2 + 2n + 5) \right] + 2022 \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên ta có : $\left[(n^2 + 2n + 5)^3 - (n^2 + 2n + 5) \right] : 6$ mà $2022 : 6$ nên $M : 6$

2.

$$\begin{aligned} N &= a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5 \\ &= (a^4 - 2a^3 + a^2) + 2(a^2 - 2a + 1) + 3 \\ &= (a^2 - a)^2 + 2(a - 1)^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 - a = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$

Vậy $N_{\min} = 3$ khi $a = 1$

3.

$$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (2a^2 - 2b^2) + (a - b) = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2 \quad (1)$$

Gọi $(a - b; 2a + 2b + 1) = d$.

$$\text{Khi đó : } b^2 = (a - b)(2a + 2b + 1) : d \Rightarrow b : d$$

$$\text{Mà } a - b : d \Rightarrow a : d \Rightarrow 2a + 2b : d \Rightarrow (2a + 2b + 1) - (2a + 2b) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Như vậy: $(a - b; 2a + 2b + 1) = 1$. Từ đó, theo (1) suy ra: $a - b$ và $2a + 2b + 1$ là các số chính phương.

Bài 3: (6,0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A lấy điểm H bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB và AC

1. Chứng minh tứ giác $BEFC$ là hình thang.

2. Tìm vị trí của H để $BEFC$ trở thành một hình bình hành, hình chữ nhật được không.

3. Xác định vị trí của H để tam giác EHF có diện tích lớn nhất?

Lời giải

1. Theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} \widehat{EBH} = 2\widehat{ABC} \\ \widehat{FCH} = 2\widehat{ACB} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBH} + \widehat{FCH} = 2\widehat{ABC} + 2\widehat{ACB} = 180^\circ$$

Mà hai góc này ở vị trí trong cùng phía nên $BE \parallel CF$

$\Rightarrow EBCF$ là hình thang.

2. Vì $EBCF$ là hình thang có hai đáy là BE, CF nên:

+ Để $EBCF$ là hình bình hành thì cần thêm $EB = CF$

Mà $EB = BH; CF = HC \Rightarrow EB = CF \Leftrightarrow BH = HC \Leftrightarrow H$ là trung điểm của BC .

Vậy $BECF$ là hình bình hành khi H là trung điểm của BC .

+ Để $BECF$ là hình chữ nhật thì điều kiện trước hết $EBCF$ là hình bình hành, khi đó H là trung điểm BC và $\widehat{EBH} = 90^\circ$ hay $\widehat{ABH} = 45^\circ$ tức là $\triangle ABC$ vuông cân tại A .

Vậy để $BECF$ là hình chữ nhật thì cần $\triangle ABC$ vuông cân tại A và H là trung điểm của BC .

3. Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của EH và AB , FH và AC .

Dễ thấy $\triangle EHF$ vuông tại H nên $S_{EHF} = \frac{EH.FH}{2} = 2PH.QH$

Theo định lý Ta-let ta có:

$$\frac{PH}{AC} = \frac{BH}{BC}$$

$$\frac{QH}{AB} = \frac{CH}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{PH.QH}{AC.AB} = \frac{BH.CH}{BC^2}$$

$$\Rightarrow PH.QH = \frac{AC.AB}{BC^2}.BH.CH$$

Cách 1) Mặt khác ta có:

$$0 \leq (BH - CH)^2 = (BH + CH)^2 - 4BH.CH$$

$$\Rightarrow BH.CH \leq \frac{AB.AC}{BC^2} \cdot \frac{BC^2}{4} = \frac{AB.AC}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $BH = CH$ hay H là trung điểm của BC .

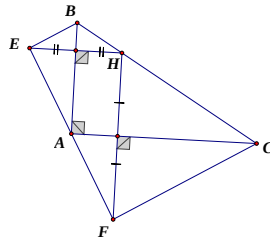
Vậy $\triangle EFH$ có diện tích lớn nhất khi H là trung điểm của BC .

Cách 2)

Do $BH + CH = BC$ không đổi, nên áp dụng hệ quả bất đẳng thức Cauchy ta có $BH.CH$ đạt giá trị lớn nhất khi $BH = CH$ hay H là trung điểm của BC .

Vậy $\triangle EFH$ có diện tích lớn nhất khi H là trung điểm của BC .

Cách 3)



Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$ ta có:

$$BH.CH \leq \frac{BC^2}{4} \Rightarrow PH.QH = \frac{AB.AC}{4}$$

Bài 4: (2,0 điểm)

Có hay không hai số nguyên dương a và b có tổng bằng 2022 và tích của chúng chia hết cho 2022.

Lời giải

Giả sử tồn tại 2 số nguyên dương a, b thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tức là:

$$\begin{cases} a+b=2022 & (1) \\ ab=2022c, c \in \mathbb{N}^* & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra: $a.b = 2.2.337.c \Rightarrow \begin{cases} a:2 \\ b:2 \end{cases}$

Từ (1) suy ra nếu a hoặc b chia hết cho 2 thì số còn lại cũng chia hết cho 2. Do đó: $\begin{cases} a:2 \\ b:2 \end{cases}$

Lập luận tương tự: $\begin{cases} a:3 \\ b:3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a:337 \\ b:337 \end{cases}$

Vì 2, 3, 337 là các số nguyên tố cùng nhau nên $\begin{cases} a:2.3.337 \\ b:2.3.337 \end{cases}$

hay $\begin{cases} a:2022 \\ b:2022 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2022 \\ b \geq 2022 \end{cases} \Rightarrow a+b \geq 2022$

Điều này mâu thuẫn với (1), do đó điều giả sử là Sai.

Vậy không tồn tại 2 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

===== **HẾT** =====

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GD&ĐT **BẮC NINH**
ĐỀ THI HSG8 SỐ **63**

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC: 2018 – 2019
TOÁN 8 Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2.$

2. Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C , dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH tại E . Đường thẳng AH cắt DC tại F .

a) Chứng minh rằng $BM = ND$.

b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì?

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC .

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC , AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính $\widehat{CFE}$.

Bài 5: (3,0 điểm)

1. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

2. Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN

SỞ GD&ĐT BẮC NINH

Năm học: 2018-2019

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (2,0 điểm)

Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Lời giải

Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$

$$\text{Do đó, } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow A = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = -1$$

$$\text{Nếu } a+b+c \neq 0 \text{ thì } \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = 2$$

Do đó, $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b \Rightarrow a=b=c$, trái giả thiết

Vậy $A = -1$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2.$

2. Cho hai đa thức $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + x - 1$. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các nghiệm của $P(x)$. Tính giá trị của $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$.

Lời giải

2.1 Điều kiện $x \neq 0; x \neq -1$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{(x+1)^2-3(x+1)+2}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} + \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{x+1}{x^2} + \frac{x}{(x+1)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[(x+1)^3 + x^3 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} (tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{-1}{2}\right\}.$

2.2

Ta có : $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$$Q(x) = 2\left(\frac{1}{2} - x\right)(-1 - x)$$

Do đó: $Q(x_1).Q(x_2).Q(x_3).Q(x_4).Q(x_5)$

$$\begin{aligned} &= 2^5 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - x_1\right)\left(\frac{1}{2} - x_2\right)\left(\frac{1}{2} - x_3\right)\left(\frac{1}{2} - x_4\right)\left(\frac{1}{2} - x_5\right) \right] \\ &\times [(-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3)(-1 - x_4)(-1 - x_5)] \\ &= 32 \cdot P\left(\frac{1}{2}\right) \cdot P(-1) = 32 \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{5}{8} + 2 + 1\right)(-1 + 5 - 4 + 1) = 77 \end{aligned}$$

Bài 3:(4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 2$ là ước số của $n^6 + 206$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Lời giải

3.1

$$\begin{aligned} n^2 + 2 \text{ là ước số của } n^6 + 206 &\Leftrightarrow \frac{n^6 + 206}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{n^6 + 8 + 198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow n^4 + 2n^2 + 4 + \frac{198}{n^2 + 2} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Điều này xảy ra khi $n^2 + 2$ là ước nguyên dương của $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ gồm:

2; 3; 6; 9; 11; 18; 22; 33; 66; 99; 198

Từ đó ta tìm được $n \in \{1; 2; 3; 4; 8; 14\}$.

3.2

Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các trường hợp sau:

1) $a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1$ (ktm)

2) $a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$

$\Rightarrow (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1$ (ktm)

3) $a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

$$4) a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$$

Bài 4: (7,0 điểm)

1. Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C , dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH tại E . Đường thẳng AH cắt DC tại F .

a) Chứng minh rằng $BM = ND$.

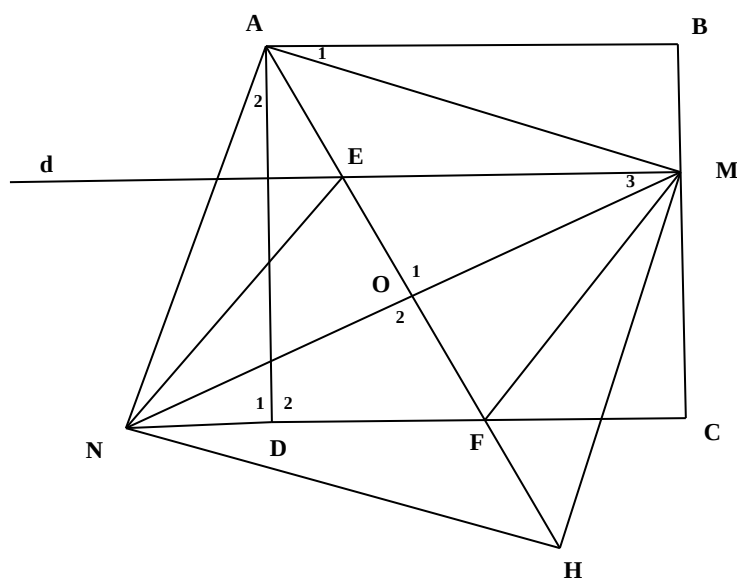
b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì?

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC .

2. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính $\widehat{CFE}$.

Lời giải

4.1



a) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (1)

mà $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Do đó, $\triangle AND = \triangle AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_1} = 90^\circ$ và $BM = ND$

b) Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{D_2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH, MN của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN , mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

$$\triangle EOM = \triangle FON \left(OM = ON; \widehat{N}_1 = \widehat{M}_3 \right) \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow EM = FN \quad (4)$$

Từ (3); (4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM \Rightarrow MEMF$ là hình thoi (5)

c) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$

Mà $DN = MB \Rightarrow MF = DF + BM$

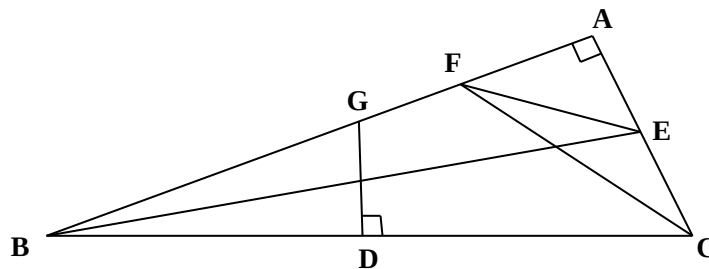
Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a

Ta có: $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ (vì $MF = DF + MB$)

$$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$$

Do đó, chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC .

4.2



Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 70^\circ$

$\triangle ACF$ có $\widehat{CAF} = 90^\circ, \widehat{ACF} = 30^\circ \Rightarrow FC = 2.AF$

Gọi D là trung điểm của BC và G là điểm trên AB sao cho $GD \perp BC$.

$$\text{Khi đó, } \triangle ABC \sim \triangle DBG \Rightarrow \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC}$$

$$\widehat{GCB} = \widehat{GBC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{GCF} = 20^\circ$$

Do đó CG và BE lần lượt là tia phân giác của $\widehat{BCF}$ và $\widehat{ABC}$ nên:

$$\frac{FC}{FG} = \frac{BC}{BG}; \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{Do đó, } \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{1}{2}FC}{FG} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BG} = \frac{BD}{BG} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AF}{FG} = \frac{AE}{EC}$$

Từ đó suy ra $CG \parallel EF$ (Định lý Talet đảo)

$$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{GCF} = 20^\circ.$$

Bài 5: (3,0 điểm)

1. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

2. Cho hình vuông $ABCD$ và 9 đường thẳng cùng có tính chất là mỗi đường thẳng chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 đường thẳng trong số đó cùng đi qua một điểm.

Lời giải

$$5.1 \quad \text{Ta có } (a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1 \Rightarrow \frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3$$

$$\text{Ta lại có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; \frac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b}$$

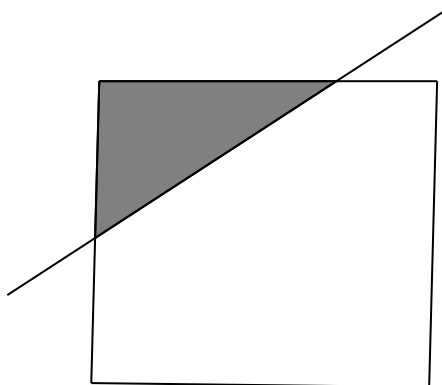
$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{a+c}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}$$

$$\text{Do vậy: } \frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

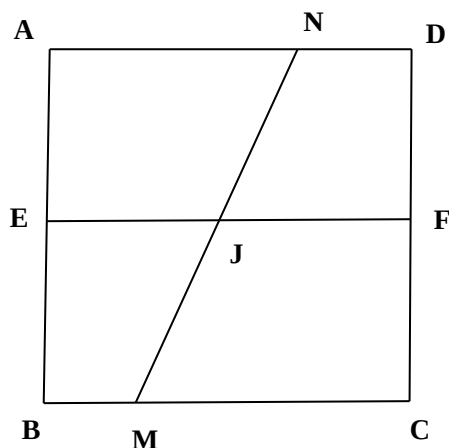
5.2



Các đường thẳng đã cho không thể cắt các cạnh kề nhau của hình vuông, bởi vì nếu thế chúng chia hình vuông thành một tam giác và ngũ giác (chứ không phải chia hình vuông thành hai tứ giác)

Do đó, mỗi đường thẳng (trong số chín đường thẳng) đều cắt hai cạnh đối của hình vuông và không đi qua một đỉnh nào của hình vuông cả.

Giả sử một đường thẳng cắt hai cạnh đối BC và AD tại các điểm M và N .

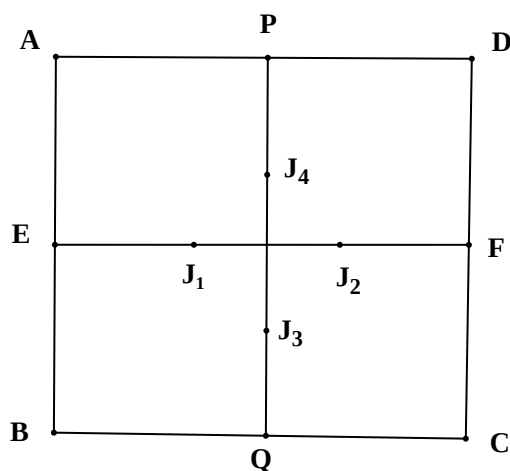


Ta có:
$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MCND}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot (BM + AN)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (MC + ND)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{2}{3}$$

(ở đây E và F là các trung điểm của AB và CD tương ứng)

Gọi E, F, P, Q tương ứng là các trung điểm của AB, CD, BC, AD . Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 là các điểm sao cho J_1, J_2 nằm trên EF , J_3, J_4 nằm trên PQ và thỏa mãn:

$$\frac{EJ_1}{J_1F} = \frac{FJ_2}{J_2F} = \frac{PJ_3}{J_3Q} = \frac{QJ_4}{J_4P} = \frac{2}{3}$$



Khi đó từ đó lập luận trên ta suy ra mỗi đường thẳng có tính chất thỏa mãn yêu cầu của đề bài phải đi qua một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 nói trên. Vì có 9 đường thẳng, nên theo nguyên lý Dirichle phải tồn tại ít nhất một trong 4 điểm J_1, J_2, J_3, J_4 sao cho nó có ít nhất ba trong 9 đường thẳng đã cho đi qua
 Vậy có ít nhất 3 đường thẳng trong 9 đường thẳng đã cho đi qua một điểm.

===== **HẾT** =====

UBND HUYỆN THUẬN THÀNH
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP
HUYỆN CẤP THCS - NĂM HỌC
2018-2019**

Môn: Toán – Lớp 8

Thời gian làm bài: 120 phút

Ngày thi: 20/02/2019

Bài 1: (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$$

1. Rút gọn biểu thức
2. Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?
3. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (6 điểm)

1. Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$

Tính giá trị của biểu thức $M = 2019 + \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

2. Giải phương trình sau:

a) $\frac{x-13}{2006} + \frac{x-22}{1997} + \frac{x-31}{1988} = 3$

b) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

Bài 3: (6 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, K là một điểm di động trên cạnh BC, gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên AB và AC.

1. Chứng minh tứ giác APKQ có bốn đỉnh cách đều một điểm, tìm điểm đó? Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì tứ giác APKQ là hình chữ nhật, khi đó hãy xác định vị trí điểm K trên BC để PQ có độ dài nhỏ nhất.
2. Vẽ các đường cao AA'; BB'; CC' của tam giác ABC, trực tâm H

a) Tính tổng: $\frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'}$

b) Gọi AI là tia phân giác của tam giác ABC, IM; IN thứ tự là phân giác của các góc AIC; AIB ($M \in AC; N \in AB$). Chứng minh $AN.BI.CM = BN.IC.AM$

Bài 4: (2 điểm) Chứng minh: $B = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN CẤP THCS**UBND HUYỆN THUẬN THÀNH****Năm học: 2018 – 2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1:** (6 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$$

1. Rút gọn biểu thức
2. Với $x > 0$ thì P không nhận những giá trị nào?
3. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} 1. P &= \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right) \\ &= \left[\frac{x(x+3)}{(x-3)(x^2+9)} + \frac{3}{x^2+9} \right] : \left[\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{(x-3)(x^2+9)} \right] \\ &= \frac{x+3}{x^2+9} : \frac{x^2+9-6x}{(x-3)(x^2+9)} \\ &= \frac{x+3}{x^2+9} \cdot \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

$$2. P = \frac{x+3}{x-3} \Rightarrow Px - 3P = x + 3$$

$$\Leftrightarrow x(P-1) = 3P+3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3(P+1)}{P-1} \quad (P \neq 1)$$

$$\text{Với } x > 0 \text{ và } x \neq 3 \text{ ta có } \frac{3(P+1)}{P-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P+1 > 0 \\ P-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 1 \\ P < -1 \end{cases}$$

Vậy khi $x > 0$ và $x \neq 3$ thì P không nhận giá trị từ -1 đến 1

$$3. P = \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-3+6}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

Để P nhận giá trị nguyên thì $x-3 \in U(6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

$x-3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
x	-3	0	1	2	4	5	6	9
K L	Lo ại	T M	T M	T M	T M	T M	T M	T M

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 4; 5; 6; 9\}$

Bài 2: (6 điểm)

$$1. \text{ Cho } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$$

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } M = 2019 + \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

2. Giải phương trình sau:

$$a) \frac{x-13}{2006} + \frac{x-22}{1997} + \frac{x-31}{1988} = 3$$

$$b) (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

Lời giải

$$1. \text{ Nếu } x+y+z=0 \text{ thì } x=-(y+z), y=-(x+z), z=-(x+y)$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} = (-1) + (-1) + (-1) \neq 1 \text{ (trái giả thiết)}$$

$$\Rightarrow x+y+z \neq 0$$

$$\text{Từ } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+x} = 1$$

$$\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{y+x}\right) = x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} + x+y+z = x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{y+x} = 0$$

$$\Rightarrow M = 2019$$

2.

$$a) \frac{x-13}{2006} + \frac{x-22}{1997} + \frac{x-31}{1988} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-13}{2006} - 1\right) + \left(\frac{x-22}{1997} - 1\right) + \left(\frac{x-31}{1988} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2019)\left(\frac{1}{2006} + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1988}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2019=0 \text{ vì } \frac{1}{2006} + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1988} \neq 0$$

Vậy $x = 2019$

$$b) (x^2+x)^2 + 4(x^2+x) = 12 \text{ Đặt } t = x^2+x$$

Ta có pt: $t^2 + 4t = 12$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-6 \end{cases}$$

$$+t=2 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$+t=-6 \Rightarrow x^2+x=-6 \Rightarrow x^2+x+6=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \text{ (pt vô nghiệm)}$$

Vậy $x=1; x=-2$

Bài 3: (6 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, K là một điểm di động trên cạnh BC, gọi P và Q lần lượt là hình chiếu của K trên AB và AC.

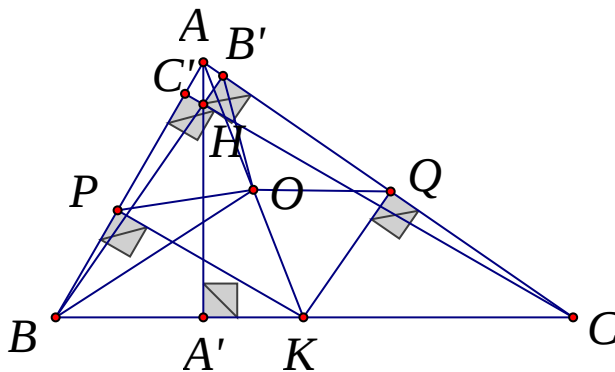
1. Chứng minh tứ giác APKQ có bốn đỉnh cách đều một điểm, tìm điểm đó? Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì tứ giác APKQ là hình chữ nhật, khi đó hãy xác định vị trí điểm K trên BC để PQ có độ dài nhỏ nhất.

2. Vẽ các đường cao AA'; BB'; CC' của tam giác ABC, trực tâm H

a) Tính tổng: $\frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'}$

b) Gọi AI là tia phân giác của tam giác ABC, IM; IN thứ tự là phân giác của các góc AIC; AIB ($M \in AC; N \in AB$). Chứng minh $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$

Lời giải



1. Gọi O là trung điểm của đoạn AK

$\Rightarrow$ PO và QO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AK của tam giác vuông APK và AQB

$$\Rightarrow PO = QO = OA = OK = \frac{1}{2} AK$$

$\Rightarrow$ Bốn đỉnh của tứ giác APKQ cách đều điểm O

Tứ giác APKQ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\widehat{PAQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A

Khi đó hai đường chéo $AK = PQ$

Vậy PQ đạt giá trị nhỏ nhất khi AK đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $AK \geq AA'$ không đổi

Vậy PQ nhỏ nhất khi $AK = AA' \Rightarrow K \equiv A'$

2. a) Ta có:

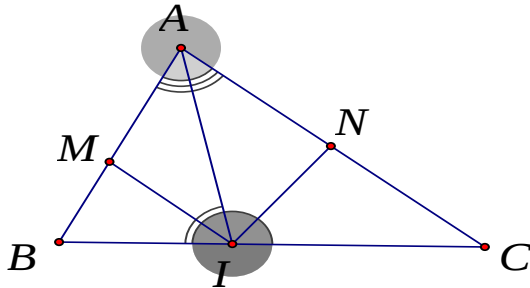
$$\frac{AH}{AA'} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BC}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{\frac{1}{2} AH (BA' + A'C)}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BA' + \frac{1}{2} AH \cdot A'C}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{S_{AHB} + S_{AHC}}{S_{ABC}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{BH}{BB'} = \frac{S_{AHB} + S_{BHC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{CH}{CC'} = \frac{S_{AHC} + S_{BHC}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AA'} + \frac{BH}{BB'} + \frac{CH}{CC'} = \frac{2.(S_{AHB} + S_{AHC} + S_{BHC})}{S_{ABC}} = \frac{2.S_{ABC}}{S_{ABC}}$$

b)



Áp dụng tính chất đường phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC có:

$$\begin{aligned} \frac{IB}{IC} &= \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{IB}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI} \\ \Rightarrow \frac{IB}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{IB} \cdot \frac{CI}{IA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CI}{BI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{BA} \\ \Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM &= IC \cdot NB \cdot MA \end{aligned}$$

Bài 4: (2 điểm) Chứng minh: $B = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120 \\ &= n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n + 8n^3 - 8n - 24n^3 + 72n^2 - 144n + 120 \\ &= n^2(n^2 - 1) + 2n(n^2 - 1) + 8n(n^2 - 1) - 24n^3 + 72n^2 - 144n + 120 \\ &= (n^2 - 1)(n^2 + 2n) + 8n(n - 1)(n + 1) - 24n^3 + 72n^2 - 144n + 120 \\ &= (n - 1)(n + 1)n(n + 2) + 8n(n - 1)(n + 1) - 24n^3 + 72n^2 - 144n + 120 \end{aligned}$$

Ta có: $(n - 1)(n + 1)n(n + 2)$ là tích bốn số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 và có tích 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8

$$\text{Mà } (3, 8) = 1 \text{ và } 3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow (n - 1)(n + 1)n(n + 2) : 24$$

$$(n - 1)(n + 1)n : 3 \Rightarrow 8(n - 1)(n + 1)n : 24$$

$$-24n^3 + 72n^2 - 144n + 120 : 24$$

$$\Rightarrow B : 24$$

TỈNH THÁI BÌNH
PHÒNG GD&ĐT TIỀN HẢI
ĐỀ THI THỬ SỐ 75

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2020 – 2021
MÔN : TOÁN 8
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 - 4x^2 - 5x$

2. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $a - b = 4; b - c = -2$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$

3. Cho các số $a = \underbrace{111\dots111}_{n \text{ chữ số } 1}; b = 1\underbrace{00\dots00}_{n-1 \text{ chữ số } 0}5$

Chứng minh rằng $ab + 1$ là số chính phương

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức

$$M = \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{3-x}{3+x} - \frac{4x^2}{x^2-9} \right) \cdot \frac{3x^2-x^3}{x^2-4x} \quad (\text{với } x \neq 0; x \neq 4; x \neq \pm 3)$$

2. Tìm các số a, b sao cho đa thức $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ đồng thời chia hết cho hai đa thức $x-2$ và $x+1$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Cho phương trình: $\frac{x}{x-1} + \frac{m}{x+2} = 1$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m = 1$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2y + 4xy - x + 4y - 1 = 0$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$.

1. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác vuông cân.

2. Gọi E là giao điểm của AD với BN , F là giao điểm của AM với BD . Chứng minh rằng $EF \parallel DM$.

3. Gọi K là giao điểm của MN với BD , AK cắt DC ở H . Lấy các điểm P, Q, I lần lượt là trung điểm của $BH; BE, EH; AQ$ cắt CP tại J . Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài 5: (1,0 điểm) Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+4b^2} + \frac{c}{1+9c^2} = \frac{abc(5a+16b+27c)}{(a+2b)(a+3c)(2b+3c)}$

Biết các số a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{ab} = 6$ và các biểu thức có nghĩa.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN
TRƯỜNG THCS ABC
Năm học: 2020-2021
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm)1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 4x^2 - 5x$ 2. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $a - b = 4; b - c = -2$.Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$ 3. Cho các số $a = \underbrace{111\dots111}_{n \text{ chữ số } 1}; b = 1 \underbrace{00\dots00}_{n-1 \text{ chữ số } 0} 5$ Chứng minh rằng $ab + 1$ là số chính phương**Lời giải**1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 4x^2 - 5x$

$$x^3 - 4x^2 - 5x = x(x^2 - 4x - 5)$$

$$= x[(x^2 - 4x + 4) - 9] = x[(x - 2)^2 - 3^2]$$

$$= x(x + 1)(x - 5)$$

2. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $a - b = 4; b - c = -2$.Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$

$$T = a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc = (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

3. Cho các số $a = \underbrace{111\dots111}_{n \text{ chữ số } 1}; b = 1 \underbrace{00\dots00}_{n-1 \text{ chữ số } 0} 5$ Chứng minh rằng $ab + 1$ là số chính phương

$$b = 1 \underbrace{00\dots00}_{n-1 \text{ chữ số } 0} 5 = \underbrace{100\dots00}_{n \text{ chữ số } 0} + 5 = \underbrace{99\dots99}_{n \text{ chữ số } 0} + 6 = 9 \underbrace{11\dots11}_{n \text{ chữ số } 0} + 6$$

$$\Rightarrow b = 9a + 6$$

$$\text{Ta có: } ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2$$

Vì $a = \underbrace{111\dots111}_{n \text{ chữ số } 1}$ nên $ab + 1$ là số chính phương**Bài 2: (4,0 điểm)**

1. Rút gọn biểu thức

$$M = \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{3-x}{3+x} - \frac{4x^2}{x^2-9} \right) \cdot \frac{3x^2-x^3}{x^2-4x} \quad (\text{với } x \neq 0; x \neq 4; x \neq \pm 3)$$

2. Tìm các số a, b sao cho đa thức $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ đồng thời chia hết cho hai đa thức $x - 2$ và $x + 1$ **Lời giải**1. Với $x \neq 0, x \neq 4, x \neq \pm 3$

Ta có:
$$M = \left(\frac{3+x}{3-x} - \frac{3-x}{3+x} - \frac{4x^2}{x^2-9} \right) \cdot \frac{3x^2-x^3}{x^2-4x}$$

$$= \frac{(3+x)^2}{(3-x)(3+x)} - \frac{(3-x)^2}{(3+x)(3-x)} + \frac{4x^2}{(3+x)(3-x)} \cdot \frac{x^2(3-x)}{x(x-4)}$$

$$= \frac{9+6x+x^2 - (9-6x+x^2) + 4x^2}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x(3-x)}{(x-4)}$$

$$= \frac{12x+4x^2}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x(3-x)}{(x-4)} = \frac{4x(3+x)}{(3-x)(3+x)} \cdot \frac{x(3-x)}{(x-4)} = \frac{4x^2}{x-4}$$

Vậy với $x \neq 0, x \neq 4, x \neq \pm 3$ thì $M = \frac{4x^2}{x-4}$

2. Ta có:

$$P(x) = (x-2)(x^2+a) + b + 2a$$

$$P(x) = (x+1)(x^2-3x+a+3) + b - a - 3$$

Vì $P(x)$ đồng thời chia hết cho $x-2$ và $x+1$ nên $b+2a=0$ và $b-a-3=0$

Tìm được $a=-1$ và $b=2$

Vậy với $a=-1, b=2$ thì $P(x)$ đồng thời chia hết cho $x-2$ và $x+1$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Cho phương trình: $\frac{x}{x-1} + \frac{m}{x+2} = 1$ (m là tham số)

a) Giải phương trình với $m=1$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2y + 4xy - x + 4y - 1 = 0$

Lời giải hsg

1.

a) ĐKXĐ: $x \neq 1, x \neq -2$

Với $m=1$ ta có phương trình $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+2} = 1$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x(x+2) + x-1}{(x-1)(x+2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)} = 1$$

$$\Rightarrow x^2+3x-1 = (x-1)(x+2) \Leftrightarrow x^2+3x-1 = x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (t/m đkxđ)}$$

Vậy với $m=1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$

$$\text{b) } \frac{x}{x-1} + \frac{m}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x(x+2) + m(x-1)}{(x-1)(x+2)} = 1$$

$$\Rightarrow x^2+2x+mx-m = x^2+x-2 \Leftrightarrow (m+1)x = m-2 \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x \neq 1$ và $x \neq -2$

Phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Với $m \neq -1$ phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \frac{m-2}{m+1}$

Để $x = \frac{m-2}{m+1}$ là nghiệm của phương trình đã cho thì $\frac{m-2}{m+1} \neq 1, \frac{m-2}{m+1} \neq -2 \Rightarrow m \neq 0$

Vậy $m \neq -1, m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m-2}{m+1}$

$$2) x^2y + 4xy - x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y(x^2 + 4x + 4) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y(x+2)^2 = x+1 \Leftrightarrow (x+2) - y(x+2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(1-xy-2y) = 1$$

Do x, y nguyên $\Rightarrow x+2$ và $1-xy-2y$ là các số nguyên.

Mà $1 = 1.1 = (-1)(-1)$ nên ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1: $x+2 = 1$ và $1-xy-2y = 1 \Rightarrow x = -1, y = 0$

Trường hợp 2: $x+2 = -1$ và $1-xy-2y = -1 \Rightarrow x = -3, y = -2$

Vậy $(x, y) \in \{(-1; 0), (-3; 2)\}$

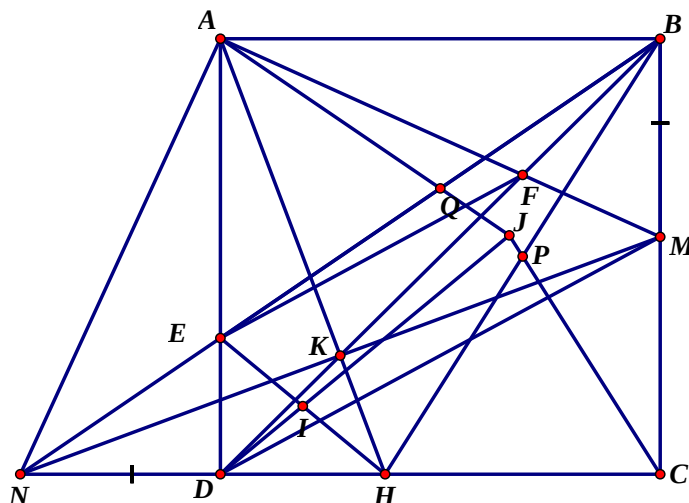
Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N , sao cho $BM = DN$.

1. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác vuông cân.

2. Gọi E là giao điểm của AD với BN , F là giao điểm của AM với BD . Chứng minh rằng $EF \parallel DM$.

3. Gọi K là giao điểm của MN với BD , AK cắt DC ở H . Lấy các điểm P, Q, I lần lượt là trung điểm của $BH; BE, EH; AQ$ cắt CP tại J . Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải



1) Chứng minh được $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AM = AN \text{ và } \widehat{BAM} = \widehat{DAN} \text{ (2 góc tương ứng)} \quad (1)$$

Mà $\widehat{BAM} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (vì $ABCD$ là hình vuông)

$$\Rightarrow \widehat{DAN} + \widehat{MAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle AMN$ vuông cân

$$2) \Delta END \text{ có } AB // CD \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{DN}{AB} \text{ (hệ quả talet) } (3)$$

$$\Delta BFM \text{ có } BM // AD \Rightarrow \frac{FM}{FA} = \frac{BM}{DA} \text{ (hệ quả talet) } (4)$$

Mà $DN = BM$ (gt); $DN = BM$ (gt) và $AB = AD$ (cạnh hình vuông ABCD)

Nên từ (3) và (4), ta có: $\frac{ED}{EA} = \frac{FM}{FA}$

Xét ΔADM có: $E \in AD, F \in AM$ Mà $\frac{ED}{EA} = \frac{FM}{FA}$ (cmt)

Nên: $EF // DM$ (talet đảo)

$$3) \text{ HS chứng minh được } S_{JAB} + S_{JDC} = S_{JBC} + S_{JAD}$$

$$S_{JAB} + S_{JDH} + S_{JHC} = S_{JEA} + S_{JED} + S_{JBC} \quad (1)$$

Mà Q là trung điểm của BE . HS chứng minh được $S_{JAB} = S_{JEA}$

P là trung điểm của BH . HS chứng minh được $S_{JHC} = S_{JBC}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $S_{JDH} = S_{JED}$

Mà E và H nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ JD

Gọi EH giao với JD là I' , h_1, h_2 là khoảng cách từ E và H đến JD

Vì $S_{JDH} = S_{JED}$ nên $h_1 = h_2$

Từ đó chứng minh I' là trung điểm của EH . Vậy I' trùng I

Vậy D, I, J thẳng hàng.

Bài 5: (1,0 điểm) Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+4b^2} + \frac{c}{1+9c^2} = \frac{abc(5a+16b+27c)}{(a+2b)(a+3c)(2b+3c)}$

Biết các số a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{ab} = 6$ và các biểu thức có nghĩa.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{ab} = 6 \Rightarrow a + 2b + 3c = 6abc$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+a^2} &= \frac{6abc}{6bc+a6abc} = \frac{6abc}{6bc+a(a+2b+3c)} = \frac{6abc}{(a+3c)(a+2b)} \\ \frac{b}{1+4b^2} &= \frac{3abc}{3ac+2b.6abc} = \frac{3abc}{3ac+2b(a+2b+3c)} = \frac{3abc}{(a+2b)(2b+3c)} \\ \frac{c}{1+9c^2} &= \frac{2abc}{2ab+3c.6abc} = \frac{2abc}{2ab+3c(a+2b+3c)} = \frac{2abc}{(a+3c)(2b+3c)} \\ \Rightarrow VT &= abc \left(\frac{6}{(a+3c)(a+2b)} + \frac{3}{(a+2b)(2b+3c)} + \frac{2}{(a+3c)(2b+3c)} \right) \\ &= \frac{abc(5a+16b+27c)}{(a+2b)(a+3c)(2b+3c)} \end{aligned}$$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ SÀM SƠN
ĐỀ THI THỬ SỐ 83

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2020 - 2021
 Thời gian làm bài: 120 phút
 (Đề thi này có 05 câu, gồm 01 trang)

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

1. Rút gọn biểu thức P ;
2. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ biết $P(x)$ chia cho $(x-1)$ thì dư 1, $P(x)$ chia cho (x^3+1) thì dư x^2+x+1 .
2. Giải phương trình $(x-3)(x-5)(x-6)(x-10) - 24x^2 = 0$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.
2. Cho số nguyên tố $p > 3$ và hai số nguyên dương a, b sao cho: $p^2 + a^2 = b^2$.
 Chứng minh a chia hết cho 12.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB ($M \neq A, B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông $AMCD, BMEF$ và giao điểm hai đường chéo mỗi hình vuông lần lượt là O, O' . Gọi H là giao điểm của AE và BC .

1. Chứng minh rằng: $AE \perp BC$;
2. Gọi I là giao của AC và BE . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng DF và ba điểm H, D, F thẳng hàng;
3. Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB .

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1}$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8**THÀNH PHỐ SÀM SƠN****Năm học: 2020 - 2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)**

Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

1. Rút gọn biểu thức P ;
2. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1.ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x^2}{x-1}$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$2. \text{Ta có: } P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in \{1; -1\} \Rightarrow x \in \{0; 2\}$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta được $x = 2$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x^3+1)$ biết $P(x)$ chia cho $(x-1)$ thì dư 1, $P(x)$ chia cho (x^3+1) thì dư x^2+x+1 .

$$2. \text{Giải phương trình } (x-3)(x-5)(x-6)(x-10) - 24x^2 = 0$$

Lời giải

1.Đặt $P(x) = (x-1)(x^3+1).Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$ với mọi x

$$\text{Vì } ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x^3+1) + bx^2 + cx + d - a$$

Từ $P(x)$ chia cho x^3+1 dư x^2+x+1

$$\text{suy ra } bx^2 + cx + d - a = x^2 + x + 1. \text{ Do đó } b=1; c=1; d-a=1$$

Lại có $P(x)$ chia cho $x-1$ dư 1

$$\text{Nên } P(1) = 1 \text{ hay } a + b + c + d = 1 \Rightarrow a + d = -1 \Rightarrow d = 0; a = -1$$

Vậy đa thức dư là: $-x^3 + x^2 + x$

2. Với $x = 0$, ta có $(0-3)(0-5)(0-6)(0-10) - 24.0^2 = 0$ (vô lí) $\Rightarrow x = 0$ không thỏa

mẫu đề cho.

Với $x \neq 0$, Ta có: $(x^2 - 11x + 30)(x^2 - 13x + 30) - 24x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 11 + \frac{30}{x}\right)\left(x - 13 + \frac{30}{x}\right) - 24 = 0$. Đặt $y = x + \frac{30}{x}$ khi đó ta có phương trình:

$$(y - 11)(y - 13) - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ y = 17 \end{cases} \text{ (T/m)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{30}{x} = 7 \quad (1) \\ x + \frac{30}{x} = 17 \quad (2) \end{cases}$$

+) Giải (1) $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 30 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} > 0$ đúng $\forall x$

$\Rightarrow$ không có giá trị của x thỏa mãn.

+) Giải (2) $\Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 15 \end{cases} \text{ (T/m)}$

Vậy $x \in \{2; 15\}$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

2. Cho số nguyên tố $p > 3$ và hai số nguyên dương a, b sao cho: $p^2 + a^2 = b^2$.

Chứng minh a chia hết cho 12.

Lời giải

1. Gọi số đo 3 cạnh của tam giác là x, y, z trong đó z là cạnh huyền ($x, y, z \in \mathbb{Z}^+$).

Ta có: $xy = 2(x + y + z)$ (1) (theo đề bài)

và $x^2 + y^2 = z^2$ (2) (theo định lý Pitago)

Từ (2): $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$ thay (1) vào ta được:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z) \Leftrightarrow z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 = (x + y - 2)^2 \Leftrightarrow z + 2 = x + y - 2 \Leftrightarrow z = x + y - 4 \text{ thay vào (1) ta được}$$

$$xy = 2(x + y + x + y - 4) \Leftrightarrow xy - 4x - 4y = -8 \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4 = (-1).(-8) = (-2).(-4)$$

Vậy $(x; y; z) = (5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10)$.

2. Ta có: $p^2 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow p^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \Rightarrow b + a$ và $b - a$ phải là ước dương của p^2 . Mà do p nguyên tố nên ước dương của p^2 là 1; p và p^2 .

Do $b+a > b-a$ với mọi a, b nguyên dương và p nguyên tố lớn hơn 3 nên không xảy ra trường hợp $b+a = b-a = p$

$$\text{Do đó } \begin{cases} b+a = p^2 \\ b-a = 1 \end{cases} \Rightarrow (b+a) - (b-a) = p^2 - 1 \Rightarrow 2a = p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$$

Mà p nguyên tố và $p > 3$, suy ra p lẻ nên $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Suy ra $(p+1)(p-1) : 8 \Rightarrow 2a : 8$ nên $a : 4$. (1)

Lại có $p-1; p; p+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên trong đó phải có 1 số chia hết cho 3.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 $\Rightarrow p-1$ hoặc $p+1$ phải chia hết cho 3 $\Rightarrow (p+1)(p-1) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với ƯCLN(3, 4) = 1 $\Rightarrow a : 12$

Vậy với nguyên tố $p > 3$ và 2 số nguyên dương a, b sao cho: $p^2 + a^2 = b^2$ thì $a : 12$.

Bài 4: (6,0 điểm)

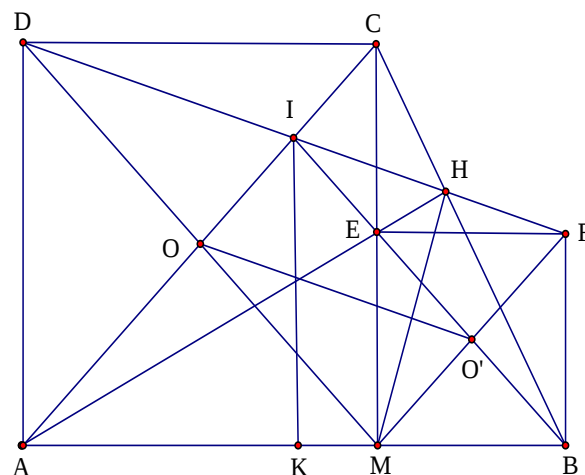
Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB ($M \neq A, B$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông $AMCD, BMEF$ và giao điểm hai đường chéo mỗi hình vuông lần lượt là O, O' . Gọi H là giao điểm của AE và BC .

1. Chứng minh rằng: $AE \perp BC$.

2. Gọi I là giao của AC và BE . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng DF và ba điểm H, D, F thẳng hàng.

3. Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB .

Lời giải



$$1. \triangle AME = \triangle CMB (c.g.c) \Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{BCM}$$

Mà $\widehat{BCM} + \widehat{MBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAM} + \widehat{MBC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$ Vậy $AE \perp BC$

2. Từ GT $\Rightarrow \widehat{DMA} = \widehat{IBA} = 45^\circ \Rightarrow DM \parallel IB$. Tương tự có: $AC \parallel MF$

Từ đó: $OMO'I$ là hình bình hành $\Rightarrow OI = O'M$ và $OI \parallel O'M \Rightarrow OI = O'F$ và $OI \parallel MF$ nên $OIFO'$ là hình bình hành. Do đó: $IF \parallel OO'$ và $IF = OO'$ (1)

Chứng minh tương tự, ta cũng có $DI \parallel OO'$ và $DI = OO'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm D, I, F thẳng hàng và $DI = IF$ nên I là trung điểm của đoạn thẳng DF .

Gọi O là giao điểm của AC và DM . $\triangle AHC$ ($\widehat{H} = 90^\circ$) có HO là đường trung tuyến

$$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM \Rightarrow \triangle DHM \text{ vuông tại } H. \text{ Do đó: } \widehat{DHM} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{MHF} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{DHM} + \widehat{MHF} = 180^\circ$. Vậy ba điểm D, H, M thẳng hàng.

3. Vì I là trung điểm của DF , Kẻ $IK \perp AB$ ($K \in AB$) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình của

$$\text{hình thang } ABFD \Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \text{ (không đổi)}$$

Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định. Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB .

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1}$$

Lời giải

Ta có: $(a+1)^2 + b^2 + 1 = (a^2 + b^2) + 2a + 2 \geq 2ab + 2a + 2 = 2(ab + a + 1) > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq \frac{1}{2(ab + a + 1)}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = b$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{1}{(b+1)^2 + c^2 + 1} \leq \frac{1}{2(bc + b + 1)}; \quad \frac{1}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \leq \frac{1}{2(ac + c + 1)}.$$

Từ đó suy ra:

$$S \leq \frac{1}{2(ab + a + 1)} + \frac{1}{2(bc + b + 1)} + \frac{1}{2(ca + c + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{abcb + abc + bc} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{b}{abc + bc + b} \right)$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{bc + b + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{bc + b + 1}{bc + b + 1} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow S \leq \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $\text{Max } S = \frac{1}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN CẨM THỦY
ĐỀ THI SỐ 87

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 8
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = \frac{0,5x^2 + x + 2}{1 + 0,5x} : \frac{x^3 - 8}{x + 2} + \frac{2}{x(2 - x)}$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm x để $P \leq \frac{1}{1 - x}$.

2. Cho $a = \frac{x}{x^2 - x + 1}$. Tính theo a giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho phương trình: $x - a^2x - \frac{1}{1 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

a) Giải phương trình khi $a = 2$;

b) Tìm a để phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x + 1$ dư 4, khi chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y + 1 = x^2 + 2xy + 2x + y$

2. Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được 2 số gọi là a và b sao cho $(a^2 - b^2) : 11$

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và điểm N trên cạnh AB . Cho biết tia CN cắt tia DA tại E , tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF .

a) Chứng minh B, D, M thẳng hàng;

b) Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$.

c) Xác định vị trí của điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác $ACFBE$ có diện tích bằng 3 lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a + b \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b}$$

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ VÀO 10 THPT MÔN TOÁN**TRƯỜNG THCS ABC****Năm học: 2020-2021****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)**

1. Cho biểu thức $P = \frac{0,5x^2 + x + 2}{1 + 0,5x} : \frac{x^3 - 8}{x + 2} + \frac{2}{x(2 - x)}$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tìm x để $P \leq \frac{1}{1 - x}$.

2. Cho $a = \frac{x}{x^2 - x + 1}$. Tính theo a giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$.

Lời giải

1. Cho biểu thức $P = \frac{0,5x^2 + x + 2}{1 + 0,5x} : \frac{x^3 - 8}{x + 2} + \frac{2}{x(2 - x)}$. ĐKXĐ $x \neq 0, x \neq \pm 2$

a) Khi đó:

$$P = \frac{x^2 + 2x + 4}{2 + x} \cdot \frac{x + 2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} - \frac{2}{x(x - 2)} = \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{x(x - 2)} = \frac{x - 2}{x(x - 2)} = \frac{1}{x}$$

b) Để $P \leq \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x(x - 1)} \leq 0$

TH1: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x(x - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$

TH2: $\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ x(x - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x < 0 \cup x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$

Vậy $x < 0 \cup \frac{1}{2} \leq x < 1$ là giá trị cần tìm.

2. Ta có: $P = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2 - x^2} = \frac{x^2}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = a \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1}$

- Nếu $x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow P = 0$

- Nếu $x \neq 0 \Rightarrow P = a \cdot \frac{x}{x^2 + x + 1} = a \cdot \frac{1}{\frac{x^2 - x + 1}{x} + 2} = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} + 2} = \frac{a^2}{2a + 1}$. Vậy: $P = \frac{a^2}{2a + 1}$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho phương trình: $x - a^2x - \frac{1}{1 - x^2} + a = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

a) Giải phương trình khi $a = 2$;

b) Tìm a để phương trình có nghiệm duy nhất.

2. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

Lời giải

1. a) Thay $a=2$ vào phương trình ta được: $x-4x-\frac{1}{1-x^2}+2=\frac{x^2}{x^2-1}$. ĐKXĐ $x \neq \pm 1$

Khi đó ta có: $-3x+2=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow -3x+2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

b) Với $x \neq \pm 1$ ta có: $(1-a^2)x+a=\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow (1-a^2)x=1-a$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi: $\begin{cases} 1-a^2 \neq 0 \\ 1+a \neq 1 \\ 1+a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \pm 1 \\ a \neq 0 \\ a \neq -2 \end{cases}$

1. Giả sử $f(x)=(x+1)(x^2+1).g(x)+ax^2+bx+c$

+ Vì $f(x)$ chia cho $x+1$ dư 4 nên $f(-1)=4 \Leftrightarrow a-b+c=4$ (1)

Mà

$$f(x)=(x+1)(x^2+1).g(x)+a(x^2+1)+bx+c-a=(x^2+1)[(x+1).g(x)+a]+bx+c-a$$

+ Vì $f(x)$ chia cho x^2+1 được thương là $2x+3$ nên: $\begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=a+3 \end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $a-2+a+3=4 \Leftrightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow b=2, c=\frac{9}{2}$

Vậy đa thức dư là: $\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{9}{2}$

Bài 3: (0,0 điểm)

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y+1=x^2+2xy+2x+y$

2. Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được 2 số gọi là a và b sao cho $(a^2-b^2):11$

Lời giải

1. Ta có:

$$x^2y+1=x^2+2xy+2x+y \Leftrightarrow (x^2-2x-1)y=x^2+2x-1 \Leftrightarrow (x^2-2x-1)y=(x^2-2x-1)+4x$$

+ Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2-2x-1 \neq 0$ nên

$$y=1+\frac{4x}{x^2-2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4x}{x^2-2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2x(x-2)}{x^2-2x-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-2x-1)+4}{x^2-2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4}{x^2-2x-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4:(x^2-2x-1)$$

Bảng giá trị nguyên tương ứng:

$x^2 - 2x - 1$	-1		1	-2	2		-4	4
x	0	2	loại	1	-1	3	Loại	Loại
y	1	-7		-1	-1	7		

Vậy $(x, y) \in \{(0;1), (2;-7), (1;-1), (-1;-1), (3;7)\}$

2. Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được 2 số gọi là a và b sao cho $(a^2 - b^2):11$

Trong 11 số nguyên tố phân biệt lẻ lớn hơn 2 có ít nhất 9 số nguyên tố lẻ lớn hơn 5 nên theo nguyên lí Diricle luôn có ít nhất 2 số khi chia cho 5 có cùng số dư. Giả sử hai số nguyên tố lẻ lớn hơn 5 đó là hai số $a, b (a > b > 5) \Rightarrow (a-b):5 \Rightarrow (a-b)(a+b):5 \Rightarrow (a^2 - b^2):5$ (1)

+) Vì a, b là hai số nguyên tố lẻ lớn hơn 5 nên $(a-b)$ và $(a+b)$ là hai số chẵn

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-b):2 \\ (a+b):2 \end{cases} \Rightarrow (a-b)(a+b):4 \Rightarrow (a^2 - b^2):4 \quad (2)$$

+) Vì a, b là hai số nguyên tố lẻ lớn hơn 5

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow (a^2 - b^2) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (a^2 - b^2):3 \quad (3)$$

+) Vì $\text{UCLN}(3,4,5) = 1$ (4)

Nên từ (1), (2), (3) và (4) suy ra: $(a^2 - b^2):3.4.5 \Rightarrow (a^2 - b^2):60$

Bài 4: (0,0 điểm)

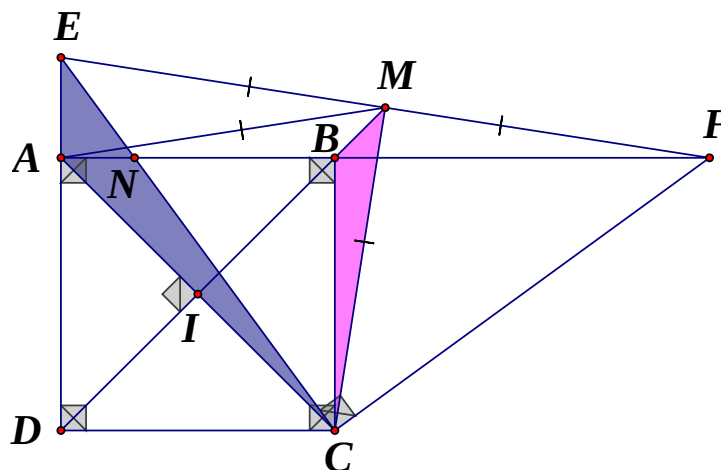
Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và điểm N trên cạnh AB . Cho biết tia CN cắt tia DA tại E , tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF .

a) Chứng minh B, D, M thẳng hàng;

b) Chứng minh $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$;

c) Xác định vị trí của điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác $ACFE$ có diện tích bằng 3 lần diện tích hình vuông $ABCD$.

Lời giải



a) +) Vì $\triangle AEF$ vuông tại A , trung tuyến AM nên $AM = ME = MF$

+) $\triangle CEF$ vuông tại C , trung tuyến CM nên $CM = ME = MF$

$\Rightarrow MA = MC \Rightarrow M$ thuộc trung trực của AC (1)

Mặt khác: Do $ABCD$ là hình vuông nên $BA = BC = DA = DC \Rightarrow BD$ là trung trực của AC (2). Từ (1) và (2) suy ra B, D, M thẳng hàng.

b) +) Vì: $\widehat{MCF} + \widehat{MCE} = 90^\circ = \widehat{DCE} + \widehat{MCE} \Rightarrow \widehat{MCF} = \widehat{DCE}$

Xét $\triangle DCE$ và $\triangle BCF$ có:

$$\widehat{D} = \widehat{B} = 90^\circ (gt)$$

$$DC = BC (gt)$$

$$\widehat{MCF} = \widehat{DCE} (c/m \text{ trên})$$

$\Rightarrow \triangle DCE = \triangle BCF (g.c.g) \Rightarrow CE = CF \Rightarrow \triangle CEF$ vuông cân tại $C \Rightarrow CM$ cũng là đường phân

$$\widehat{ECF} \Rightarrow \widehat{ECM} = 45^\circ = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACE} + \widehat{BCE} = \widehat{BCE} + \widehat{BCM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{BCM} \quad (3)$$

+) Vì: $\widehat{EAC} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{MBC} = 135^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle EAC$ đồng dạng với $\triangle MBC$.

c) Đặt $AE = x (0 \leq x \leq a) \Rightarrow S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = S_{ABC} + S_{DCE} + S_{AEF}$

$$\Rightarrow S_{ACFE} = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} DC \cdot DE + \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a(a+x) + \frac{1}{2} x(a+x)$$

$$\Rightarrow S_{ACFE} = a^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} x^2 + ax$$

Theo đề bài:

$$S_{ACFE} = 3S_{ABCD} \Rightarrow a^2 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} x^2 + ax = 3a^2 \Leftrightarrow x^2 + 3ax - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+4a) = 0$$

$$\text{Vì } 0 \leq x \leq a \Rightarrow x = a \Rightarrow AE = AB = a \Rightarrow \triangle AEN = \triangle BCN (g.c.g) \Rightarrow AN = BN$$

Hay N là trung điểm của AB .

Bài 5: (0,0 điểm)

Cho 2 số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a + b \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b}$$

Lời giải

$$+) \text{ Từ } a + b \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 1 \Leftrightarrow 4a \leq \frac{1}{b} \Leftrightarrow 4a^2 \leq \frac{a}{b} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} \leq -4a^2$$

+) Khi đó:

$$A = a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq a^2 - \frac{3}{4a} - 4a^2 = -3 \left(a^2 + \frac{1}{4a} \right) = -3 \left(a^2 + \frac{1}{8a} + \frac{1}{8a} \right) \leq -3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{1}{8a} \cdot \frac{1}{8a}} \leq -\frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy GTLN của $A = -\frac{9}{4}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$

**PHÒNG GD&ĐT
HUYỆN NHƯ XUÂN**

**ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2020 – 2021
MÔN TOÁN 8
Thời gian làm bài: 120 phút**

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A
- Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

- Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) $x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$

- Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư.

Bài 3: (4,0 điểm)

- Chứng minh rằng: $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n chẵn
- Tìm các nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình $7x - xy - 3y = 0$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$, lấy điểm M trên BD sao cho $MB \neq MD$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Đường thẳng qua M và song song với AD cắt AB và CD lần lượt tại K và H

- Chứng minh $KF \parallel EH$
- Chứng minh: các đường thẳng EK, HF, BD đồng qui
- Chứng minh: $S_{MKAE} = S_{MHCF}$

Bài 5: (2,0 điểm) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2020 – 2021
MÔN TOÁN 8
Thời gian làm bài: 120 phút
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A
b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 2; x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(2 - x) - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^3 - 4x + 2x^2 - 4x^2}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{x(x + 1) - 2(x + 1)}{x^2} \\ &= \frac{-x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

b) *) $\frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 1 : 2x \Rightarrow 2x + 2 : 2x$, mà $2x : 2x$

$\Rightarrow 2 : 2x \Rightarrow 1 : x \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

*) Ta thấy $x = 1$ hoặc $x = -1$ (TM ĐKXĐ)

Vậy $A = \frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) $x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$

2. Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 24, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư.

Lời giải

1. a) Ta có: $x^3(x^2 - 7)^2 - 36x = x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6)$

$$= x(x+1)(x-3)(x+2)(x-1)(x-2)(x+3)$$

b) Ta có: $x^4 + 2021x^2 + 2020x + 2021$

$$= x^4 + x^3 + x^2 + 202x^2 + 2020x + 2020 - x^3 + 1$$

$$= x^2(x^2 + x + 1) + 2020(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2020 - x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2021)$$

2. Giả sử $f(x) = x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó

$$f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + ax + b$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} f(2) = 24 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 24 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\text{Vậy đa thức cần tìm là: } f(x) = -5x^3 + \frac{47}{2}x + 17$$

Bài 3: (4,0 điểm)

1. Chứng minh rằng: $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n chẵn

2. Tìm các nghiệm nguyên dương $(x; y)$ của phương trình $7x - xy - 3y = 0$

Lời giải

1. Ta có: $A = n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n+2)(n+4)$

Vì n là số chẵn nên đặt $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), khi đó:

$$A = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$$

Vì $k(k+1)(k+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên:

- Tồn tại một số là bội của 2 nên $k(k+1)(k+2):2$ nên $A:16$

- Tồn tại một số là bội của 3 nên $k(k+1)(k+2):3$

Vậy A chia hết cho 3, 16 mà $(3, 16) = 1$ nên $A:3.16 = 48$.

2. Ta có: $7x - xy - 3y = 0 \Leftrightarrow (x+3)(7-y) = 21$ (*)

Vì $x \in \mathbb{Z}^*$ nên $x+3 \geq 4$

$$\text{Từ (*) suy ra } \begin{cases} x+3=7 \\ 7-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{Hoặc } \begin{cases} x+3=21 \\ 7-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=6 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là: $(x; y) = (4; 4); (x; y) = (18; 6)$.

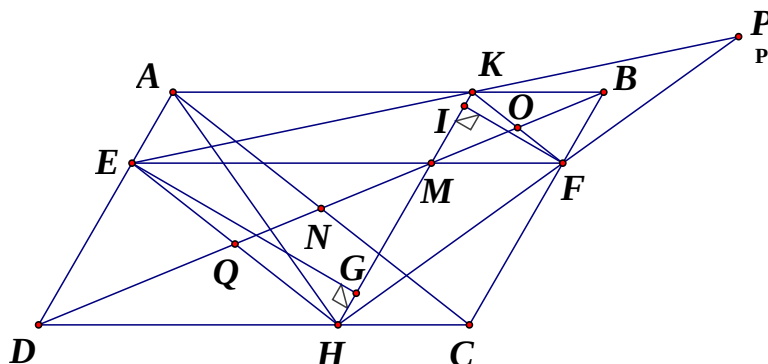
Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$, lấy điểm M trên BD sao cho $MB \neq MD$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Đường thẳng qua M và song song với AD cắt AB và CD lần lượt tại K và H

1. Chứng minh $KF \parallel EH$

2. Chứng minh: các đường thẳng EK, HF, BD đồng quy

3. Chứng minh: $S_{MKA E} = S_{MHCF}$

Lời giải



1.

Chứng minh được: $\frac{MF}{ME} = \frac{BF}{DE} = \frac{BF}{FC}$ (hệ quả định lý Ta – lét)

Chứng minh được: $\frac{BK}{AK} = \frac{MB}{MD} = \frac{MF}{ME}$ (định lý Ta – lét)

Suy ra $\frac{BK}{AK} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow KF \parallel AC$ (định lý Ta – lét đảo)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel AC$

Kết luận $KF \parallel EH$

2. Gọi giao điểm của BD với KF và HE lần lượt là O và Q . N là giao điểm của AC và BD .

Chứng minh được $\frac{OK}{OF} = \frac{QE}{QH} = 1$

Gọi giao điểm của đường thẳng EK và HF là P , giao điểm của đường thẳng EK và DB là P' .

Chứng minh được P và P' trùng nhau.

Kết luận các đường thẳng EK, HF, BD đồng quy tại P .

3. Kẻ EG và FI vuông góc với HK , I và G thuộc HK .

Chỉ ra được: $S_{MKA E} = MK \cdot EG$; $S_{MHCF} = MH \cdot FI$

Chứng minh được: $\frac{MK}{MH} = \frac{KB}{HD}$

Suy ra $\frac{MK}{MH} = \frac{MF}{ME}$

Chứng minh được: $\frac{MF}{ME} = \frac{FI}{EG}$

Suy ra $\frac{MK}{MH} = \frac{FI}{EG}$, suy ra $MK \cdot EG = MH \cdot FI$

Suy ra $S_{MKA E} = S_{MHCF}$ (đpcm)

Bài 5: (2,0 điểm) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT: với $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) = xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Áp dụng BĐT (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Ta có:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{vì } abc=1)$$

Hay
$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ (vì $a, b, c > 0$) nên
$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm)

===== **HẾT** =====

**PHÒNG GD&ĐT
TRƯỜNG THCS THỌ XUÂN**

ĐỀ THI HSG TOÁN 8

Bài 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x^3} + \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x}{1 - x^2} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

với $x \neq \pm 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức A^2 nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{4}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3}{4x^2 - 10x + 7} = \frac{1}{x}$.

2) Cho 3 số thực x, y, z khác 0 và khác nhau đôi một thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tính giá trị của

biểu thức: $A = \frac{x^2}{yz + 2x^2} + \frac{y^2}{zx + 2y^2} + \frac{z^2}{xy + 2z^2}$

Bài 3: (4,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(1 - y)x^2 + (1 + y)x - y = 0$.

2) Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên tố lớn hơn 2 thì $a^5b - ab^5$ chia hết cho 240.

Bài 4: (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, Lấy điểm I nằm giữa hai điểm A và B , điểm K nằm giữa hai điểm B và C sao cho $AI = BK$. Gọi E là giao điểm của AK và DI , O là giao điểm AC và BD . Đường thẳng qua E song song với AB cắt AD tại F . Chứng minh rằng.

1) AK vuông góc với DI .

2) $DE^2 = DF \cdot DA$

3) EO là phân giác góc DEK .

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2xy = x + y$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x}{1 + 2x^2} + \frac{y}{1 + 2y^2}$.

(Chú ý: bài hình câu 4 chỉ dùng kiến thức không vượt quá chương 2 hình học)

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN HOÀNG HÓA ĐỀ THI OLYMPIC LỚP 8 NĂM HỌC 2018 – 2019**Môn: Toán**

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể giao đề)

Đề thi gồm có: 01 trang

Bài 1: (4,0 điểm)

- Cho biểu thức $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x}{x^2-x} \right)$
 - Rút gọn biểu thức P.
 - Tìm các giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.
 - Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.
- Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$
 Tính giá trị của biểu thức $P = (x + 2y + z)^{2019}$

Bài 2: (4,0 điểm)

- Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $Q = 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$
- Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$.
- Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.
 Chứng minh rằng $\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$

Bài 3: (4,0 điểm)

- Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^2 + m = 5n^2 + n$. Chứng minh rằng: $(m - n) ; (5m + 5n + 1)$ đều là các số chính phương.
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + (x + 1)^2 = y^4 + (y + 1)^4$.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ đường phân giác AD (D thuộc BC). Kẻ AJ vuông góc với BC (J thuộc BC). Từ D kẻ DH, DK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc AB, K thuộc AC), BK cắt DH tại M, CH cắt DK tại N.

- Chứng minh rằng $AJ^2 = JB \cdot JC$; $\frac{HM}{MD} = \frac{BH}{HA}$.
- Chứng minh rằng MN song song BC.
- Gọi I là giao điểm của BK và CH. Chứng minh rằng tam giác ABK đồng dạng tam giác KAN và chứng minh 3 điểm A, I, J thẳng hàng.
- Gọi E là giao điểm của AM và BD, F là giao điểm của BM và AD. Chứng minh rằng:
 $\frac{AE}{ME} + \frac{BF}{MF} + \frac{DH}{MH} \geq 9$.

Bài 5: (2,0 điểm)

- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2019$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$.

- Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ac} \geq 9 + 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN LỚP 8**Năm học: 2018-2019****HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT****Bài 1: (4,0 điểm)**

- Cho biểu thức $P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : (\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x})$
 - Rút gọn biểu thức P.
 - Tìm các giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.
 - Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.
- Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$
- Tính giá trị của biểu thức $P = (x + 2y + z)^{2019}$

Lời giải

1. a)

$$P = \frac{x^2+x}{x^2-2x+1} : (\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x})$$

ĐKXD: $x \neq 1; x \neq 0$.

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : [\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)}]$$

$$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$$

1b)

$$P = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = -(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{1}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

1c)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Đề } P \in \mathbb{Z} \text{ thì } 1 : x-1 \Leftrightarrow x-1 \in U(1) = \{\pm 1\}$$

$$\Rightarrow x \in \{2; 0\}$$

2)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4 = \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \left(\frac{2}{yz} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -z$$

Thay $x = y = -z$ vào $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ta được $x = y = \frac{1}{2}$ và $z = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^{2019} = 1$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $Q = 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$
2. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x^2+7x+12) = 24$.
3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$

Lời giải

1)

$$\begin{aligned} Q &= 3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 \\ &= 3x^3 - x^2 - 9x^2 + 1 + 3x^2 - x + 18x - 6 \\ &= x^2(3x-1) - (9x^2-1) + x(3x-1) + 6(3x-1) \\ &= (3x-1)(x^2-3x-1+x+6) = (3x-1)(x^2-2x+5) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x^2+7x+12) &= 24 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= 24 \\ \text{Đặt } (x+1)(x+4) = t \Rightarrow x^2+5x+4 &= t \\ \Rightarrow t(t+2) = 24 \Leftrightarrow t^2+2t+1 &= 25 \\ \Leftrightarrow (t+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -6 \end{cases} \\ \text{Với } t = 4 \Rightarrow x^2+5x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } t = -6 \Rightarrow x^2+5x+10 = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$3) 1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = (a+b)(a+c).$$

Hoàn toàn tương tự ta có $1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2$

$$1 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = (c+a)(c+b)$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{1+c^2} = \frac{a-b}{(c+a)(c+b)} = \frac{a+c-b-c}{(c+a)(c+b)} = \frac{1}{c+b} - \frac{1}{c+a}$$

$$\frac{b-c}{1+a^2} = \frac{b-c}{(b+a)(c+a)} = \frac{b+a-a-c}{(b+a)(c+a)} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+a}$$

$$\frac{c-a}{1+b^2} = \frac{c-a}{(b+a)(c+b)} = \frac{b+c-b-a}{(b+a)(c+b)} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+b}$$

$$\text{Vậy } \frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

Bài 3: (4,0 điểm)

- Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $4m^2 + m = 5n^2 + n$. Chứng minh rằng: $(m-n); (5m+5n+1)$ đều là các số chính phương.
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$.

3. Lời giải

1)

$$\text{Ta có } 4m^2 + m = 5n^2 + n$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4n^2 + m - n = n^2$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(4m+4n+1) = n^2 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } d = \text{ƯCLN}(m-n, 4m+4n+1)$$

$$\Rightarrow (4m+4n+1) - 4(m-n) : d$$

$$\Rightarrow 8n+1 : d \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow n^2 : d^2 \Rightarrow n : d \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy $m-n$ và $4m+4n+1$ là các số nguyên tố cùng nhau thỏa mãn (1)

Nên chúng đều là các số chính phương.

2)

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4 + (y+1)^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^4 + [(y+1)^2]^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = y^2(y^2 + 2y + 1) + 2y^2 + 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2(y+1)^2 + 2y(y+1) + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = [y(y+1) + 1]^2 = (y^2 + y + 1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Nếu } x = 0 \text{ thì từ (1)} \Rightarrow 1 = (y^2 + y + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 1 \text{ hoặc } y^2 + y + 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y = 0 \text{ hoặc } y^2 + y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y + 1) = 0 \text{ hoặc } \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -1 \text{ hoặc } \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -1$$

$\Rightarrow$ Phương trình có các tập nghiệm nguyên là $(0; 0); (0; -1)$.

$$\text{Nếu } x = -1 \Rightarrow (y^2 + y + 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = -1 \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm là $(-1; 0); (-1; -1)$.

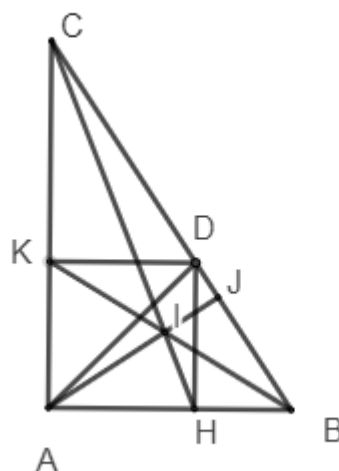
$$\text{Nếu } x < -1 \Rightarrow (x + 1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$$

$\Rightarrow$ (1) không có nghiệm nguyên $x < -1$.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ đường phân giác AD (D thuộc BC). Kẻ AJ vuông góc với BC (J thuộc BC). Từ D kẻ DH, DK lần lượt vuông góc với AB, AC (H thuộc AB, K thuộc AC), BK cắt DH tại M, CH cắt DK tại N.

1. Chứng minh rằng $AJ^2 = JB \cdot JC$ và $\frac{HM}{MD} = \frac{BH}{HA}$.
2. Chứng minh rằng MN song song BC.
3. Gọi I là giao điểm của BK và CH. Chứng minh rằng tam giác ABK đồng dạng tam giác KAN và chứng minh 3 điểm A, I, J thẳng hàng.
4. Gọi E là giao điểm của AM và BD, F là giao điểm của BM và AD. Chứng minh rằng $\frac{AE}{ME} + \frac{BF}{MF} + \frac{DH}{MH} \geq 9$.

Lời giải



- 1) Ta có $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A)

$\widehat{CAJ} + \widehat{C} = 90^\circ$ (vì tam giác AJB vuông)

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{CAJ}$$

Xét $\triangle AJC$ và $\triangle JBA$ có

$$\widehat{AJB} = \widehat{AJC} = 90^\circ$$

$$\widehat{CAJ} = \widehat{B} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AJC \sim \triangle JBA$$

$$\Rightarrow \frac{AJ}{JB} = \frac{JC}{AJ} \Rightarrow AJ^2 = JB \cdot JC$$

Xét tứ giác $AKDH$ có

$$\widehat{DHA} = \widehat{HAK} = \widehat{AKD} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AKDH$ là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow DK \parallel AH \text{ và } DH \parallel AK$$

$$DK \parallel AH \Rightarrow \triangle HMB \sim \triangle DMK$$

$$\Rightarrow \frac{HM}{DM} = \frac{MB}{MK} \quad (1)$$

$$DH \parallel AK \Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BM}{MK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HM}{MD} = \frac{BH}{HA}$

$$2) \quad \frac{MB}{MK} = \frac{HB}{HA} = \frac{ND}{NK} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel BC$$

3) Xét tứ giác $AKDH$ có $\widehat{A} = \widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$

$\Rightarrow AKDH$ là hình chữ nhật

Mà AD là phân giác của $\widehat{A}$

$$\Rightarrow AKDH \text{ là hình vuông } \Rightarrow AK = DK = DH = AH$$

$$\Rightarrow \frac{KN}{KA} = \frac{KN}{KD} = \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow \frac{KN}{KA} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow \triangle AKN \sim \triangle BAK$$

$$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{ANK}$$

$$\text{Mà } \widehat{ANK} + \widehat{NAK} = 90^\circ$$

Gọi P là giao điểm của PK và AN

$$\Rightarrow \widehat{AKB} + \widehat{NAK} = 90^\circ$$

$\Rightarrow \triangle APK$ vuông tại P hay $AN \perp BK$ tại P .

Chứng minh tương tự ta có $AM \perp CH$

$$\Rightarrow I \text{ là trực tâm của tam giác } AMN \Rightarrow AI \perp MN$$

Mà $MN \parallel AC$

Nên $AI \perp MN$

Mà $AJ \perp MN$

Do đó A, I, J thẳng hàng.

4) Đặt $S_{ABD} = S$; $S_{MBD} = S_1$; $S_{MAB} = S_2$; $S_{MAD} = S_3$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$$

Ta có $\frac{AE}{ME} + \frac{BF}{MF} + \frac{DH}{MH} = \frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2} + \frac{S}{S_3} = S \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right)$

$$= (S_1 + S_2 + S_3) \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \right) = 9$$

Bài 5: (2,0 điểm)

1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2019$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}.$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ac} \geq 9 + 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

Lời giải

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{x+x+y+z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x \cdot x \cdot y \cdot z}} = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}}$$

$$\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

Tương tự $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = \frac{2019}{4}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2019}{4} \text{ nên } P \text{ đạt GTLN là } \frac{2019}{4} \text{ khi } \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{2019}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{2019}$$

Vậy GTLN của P là $\frac{2019}{4}$

2) Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} + \frac{a^2}{ac} \geq 3 + 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 3 + 2 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{b}{a}} + \frac{1}{\frac{c}{a}} \geq \frac{4}{\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{4a}{b+c}$$

Tương tự $\frac{b}{a} + \frac{b}{c} \geq \frac{4b}{a+c}$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \geq \frac{4c}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) + 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Đặt $a+b=x$; $b+c=y$; $a+c=z$

$$\Rightarrow b = \frac{x+y-z}{2}; a = \frac{x+z-y}{2}; c = \frac{y+z-x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} + \frac{y+z-x}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) - \frac{3}{2}$$

Lại có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 2$$

$$\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

===== **HẾT** =====

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ SÀM SƠN
ĐỀ THI THỬ SỐ 92

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2019 - 2020
 Thời gian làm bài: 120 phút
 (Đề thi này có 05 câu, gồm 01 trang)

Câu 1: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức M .
 b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Câu 2: a) Giải phương trình: $\left(\frac{x-3}{x-2} \right)^3 - (x-3)^3 = 16$

b) Tìm các nghiệm tự nhiên x, y của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

Câu 3: a) Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng $n^2 + m$ không phải là số chính phương.

b) Cho p, q là hai số nguyên tố sao cho $p > q > 3$ và $p - q = 2$.

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH $H \in BC$. Trên tia HC là điểm D sao cho $HA = HD$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

a) Chứng minh $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo $m = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Chứng minh $\triangle BHM \sim \triangle BEC$. Tính số đo góc AHM .

c) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Câu 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$$

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8
THÀNH PHỐ SÀM SƠN
Năm học: 2019 - 2020

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \neq 0; 2$

$$M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

$$M = \frac{(x^2 - 2x)(x - 2) + 4x^2}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2}$$

$$M = \frac{x(x^2 + 4)}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2}$$

$$M = \frac{x + 1}{2x}$$

Vậy $M = \frac{x + 1}{2x}$ với $x \neq 0; 2$.

b) Ta có: $M = \frac{x + 1}{2x}$ với $x \neq 0; 2$

$$2M = \frac{x + 1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{Để } M \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2M \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \in U(1) \Rightarrow x \in \{1; -1\} \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{Thử lại: } x = 1 \Rightarrow 2M = 2 \Rightarrow M = 1 \in \mathbb{Z}$$

$$x = -1 \Rightarrow 2M = 0 \Rightarrow M = 0 \in \mathbb{Z}$$

Vậy $x \in \{1; -1\}$ thì M nguyên.

Câu 2: a) Giải phương trình: $\left(\frac{x - 3}{x - 2} \right)^3 - (x - 3)^3 = 16$

b) Tìm các nghiệm tự nhiên x, y của phương trình:

$$(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

Lời giải

$$a) \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^3 - (x-3)^3 = 16$$

ĐKXĐ: $x \neq 2$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-3}{x-2} - x + 3 \right)^3 + 3 \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdot (x-3) \left(\frac{x-3}{x-2} - x + 3 \right) = 16 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x-3-x^2+5x-6}{x-2} \right)^3 + \frac{3(x-3)^2}{x-2} \left(\frac{x-3-x^2+5x-6}{x-2} \right) = 16 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{-(x-3)^2}{x-2} \right]^3 + \frac{3(x-3)^2}{x-2} \cdot \frac{-(x-3)^2}{x-2} = 16 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{-(x-3)^2}{x-2} \right]^3 - 3 \cdot \left[\frac{(x-3)^2}{x-2} \right]^2 = 16 \end{aligned}$$

Đặt $\frac{(x-3)^2}{x-2} = t$

PT trở thành: $t^3 + 3t^2 + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+4)(t^2-t+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -4 \left(t^2 - t + 4 = \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ vn} \right)$$

Với $t = -4 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{x-2} = -4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

$$b) (x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 4(y^2 + 7)]^2 - 17x^4 - 17(y^2 + 7)^2 = 0$$

Đặt $\begin{cases} x^2 = a \geq 0 \\ y^2 + 7 = b > 0 \end{cases}$

PT trở thành: $(a + 4b)^2 - 17a^2 - 17b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8ab + 16b^2 - 17a^2 - 17b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 - 8ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (4a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a - b = 0 \Rightarrow 4x^2 - y^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 7$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x - y; 2x + y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 2x - y; 2x + y \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x + y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x - y = -7 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 3: a) Cho n là số nguyên dương và m là ước nguyên dương của $2n^2$. Chứng minh rằng $n^2 + m$ không phải là số chính phương.

b) Cho p, q là hai số nguyên tố sao cho $p > q > 3$ và $p - q = 2$.

Chứng minh rằng $p + q \vdots 12$.

Lời giải

a) Đặt $2n^2 = km \Rightarrow m = \frac{2n^2}{k}$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Giả sử: $n^2 + m = a^2$

$$\Leftrightarrow n^2 + \frac{2n^2}{k} = a^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 k^2 + 2n^2 k = a^2 k^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 (k^2 + 2k) = (ak)^2$$

Vì $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$ nên $n^2 + m$ không là số chính phương (đpcm)

b) Vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $q = 3k + 1, q = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $q = 3k + 1 \Rightarrow p = 3k + 3 \vdots 3$ (vì p là số nguyên tố lớn hơn 3)

Nếu $q = 3k + 2 \Rightarrow p = 3k + 4$

Vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên k lẻ $\Rightarrow k + 1$ chẵn

Ta có: $p + q = 6(k + 1) \vdots 12$ (đpcm)

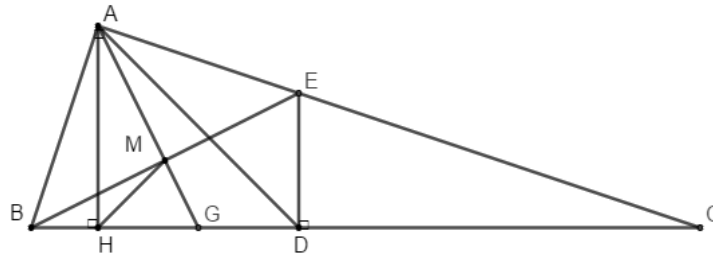
Câu 4: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HA = HD$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E .

a) Chứng minh $\triangle BEC \sim \triangle ADC$. Tính độ dài đoạn thẳng BE theo $m = AB$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Chứng minh $\triangle BHM \sim \triangle BEC$. Tính số đo góc AHM .

c) Tia AM cắt BC tại G . Chứng minh $\frac{GB}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$.

Lời giải



a) $\triangle BEC \sim \triangle ADC$

Dễ thấy $\triangle EDC \square \triangle AHC$

$$\Rightarrow \frac{EC}{DC} = \frac{AC}{HC} \quad (1)$$

Lại có: $\triangle ACH \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{EC}{CD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$

$$\Rightarrow \frac{EC}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle ADC$ có:

$$\begin{cases} \frac{EC}{BC} = \frac{CD}{AC} \\ \widehat{C}: \text{chung} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle ADC \text{ (c.g.c.)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EAD}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{ECD} = \widehat{EAD} + \widehat{ECB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEB} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow BE = AB \cdot \sqrt{2} = m\sqrt{2}$$

b) Ta có $BM \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot BE^2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} AB)^2 = AB^2$

Lại có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH \cdot BC = BM \cdot BE$

$$\Rightarrow \frac{BH}{BM} = \frac{BE}{BC}$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle BEC$ có:

$$\begin{cases} \frac{BH}{BM} = \frac{BE}{BC} \\ \widehat{B}: \text{chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BHM \square \triangle BEC \text{ (c.g.c)}$$

$$\triangle BHM \square \triangle BEC \Rightarrow \widehat{BMH} = \widehat{BEC} = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AHM} = 135^\circ - \widehat{BHA} = 45^\circ$$

c) Do $\triangle AHC \square \triangle BAC$ nên $\frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{HD}{HC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{HD}{HC+HD} = \frac{AB}{AC+AB}.$$

Do $\triangle ABE$ cân, $AM \perp BE \Rightarrow AM$ là phân giác của góc $\widehat{BAE}$.

$$\Rightarrow \frac{BG}{GC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BG}{BG+GC} = \frac{AB}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} = \frac{HD}{HA+HC}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ (1)

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x, y > 0)$$

Áp dụng vào bài ta có:

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} \leq \frac{1}{xy(x+y) + xyz} = \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

$$\text{Trong tự: } \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} \leq \frac{1}{yz(x+y+z)}$$

$$\frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq \frac{1}{zx(x+y+z)}$$

$$\text{Cộng từng vế ta được } A \leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{zx(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = 1$$

Vậy $\text{Max} A = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT QUẢNG XƯƠNG

ĐỀ THI CHỌN HSG MÔN TOÁN LỚP 8

NĂM HỌC: 2017 – 2018

ĐỀ THI HSG SỐ 105

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x^2 + 2}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tìm các giá trị của x để giá trị của P lớn hơn 2.

Bài 2: (4,0 điểm)

- a) Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{2}{xy + 1}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{2}{xy + 1}$

- b) Giải phương trình sau với m là tham số $\frac{1}{|x - 2|} = \frac{1}{|x - 6m|} \quad (1)$

Bài 3: (4,0 điểm)

- a) Tìm x, y để biểu thức sau nhận giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

$$B = 1892 - 2x^2 - y^2 + 2xy - 10x + 14y$$

- b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF gặp nhau ở H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên EF, ED

- a) Chứng minh tam giác BED đồng dạng với tam giác BCH
 b) Chứng minh $HM = HN$
 c) Gọi I, J, O, K là hình chiếu của F trên AC, AD, BE, BC . Chứng minh I, J, O, K thẳng hàng

Bài 5: (2,0 điểm) Cho các số $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

===== HẾT =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HSG MÔN TOÁN LỚP 8
PHÒNG GD&ĐT QUẢNG XƯƠNG
NĂM HỌC: 2017 – 2018
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x^2 + 2}{x} + \frac{x^3 - 1}{x^2 - x} - \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

- a) Rút gọn biểu thức P .
 b) Tìm các giá trị của x để giá trị của P lớn hơn 2.

Lời giải

a) (2đ)

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x^2 + 2}{x} + \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x^2 + 2}{x} + \frac{x^2 + x + 1}{x} - \frac{x^2 - x + 1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 2 + x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1}{x} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2}{x} \end{aligned}$$

b) (2đ) Vì $2x^2 + 2x + 2 = x^2 + (x+1)^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị của x

Suy ra $P > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{2}{xy + 1}$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{2}{xy + 1}$

b) Giải phương trình sau với m là tham số $\frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{|x-6m|} \quad (1)$

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} = \frac{2}{xy + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{xy - y^2}{(x^2 + 1)(xy + 1)} + \frac{xy - y^2}{(y^2 + 1)(xy + 1)} = 0$$

$$\Rightarrow (xy - y^2)(y^2 + 1) + (xy - y^2)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 (xy - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = 1 \text{ .(vì } x \neq y \text{)}. \text{ Suy ra } P = 2$$

b)(2đ) ĐK: $x \neq 2, x \neq 6m$

$$\text{PT (1)} \Rightarrow |x - 2| = |x - 6m|$$

$$*) \text{ Xét } x - 2 = x - 6m \Leftrightarrow 0x = 6m - 2$$

Nếu $m = \frac{1}{3}$ thì PT có vô số nghiệm $x \neq 2$

Nếu $m \neq \frac{1}{3}$ thì PT vô nghiệm.

$$*) \text{ Xét } x - 2 = -(x - 6m) \Leftrightarrow x = 3m + 1$$

$$x = 3m + 1 \text{ là nghiệm của PT nếu } \begin{cases} 3m + 1 \neq 2 \\ 3m + 1 \neq 6m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$$

Kết luận:

*) Nếu $m = \frac{1}{3}$ thì PT có vô số nghiệm $x \neq 2$

*) Nếu $m \neq \frac{1}{3}$ thì PT có nghiệm duy nhất $x = 3m + 1$

Bài 3:(4,0 điểm)

a) Tìm x, y để biểu thức sau nhận giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó

$$B = 1892 - 2x^2 - y^2 + 2xy - 10x + 14y$$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$

Lời giải

$$\text{a) (2đ)} \quad B = 1945 - (x^2 - 4x + 4) - [(y - x)^2 - 14(y - x) + 49]$$

$$B = 1945 - (x - 2)^2 - (y - x - 7)^2$$

Giả sử tồn tại cặp số (x_0, y_0) để tại đó B đạt giá trị nhỏ nhất và

$$B_m = B_0 = 1945 - (x_0 - 2)^2 - (y_0 - x_0 - 7)^2$$

*) Trường hợp $x_0 \geq 2$, xét $x_1 = y_0 - x_0 - 5, y_1 = y_0 + 1$

$$\text{Ta có } B_1 = B(x_1, y_1) = 1945 - (y_0 - x_0 - 7)^2 - (x_0 - 1)^2$$

Vì $0 \leq x_0 - 2 < x_0 - 1$ suy ra $(x_0 - 2)^2 < (x_0 - 1)^2$, suy ra $B_1 < B_0$

*) Xét trường hợp $x_0 < 2$, xét $x_2 = y_0 - x_0 - 5, y_2 = y_0 - 1$

$$\text{Ta có } B_2 = B(x_2, y_2) = 1945 - (y_0 - x_0 - 7)^2 - (x_0 - 3)^2$$

Vì $x_0 - 3 < x_0 - 2 < 0$, suy ra $(x_0 - 3)^2 > (x_0 - 2)^2$, suy ra $B_2 < B_0$

Như vậy, ta luôn tìm được giá trị của B nhỏ hơn B_0 , điều đó là vô lí vì B_0 là giá trị nhỏ nhất. Vậy không tồn tại giá trị của x, y để B có giá trị nhỏ nhất.

b)(2đ) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow y > x$

Ngoài ra $(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 > 0 \Rightarrow y < x+2$

$\Rightarrow y = x+1$

Thay vào (1) tìm được $x=1$ hoặc $x=-1$.

Suy ra $(x, y) = (-1; 0)$ hoặc $(x, y) = (1; 2)$

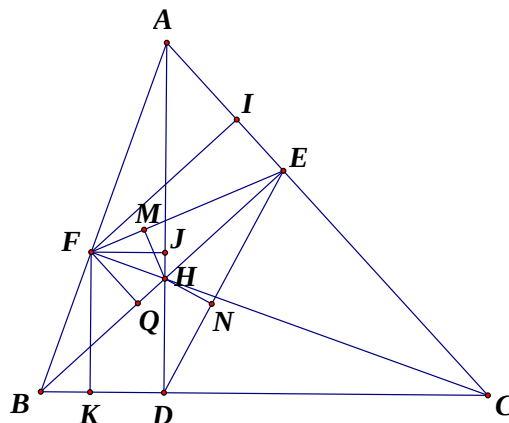
Bài 4:(6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF gặp nhau ở H . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên EF, ED

a) Chứng minh tam giác BED đồng dạng với tam giác BCH

b) Chứng minh $HM = HN$

c) Gọi I, J, O, K là hình chiếu của F trên AC, AD, BE, BC . Chứng minh I, J, O, K thẳng hàng

Lời giải



a) $\triangle BHD \sim \triangle BCE$ vì có chung $\widehat{EBC}$ và $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$

Suy ra $\frac{BH}{BC} = \frac{BD}{BE}$

Từ đó quy ra $\triangle BDE \sim \triangle HBC$ (c.g.c)

b)(2đ) $\triangle HFE \sim \triangle HBC$ (c.g.c) vì $\widehat{EHF} = \widehat{BHC}$ (đối đỉnh) và $\frac{FH}{HE} = \frac{HD}{HC}$ (do tam giác

HBF đồng dạng với tam giác HCE)

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{BCH} = \widehat{BED}$

Suy ra EB là tia phân giác của $\widehat{DEF}$ nên $HM = HN$

$$c) FI // BE \Rightarrow \frac{AI}{AE} = \frac{AF}{AB}$$

$$FJ // BD \Rightarrow \frac{AJ}{AD} = \frac{AF}{AB} \text{ Suy ra } \frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow IJ // ED \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có $KQ // DE$ (2)

$$FI // BE \Rightarrow \frac{CE}{CI} = \frac{CH}{CF}$$

$$FK // AD \Rightarrow \frac{CH}{CF} = \frac{CD}{CK} \Rightarrow KI // DE \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra I, J, O, K thẳng hàng.

Bài 5: (2,0 điểm) Cho các số $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geq 9$$

Đặt $x = a^2 + 2bc, y = b^2 + 2ac, z = c^2 + 2ab$

Ta có $x + y + z = (a + b + c)^2 \leq 1$

$$\text{Xét } A = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right)$$

Chứng minh bất đẳng thức phụ: Với $x, y > 0$ thì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Suy ra $A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$, suy ra ĐPCM.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN QUỲNH PHỤ

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8

NĂM HỌC: 2020 – 2021

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (3,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x-3} - \frac{4x-7}{x^2-5x+6} + \frac{4}{2-x}$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị là một số nguyên

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho hai đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ và $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Xác định các giá trị của a và b để đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$

2. Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 16x^2 + 30x - 5}{x^4 + 2x^2 + 17}$

Tính giá trị của M tại $x = 2 + \sqrt{3}$

Bài 3: (4,0 điểm) Cho phương trình $\frac{x+m}{x+3} + \frac{x-3}{x-m} = 2$ (1) (x là ẩn)

1. Giải phương trình (1) với $m = 4$
2. Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất là số âm

Bài 4: (2,0 điểm) Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$

Bài 5: (5,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường chéo AC ($M \neq A$ và C). Gọi $E; F$ theo thứ tự là hình chiếu của M trên AD và CD .

1. Chứng minh tứ giác $DEMF$ là hình chữ nhật
2. Chứng minh $BM \perp EF$
3. Gọi N là trung điểm của AM . Chứng minh $CE^2 = 2DN^2$

Bài 6: (2,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ đều; gọi M trung điểm của BC . Hai điểm E và F theo thứ tự lần lượt di chuyển trên cạnh AB và cạnh AC sao cho $\widehat{EMF} = 60^\circ$ ($E \neq A; F \neq A$). Chứng minh rằng chu vi của $\triangle AEF$ có giá trị không đổi

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8
PHÒNG GD&ĐT HUYỆN QUỲNH PHỤ
Năm học: 2020-2021

Bài 1: (3,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x+2}{x-3} - \frac{4x-7}{x^2-5x+6} + \frac{4}{2-x}$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị là một số nguyên

Lời giải

1. ĐKXĐ : $x \neq 2; x \neq 3$

$$A = \frac{x+2}{x-3} - \frac{4x-7}{x^2-5x+6} + \frac{4}{2-x}$$

$$A = \frac{x+2}{x-3} - \frac{4x-7}{(x-3)(x-2)} - \frac{4}{x-2}$$

$$A = \frac{(x+2)(x-2) - (4x-7) - 4(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$A = \frac{x^2 - 4 - 4x + 7 - 4x + 12}{(x-3)(x-2)}$$

$$A = \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-3)(x-2)}$$

$$A = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-2)}$$

$$A = \frac{x-5}{x-2}$$

Vậy $A = \frac{x-5}{x-2}$ với $x \neq 2; x \neq 3$

2. Giả sử tìm được giá trị của x nguyên để biểu thức A nhận giá trị là một số nguyên .

Với $x \neq 2; x \neq 3$ thì $A = \frac{x-5}{x-2} = 1 - \frac{3}{x-2}$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$3 \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) $\Leftrightarrow x-2 \in U(3)$

Ta có bảng sau

$x-2$	-3	-1	1	3
x	-1	1	3	5
Đối chiếu	tm	tm	ktm	tm

Vậy $x \in \{-1; 1; 5\}$ thì biểu thức A nhận giá trị là mọi số nguyên

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho hai đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ và $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Xác định các giá trị của a và b để đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$

2. Cho biểu thức $M = \frac{x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 16x^2 + 30x - 5}{x^4 + 2x^2 + 17}$

Tính giá trị của M tại $x = 2 + \sqrt{3}$

Lời giải

1. $Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ nên đa thức $Q(x)$ có nghiệm $x = 1$

Áp dụng định lý Bozu ta được $P(x) : Q(x) \Rightarrow P(1) = 0$

$$\Leftrightarrow a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -a - 1$$

Thay $b = -a - 1 \Rightarrow P(x) = ax^4 - ax^3 - x^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$

$$P(x) : Q(x) \Leftrightarrow ax^3 - x^2 - x - 1 : x - 1$$

Đặt $R(x) = ax^3 - x^2 - x - 1$

$$R(x) : (x-1) \Leftrightarrow R(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 1 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Thay $a = 3$ tìm được $b = -4$

Vậy $a = 3; b = -4$ thì đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$

2. ĐKXD của M : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

Thực hiện phép chia đa thức $x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 16x^2 + 30x - 5$ cho $x^2 - 4x + 1$ được thương là $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ và dư là $8x$

$$\Rightarrow x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 16x^2 + 30x - 5 = (x^2 - 4x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) + 8x$$

Thực hiện phép chia đa thức $x^4 + 2x^2 + 17$ cho $x^2 - 4x + 1$ được thương là $x^2 + 4x + 17$ và dư là $64x$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2 + 17 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 + 4x + 17) + 64x$$

Với $x = 2 + \sqrt{3}$ thì $M = \frac{(x^2 - 4x + 1)(x^3 - 3x^2 + 2x - 5) + 8x}{(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 4x + 17) + 64x} = \frac{8x}{64x}$ (Do $x^2 - 4x + 1 = 0$)

$$\Rightarrow M = \frac{1}{8} \text{ (Do } x \neq 0 \text{)}$$

Vậy $M = \frac{1}{8}$ khi $x = 2 + \sqrt{3}$

Bài 3:(4,0 điểm) Cho phương trình $\frac{x+m}{x+3} + \frac{x-3}{x-m} = 2$ (1) (x là ẩn)

1. Giải phương trình (1) với $m = 4$

2. Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất là số âm

Lời giải

1. Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta được:

$$\frac{x+4}{x+3} + \frac{x-3}{x-4} = 2$$

ĐKXĐ : $x \neq 4; x \neq -3$

$$\Rightarrow (x+4)(x-4) + (x+3)(x-3) = 2(x+3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 + x^2 - 9 = 2x^2 - 2x - 24$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (tmđk)}$$

Vậy với $m = 4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$

2. ĐKXĐ : $x \neq m; x \neq -3$

$$\Rightarrow (x+m)(x-m) + (x+3)(x-3) = 2(x+3)(x-m)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - m^2 + x^2 - 9 = 2x^2 - 2mx + 6x - 6m$$

$$\Leftrightarrow 2mx + 6x = m^2 - 6m + 9$$

$$\Leftrightarrow 2(m-3)x = (m-3)^2 \text{ (2)}$$

Phương trình (2) có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow 2(m-3) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$$

Khi $m \neq 3$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{m-3}{2}$

$$\text{Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ x = \frac{m-3}{2} \neq -3 \\ x = \frac{m-3}{2} \neq m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -3 \end{cases} (*)$$

$$\text{Nghiệm duy nhất là số âm} \Leftrightarrow x = \frac{m-3}{2} < 0 \Rightarrow m < 3 (**)$$

$$\text{Kết hợp (*) và (**) ta được } \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m < 3 \\ m \neq -3 \end{cases}$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất là số âm

Bài 4:(2,0 điểm) Cho hai số dương x và y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia ta được

$$(x+y)^2 = \left(1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2y\right)^2 \leq \left[1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] [x^2 + (2y)^2]$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq \frac{5}{4} \cdot (x^2 + 4y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq \frac{25}{4} \text{ (do } x^2 + 4y^2 = 5 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq \frac{5}{2} \text{ (do } x \text{ và } y \text{ là hai số dương nên } x+y > 0 \text{)}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{2y}{1/2} \\ x^2 + 4y^2 = 5 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2 + 4y^2 = 5 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

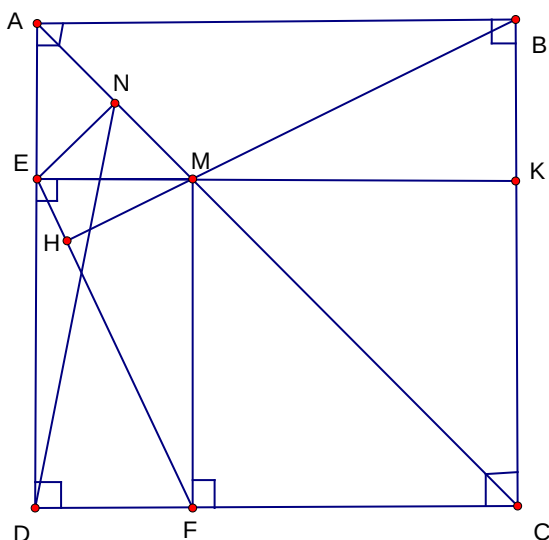
Vậy GTLN của $x + y$ bằng $\frac{5}{2}$ tại $x = 2; y = \frac{1}{2}$

Bài 5:(5,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường chéo AC ($M \neq A$ và C). Gọi $E; F$ theo thứ tự là hình chiếu của M trên AD và CD .

1. Chứng minh tứ giác $DEMF$ là hình chữ nhật
2. Chứng minh $BM \perp EF$

3. Gọi N là trung điểm của AM . Chứng minh $CE^2 = 2DN^2$

Lời giải



1. Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{EDF} = 90^\circ$

Do E là hình chiếu của M trên $AD \Rightarrow \widehat{MED} = 90^\circ$

Do F là hình chiếu của M trên $DC \Rightarrow \widehat{MFD} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DEMF$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

2. $EM \cap BC = K$; $BM \cap EF = H$

Chứng minh được tứ giác $CKME$ là hình vuông (hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác)

$\Rightarrow MF = MK$ (1)

Chứng minh được tứ giác $ABKF$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

$\Rightarrow AE = BK$

$\triangle AME$ vuông cân tại $E \Rightarrow AE = EM \Rightarrow BK = EM$ (2)

$MK \perp AD$; $AD \parallel BC \Rightarrow MK \perp BC \Rightarrow \widehat{MKB} = 90^\circ$

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \triangle MEF = \triangle KBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BMK} = \widehat{EFM}$

Mà $\widehat{BMK} = \widehat{EMH}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{EMH}$

$\triangle MEF$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{EFM} + \widehat{FEM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HME} + \widehat{FEM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MHE} = 90^\circ \Rightarrow BM \perp EF$ (đpcm)

3. Do $\triangle AME$ vuông cân tại E mà N là trung điểm của $AM \Rightarrow EN \perp AM$

Do $\triangle AME$ vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{EMA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle NME$ vuông cân tại N

Áp dụng định lý Py- ta- go $\Rightarrow ME^2 = 2EN^2 \Rightarrow \frac{EN^2}{ME^2} = \frac{1}{2}$

$\triangle MFC$ có $\widehat{CFM} = \widehat{CMF} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MFC$ vuông cân tại F

Áp dụng định lý Py- ta- go $\Rightarrow MC^2 = 2FM^2 \Rightarrow \frac{FM^2}{MC^2} = \frac{1}{2}$

Mà $MF = DE \Rightarrow \frac{DE^2}{CM^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{EN^2}{ME^2} = \frac{ED^2}{MC^2} \Rightarrow \frac{EN}{ME} = \frac{ED}{MC}$

Xét $\triangle DEN$ và $\triangle CME$ có :

$\widehat{NED} = \widehat{CME} = 135^\circ$

$\frac{EN}{ME} = \frac{ED}{MC}$

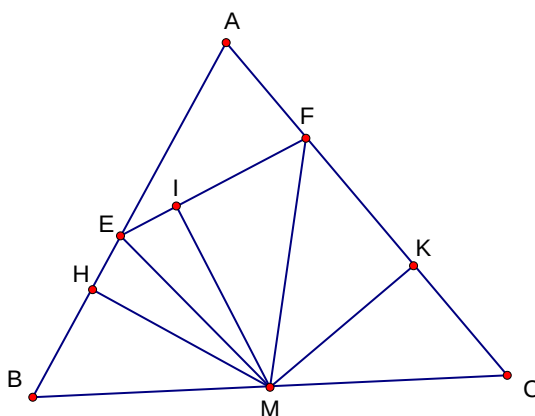
$\Rightarrow \triangle DEN \cong \triangle CME$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{DN}{CE} = \frac{DE}{CM} \Rightarrow \frac{DN^2}{CE^2} = \frac{DE^2}{CM^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow CE^2 = 2DN^2$

Bài 6: (2,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ đều; gọi là M trung điểm của BC . Hai điểm E và F theo thứ tự lần lượt di chuyển trên cạnh AB và cạnh AC sao cho $\widehat{EMF} = 60^\circ$ ($E \neq A; F \neq A$). Chứng minh rằng chu vi của $\triangle AEF$ có giá trị không đổi

Lời giải



Gọi $H; I; K$ lần lượt là hình chiếu của M trên $AB; EF; AC$

$\triangle EBM$ có $\widehat{EBM} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BEM} + \widehat{BME} = 120^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{FME} + \widehat{BME} + \widehat{FMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BME} + \widehat{FMC} = 120^\circ \left(\widehat{FME} = 60^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{FMC}; \hat{B} = \hat{C} (= 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle BEM \cong \triangle MEF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CM} = \frac{EM}{FM} \Rightarrow \frac{BE}{BM} = \frac{EM}{FM} \text{ (do } CM = BM \text{)}$$

Xét $\triangle BEM$ và $\triangle MEF$ có :

$$\hat{B} = \widehat{FME} (= 60^\circ)$$

$$\frac{BE}{BM} = \frac{EM}{FM}$$

$$\Rightarrow \triangle BEM \cong \triangle MEF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{FEM}$$

$$\triangle MHE = \triangle MIE \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow EH = EI$$

Tương tự chứng minh trên ta được $FK = FI$

Chu vi $\triangle AEF$

$$AE + FE + FA = AE + EI + FI + FA = AE + EH + FK + FA = AH + AK$$

Do $M; AB; AC$ cố định $\Rightarrow H$ và K cố định ; A cố định $\Rightarrow AH + AK$ có giá trị không

Vậy chu vi $\triangle AEF$ có giá trị không đổi

===== **HẾT** =====

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN TIỀN HẢI
ĐỀ SỐ 107

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8
NĂM HỌC: 2018 – 2019
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = 1 - \left(\frac{2x^2 + x - 1}{1 - x^2} + \frac{2x^3 - x + x^2}{1 + x^3} \right) \cdot \frac{(1 - x)(x^2 - x)}{2x - 1}$

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A < \frac{4}{3}$

2. Tìm a và b sao cho hai đa thức $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2a + 3b$ và $g(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3a + 2b$ cùng chia hết cho đa thức $(x - 3)$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x thì giá trị biểu thức sau luôn viết được bằng tổng của hai số chính phương:

$$A = x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2$$

Bài 3: (3,5 điểm)

1. Tìm giá trị của m để phương trình ẩn x: $\frac{2mx - 1}{x - 1} = m - 2$ có nghiệm duy nhất.

2. Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{9x}{2x^2 - x + 3} = 6$

3. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Bài 4: (6,5 điểm) Cho hình vuông ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là trung điểm của cạnh CD. AN cắt DM tại I. Chứng minh rằng:

1. $AN \perp DM$ và $DO^2 = DI \cdot DM$

2. $BI = BA$ và $\widehat{IBC} = 2\widehat{ICD}$

3. IM là phân giác của góc OIC.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho 1010 số nguyên dương phân biệt, mỗi số không vượt quá 2018. Chứng minh rằng trong các số đó luôn tồn tại 2 số có tổng bằng 2019.

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH MÔN TOÁN 8
PHÒNG DG&ĐT HUYỆN TIỀN HẢI
ĐỀ 107

Năm học: 2018-2019
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = 1 - \left(\frac{2x^2 + x - 1}{1 - x^2} + \frac{2x^3 - x + x^2}{1 + x^3} \right) \cdot \frac{(1 - x)(x^2 - x)}{2x - 1}$

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A < \frac{4}{3}$

2. Tìm a và b sao cho hai đa thức $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2a + 3b$ và $g(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3a + 2b$ cùng chia hết cho đa thức $(x - 3)$

Lời giải

1. ĐKXĐ: $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$

$$A = 1 - \left(\frac{2x^2 + x - 1}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{x(2x^2 + x - 1)}{(1 + x)(1 - x + x^2)} \right) \cdot \frac{(1 - x)(x^2 - x)}{2x - 1}$$

$$A = 1 - \left(\frac{(2x^2 + 2x) - (x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{x[(2x^2 + 2x) - (x + 1)]}{(1 + x)(1 - x + x^2)} \right) \cdot \frac{x(1 - x)(x - 1)}{2x - 1}$$

$$A = 1 - \left(\frac{(x + 1)(2x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{x(x + 1)(2x - 1)}{(1 + x)(1 - x + x^2)} \right) \cdot \frac{x(1 - x)(x - 1)}{2x - 1}$$

$$A = 1 - \left(\frac{2x - 1}{1 - x} + \frac{x(2x - 1)}{1 - x + x^2} \right) \cdot \frac{x(1 - x)(x - 1)}{2x - 1}$$

$$A = 1 - \frac{(2x - 1)[1 - x + x^2 + x(1 - x)]}{(1 - x)(1 - x + x^2)} \cdot \frac{x(1 - x)(x - 1)}{2x - 1}$$

$$A = \frac{1 - x + x^2 + x - x^2}{1 - x + x^2}$$

$$A = \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Vậy với điều kiện $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{x^2 - x + 1}$

Ta có

$$\begin{aligned}
 A - \frac{4}{3} &= \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{4}{3} = \frac{3 - 4(x^2 - x + 1)}{3(x^2 - x + 1)} \\
 &= \frac{-4x^2 + 4x - 1}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{-(2x - 1)^2}{3\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} < 0
 \end{aligned}$$

Không có dấu "=" xảy ra vì $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{4}{3}$ (đpcm)

2. Vì đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - 3$ nên $f(3) = 0$

Ta có: $4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2a + 3b = 0 \Rightarrow 2a + 3b = -87$ (1)

Vì đa thức $g(x)$ chia hết cho $x - 3$ nên $g(3) = 0$

Ta có: $5 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 3a + 2b = 0 \Rightarrow 3a - 2b = 318$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a + 3b = -87 \\ 3a - 2b = 318 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = -69 \end{cases}$$

Vậy $a = 60$, $b = -69$

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Phân tích đa thức thành nhân tử: $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x

thì giá trị biểu thức sau luôn viết được bằng tổng của hai số chính phương:

$$A = x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2$$

Lời giải

1. $x(x+4)(x+6)(x+10)+128$

$$= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128$$

$$= \left[(x^2 + 10x + 12) - 12 \right] \left[(x^2 + 10x + 12) + 12 \right] + 128$$

$$= (x^2 + 10x + 12)^2 - 144 + 128$$

$$= (x^2 + 10x + 12)^2 - 16$$

$$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16)$$

$$= (x^2 + 10x + 8)(x+8)(x+2)$$

2. $A = x^2 + 2(x+1)^2 + 3(x+2)^2 + 4(x+3)^2$

$$= x^2 + 2x^2 + 4x + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 4x^2 + 24x + 36$$

$$= 10x^2 + 40x + 50$$

$$= (x^2 + 10x + 25)(9x^2 + 30x + 25)$$

$$= (x+5)^2 + (3x+5)^2$$

Bài 3: (3,5 điểm)

1. Tìm giá trị của m để phương trình nhân $x: \frac{2mx-1}{x-1} = m-2$ có nghiệm duy nhất.
2. Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{9x}{2x^2-x+3} = 6$
3. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình: $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$

Lời giải

1. ĐKXĐ $x \neq 1$

Với điều kiện trên ta có:

$$\frac{2mx-1}{x-1} = m-2 \Rightarrow 2xm-1 = (m-2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2mx-1 = mx-m-2x+2$$

$$\Leftrightarrow mx+2x = 3-m$$

$$\Leftrightarrow x(m+2) = 3-m \quad (1)$$

Tìm được $m \neq -2$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3-m}{m+2}$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$\frac{3-m}{m+2} \neq 1 \Rightarrow 3-m \neq m+2 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

Vậy $m \neq -2$, $m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

$$2. \frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{9x}{2x^2-x+3} = 6$$

$$\text{ĐKXĐ } x \neq 1, x \neq \frac{3}{2}$$

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Xét $x \neq 0$ ta có:

$$\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{9x}{2x^2-x+3} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}} + \frac{9}{2x-1+\frac{3}{x}} = 6$$

$$\text{Đặt } 2x + \frac{3}{x} - 3 = t, \text{ ta có phương trình } \frac{2}{t-2} + \frac{9}{t+2} = 6$$

$$\Rightarrow 2t+4+9t-18 = 6t^2-24$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 11t - 10 = 0 \Leftrightarrow (3t + 2)(2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2}{3} \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{-2}{3} \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} - 3 = \frac{-2}{3} \Rightarrow \text{VN}$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x + \frac{3}{x} - 3 = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \text{ (TM)} \\ x = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

$$\text{Tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{3}{4}; 2 \right\}$$

$$3. x^2 - xy = 6x - 5y - 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = xy - 5y$$

$$\Rightarrow y(x - 5) = x^2 - 6x + 8$$

$$\text{Xét } x = 5 \Rightarrow \text{VN}$$

$$\text{Xét } x \neq 5 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

$$\text{Vì } y \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \mathbb{Z} \text{ và } x - 5 \text{ là ước của } 3. \text{ Mà } U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Ta có bảng sau

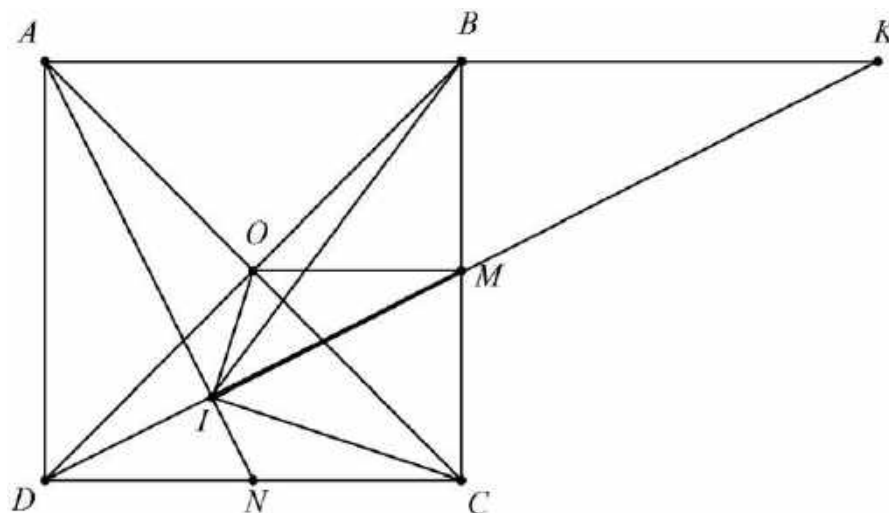
$x - 5$	-3	-1	1	3
x	2	4	6	8
$y = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$	0	0	8	8

Vậy các cặp giá trị (x, y) cần tìm là $(2; 0), (4; 0), (6; 8), (8; 8)$

Bài 4: (6,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là trung điểm của cạnh CD . AN cắt DM tại I . Chứng minh rằng:

- $AN \perp DM$ và $DO^2 = DI \cdot DM$
- $BI = BA$ và $\widehat{IBC} = 2\widehat{ICD}$
- IM là phân giác của góc OIC .

Lời giải



1. $AN \perp DM$ và $DO^2 = DI \cdot DM$

Chứng minh $\triangle AND = \triangle DMC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{CDM}$

Chứng minh $AN \perp DM$

Chứng minh $\triangle DIN \sim \triangle DCM$ (g.g)

$$\Rightarrow DI \cdot DM = DN \cdot DC \quad (1)$$

Chứng minh $DO^2 = \frac{1}{2} DC^2 = DN \cdot DC \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DO^2 = DI \cdot DM$

2. $BI = BA$ và $\widehat{IBC} = 2 \cdot \widehat{ICD}$

Gọi K là giao điểm của IM với AB

Chứng minh $\triangle CDM = \triangle BKM$ (g.c.g)

$$\Rightarrow CD = BK \Rightarrow AB = BK$$

$\Rightarrow \triangle AIK$ vuông tại I có IB là trung tuyến $\Rightarrow IB = AB$ (đpcm)

$$IB = AB \Rightarrow BI = BC \Rightarrow \triangle BIC \text{ cân tại B}$$

$$\Rightarrow \widehat{IBC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{BCI}$$

$$= 2 \cdot \widehat{BCD} - 2 \cdot \widehat{BCI}$$

$$= 2 \cdot (\widehat{BCI} + \widehat{ICD}) - 2 \cdot \widehat{BCI} = 2 \cdot \widehat{ICD} \quad (\text{đpcm})$$

3. IM là phân giác của góc OIC.

MN, OM là đường trung bình của $\triangle CBD$

$$\Rightarrow MN \parallel DB \parallel CD$$

$$\Rightarrow \widehat{MNC} = 45^\circ, \widehat{BOM} = 45^\circ$$

$$DI \cdot DM = DO^2 \Rightarrow \triangle DNM \sim \triangle DIC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{DIO} = \widehat{DOM} \Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{BOM} = 45^0$$

$$\Rightarrow \widehat{OIM} = \widehat{MIC} = 45^0$$

$\Rightarrow IM$ là phân giác của góc OIC .

Bài 5: (1,0 điểm) Cho 1010 số nguyên dương phân biệt, mỗi số không vượt quá 2018. Chứng minh rằng trong các số đó luôn tồn tại 2 số có tổng bằng 2019.

Lời giải

Xét tập $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{1010}\}$ thoả mãn $1 \leq a_i \leq 2018 \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; 1010\}$ và tập

$B = \{b_1; b_2; b_3; \dots; b_{1010}\}$ với $b_i = 2019 - a_i$

$$\Rightarrow 1 \leq b_i \leq 2018 \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; 1010\}$$

Tổng số phần tử của hai tập hợp A và B là $2 \cdot 1010 = 2020$ mà các số a_i, b_i thuộc tập số nguyên từ 1 đến 2018 gồm 2018 phần tử.

Do các số a_i phân biệt với nhau, các số b_i phân biệt với nhau nên có ít nhất một số ở tập A trùng với một số ở tập B .

Xét trường hợp $a_m = b_m \Rightarrow a_m = 2019 - a_m \Rightarrow 2a_m = 2019$ (vô lý)

Xét trường hợp $a_m = b_n$ (m khác n)

$$\Rightarrow a_m = 2019 - a_n \Leftrightarrow a_m + a_n = 2019$$

Vậy trong tập hợp A có ít nhất một cặp số có tổng bằng 2019 (đpcm).

===== **HẾT** =====

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIẾN XƯƠNG**

**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2015 – 2016**

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (4,0 điểm) Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.
2. Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 6 với mọi x nguyên.

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho 3 số dương x, y, z . Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.
2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Xác định dạng của tam giác để:
 $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3: (5,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy}\right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2}\right)$ (với $xy \neq \pm 1$)

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tính giá trị biểu thức A biết x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$.
3. Tìm các số nguyên không âm x để A có giá trị là số nguyên.

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Hai đường thẳng AD và MC cắt nhau tại E . I là giao điểm của CM và DN .

1. Chứng minh rằng:
 - a) $\triangle DEI$ vuông.
 - b) $\widehat{AIM} + \widehat{ACM} = 45^\circ$.
2. Tính tỉ số diện tích của tam giác CNI và diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b là 2 số dương thỏa mãn $a+b \leq \frac{4}{5}$. Chứng minh $a+b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIẾN XƯƠNG

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 8
KỶ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2015 – 2016

Bài 1: (4,0 điểm) Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. Phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.
2. Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 6 với mọi x nguyên.

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,5 đ)	Ta có $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	
	$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$	0,5
	$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)$	0,75
	$= (x-1)(x^2 - 5x + 6)$	0,5
	$\dots = (x-1)(x-2)(x-3)$	0,5
	Vậy $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	0,25
Câu 2 (1,5 đ)	+ Chứng minh được $P(x)$ chia hết cho 2 và 3 với mọi số nguyên x	1
	+ Lập luận $(2, 3) = 1 \Rightarrow P(x) : 6$ với mọi x là số nguyên	0,5

Bài 2: (4,0 điểm)

1. Cho 3 số dương x, y, z . Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.
2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Xác định dạng của tam giác để:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 đ)	Biến đổi:	
	$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$	0,75
	Do $x, y, z > 0$, nên áp dụng bất đẳng thức Cô si với 2 số dương ta được:	0,75
	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$. (dấu “=” xảy ra khi $x = y$) $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$. (dấu “=” xảy ra khi $x = z$)	

	$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2. (\text{dấu “=” xảy ra khi } y = z)$ $\Rightarrow (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$	0,5
	Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$. Vậy $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$	
Câu 2 (2,0 đ)	Ta có: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ $P = \left(\frac{a}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1 \right) - 3$ $= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$ $P = \frac{1}{2} [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$	0,5
	Áp dụng câu 1, ta có: $[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$ $\Rightarrow P \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$	0,5
	Dấu “=” xảy ra khi $b+c = c+a = a+b \Leftrightarrow a = b = c$ Vậy $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}$ khi tam giác là tam giác đều.	0,5

Bài 3: (5,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} \right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2} \right)$ (với $xy \neq \pm 1$)

- Rút gọn biểu thức A .
- Tính giá trị biểu thức A biết x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$.
- Tìm các số nguyên không âm x để A có giá trị là số nguyên.

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 đ)	$A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} \right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2} \right) \text{ (với } xy \neq \pm 1)$	
	$A = \frac{2x+2xy^2}{1-x^2y^2} : \frac{1+x^2y^2+x^2+y^2}{1-x^2y^2}$	0,5

	$A = \frac{2x(1+y^2)}{1-x^2y^2} \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1+y^2)(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+1}$	1,25
	Vậy $A = \frac{2x}{x^2+1}$	0,25
Câu 2 (2,0 đ)	+ Giải bất phương trình $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$	
	$2x+1 \geq x^2+1$ (do $x^2+1 > 0 \forall x$)	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$	0,5
	+ Do x là số nguyên lớn nhất nên $x = 2$	0,5
	Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta được: $A = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1} = \frac{4}{5}$	0,25
	Vậy với x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$ thì $A = \frac{4}{5}$.	0,25
Câu 3 (1,0 đ)	Ta có $A = \frac{2x}{x^2+1}$ + Do $x \geq 0$; $x^2+1 > 0$ nên $A \geq 0$ (1) + Ta có $A = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - (x^2-2x+1)}{x^2+1} = 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 1$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 \leq A \leq 1$ Do A là số nguyên nên $A \in \{0; 1\}$	0,5
	+ Với $A = 0$; từ (1) ta được $x = 0$ (tmđk) + Với $A = 1$; từ (2) ta được $x = 1$ (tmđk) Vậy với $x \in \{0; 1\}$ thì A có giá trị là số nguyên.	0,5

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Hai đường thẳng AD và MC cắt nhau tại E . I là giao điểm của CM và DN .

1. Chứng minh rằng:

a) $\triangle DEI$ vuông.

b) $\widehat{AIM} + \widehat{ACM} = 45^\circ$.

2. Tính tỉ số diện tích của tam giác CNI và diện tích hình vuông $ABCD$.

Câu	Đáp án	Điểm
-----	--------	------

Câu 1(a) (2,5 đ)	- Chứng minh $\Delta MBC = \Delta NCD$ (c.g.c)	0,5
	+ Suy ra được $\widehat{BMC} = \widehat{DNC}$	0,5
	Mà $\widehat{BMC} + \widehat{MCN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{INC} + \widehat{ICN} = 90^\circ$	1
	+ Từ đó suy ra được $CM \perp DN$ và ΔDEI vuông.	0,5
Câu 2 (2,0 đ)	- Chứng minh được AI là trung tuyến của ΔDEI vuông tại I	0,5
	- Chứng minh ΔAEI cân $\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{MIA}$	0,5
	+ $\widehat{MIA} + \widehat{MCA} = \widehat{E} + \widehat{MCA} = \widehat{DAC}$ (tính chất góc ngoài tam giác)	0,5
	+ $\widehat{DAC} = 45^\circ$ (tính chất hình vuông). Từ đó suy ra đpcm.	0,5
Câu 3 (1,5 đ)	- Chứng minh ΔINC đồng dạng ΔBMC	0,5
	+ Tính được $\frac{S_{CNI}}{S_{BMC}} = \left(\frac{NC}{MC}\right)^2 = \frac{1}{5}$	0,5
	+ Chứng minh $S_{BMC} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Từ đó suy ra $\frac{S_{CNI}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{20}$	0,5

Bài 5: (1,0 điểm) Cho a, b là 2 số dương thỏa mãn $a + b \leq \frac{4}{5}$. Chứng minh $a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$.

Câu	Đáp án	Điểm
	Với $a, b > 0$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ Mà $a + b \leq \frac{4}{5}$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 5$ (1)	0,25
	Ta có $P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(a + \frac{4}{25a}\right) + \left(b + \frac{4}{25b}\right) + \frac{21}{25}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si với hai số dương ta có: $a + \frac{4}{25a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{25a}} = \frac{4}{5}$ $b + \frac{4}{25b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{25b}} = \frac{4}{5}$ (2)	0,25

	Từ (1) và (2) ta có: $P \geq \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{21}{25} \cdot 5 = \frac{29}{5}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$	
	Vậy $a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$ (Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$)	0,25

Lưu ý:

- Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Nếu học sinh không vẽ hình hoặc sai hình thì không chấm điểm bài hình.
- Bài làm không chặt chẽ, không đủ cơ sở ở phần nào thì trừ nửa số điểm ở phần đó.

===== **HẾT** =====

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIẾN XƯƠNG
====***=====

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG NĂM HỌC 2015 – 2016
MÔN TOÁN LỚP 8
(thời gian làm bài 120 phút)

Bài 1 (4 điểm)

Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- 1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.
- 2) Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 6 với mọi x nguyên.

Bài 2 (4 điểm).

- 1) Cho 3 số dương x, y, z . Chứng minh rằng $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$
- 2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Xác định dạng của tam giác để $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3 (5 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} \right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2} \right)$ (Với $xy \neq \pm 1$)

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính giá trị biểu thức A biết x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$
- 3) Tìm các số nguyên không âm x để A có giá trị là số nguyên.

Bài 4 (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Hai đường thẳng AD và MC cắt nhau tại E , I là giao điểm của CM và DN .

- 1) Chứng minh rằng: a) $\triangle DEI$ vuông.
b) $\widehat{AIM} + \widehat{ACM} = 45^\circ$
- 2) Tính tỉ số diện tích tam giác CNI và diện tích hình vuông $ABCD$.

Bài 5 (1 điểm)

Cho a, b là 2 số dương thỏa mãn $a + b \leq \frac{4}{5}$. Chứng minh $a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIẾN XƯƠNG
==***==

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN 8
KỶ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG NĂM HỌC 2015 – 2016

Bài 1 (4 điểm) Cho đa thức: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

- 1) Phân tích đa thức $P(x)$ thành nhân tử.
- 2) Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho 6 với mọi x nguyên.

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,5 đ)	Ta có $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	
	$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6$	0,5
	$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)$	0,75
	$= (x-1)(x^2 - 5x + 6)$	0,5
	$\dots = (x-1)(x-2)(x-3)$	0,5
	Vậy $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	0,25
Câu 2 (1,5 đ)	+ C/m được $P(x)$ chia hết cho 2 và 3 với mọi số nguyên x + Lập luận $(2, 3) = 1 \Rightarrow P(x) : 6$ với mọi x là số nguyên	1 đ 0,5đ

Bài 2 (4 điểm).

1- Cho 3 số dương x, y, z . Chứng minh rằng $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$

2- Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Xác định dạng của tam giác để

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2 điểm)	Biến đổi:	
	$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)$	0,75đ
	Do $x, y, z > 0$, nên áp dụng Bất đẳng thức Cô si với 2 số dương ta được:	0,75
	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$ (dấu "=" xảy ra khi $x = y$)	
	$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ (dấu "=" xảy ra khi $x = z$)	
	$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ (dấu "=" xảy ra khi $y = z$)	
	$\Rightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$	
	Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$	0,5
	Vậy: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$	

	$= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$	0,5
	$= \frac{1}{2} [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$	0,5
	áp dụng câu 1, ta có:	
	$[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$	0,5
	$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2} \cdot 9 - 3 = \frac{3}{2}$	
	Đấu "=" xảy ra khi $b+c = c+a = a+b \Leftrightarrow a=b=c$	
	Vậy $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}$ khi tam giác là tam giác đều.	0,5

Bài 3 (5 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} \right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2} \right)$ (Với $xy \neq \pm 1$)

- Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị biểu thức A biết x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$
- Tìm các số nguyên không âm x để A có giá trị là số nguyên.

	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2 điểm)	$A = \left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{x-y}{1+xy} \right) : \left(1 + \frac{x^2+y^2+2x^2y^2}{1-x^2y^2} \right)$ (Với $xy \neq \pm 1$)	
	$A = \frac{2x+2xy^2}{1-x^2y^2} : \frac{1+x^2y^2+x^2+y^2}{1-x^2y^2}$	0,5
	$A = \frac{2x(1+y^2)}{1-x^2y^2} \cdot \frac{1-x^2y^2}{(1+y^2)(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+1}$	1,25
	Vậy $A = \frac{2x}{x^2+1}$	0,25
Câu 2 (2 điểm)	+ Giải bất phương trình: $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$	
	$\Leftrightarrow 2x+1 \geq x^2+1$ (do $x^2+1 > 0 \forall x$)	0,5
	$\Leftrightarrow x^2-2x \leq 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$	0,5

	Vậy với x là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $\frac{2x+1}{x^2+1} \geq 1$ thì $A = \frac{4}{5}$	0,25
	Ta có $A = \frac{2x}{x^2+1}$ + Do $x \geq 0; x^2+1 > 0$ nên $A \geq 0$ (1) + Ta có $A = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - (x^2-2x+1)}{x^2+1} = 1 - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq 1$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 \leq A \leq 1$ Do A là số nguyên nên $A \in \{0; 1\}$	0,25
Câu 3 (1 điểm)	+ Với $A = 0$; từ (1) ta được $x = 0$ (trmk) + Với $A = 1$; từ (2) ta được $x = 1$ (trmk) Vậy với $x \in \{0; 1\}$ thì A có giá trị là số nguyên	0,5
		0,5

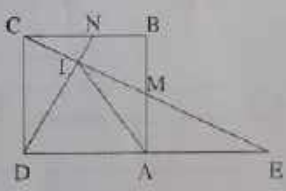
Bài 4 (6 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC . Hai đường thẳng AD và MC cắt nhau tại E, I là giao điểm của CM và DN .

1) Chứng minh rằng: a) $\triangle DEI$ vuông.

b) $\widehat{AIM} + \widehat{ACM} = 45^\circ$

2) Tính tỉ số diện tích tam giác CNI và diện tích hình vuông $ABCD$.

	Đáp án	Điểm
		
	$\triangle CNI \cong \triangle NCD$ (c.g.v) + Suy ra được $\widehat{BMC} = \widehat{BNC}$ mà $\widehat{BMC} + \widehat{MCN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{INC} + \widehat{ICN} = 90^\circ$ + Từ đó suy ra được $CM \perp DN$ và $\triangle DEI$ vuông.	0,5 0,5 1 0,5

Câu 3 1,5 đ	+ DAC = 45° (tức hình vuông). Từ đó suy ra đpcm	0,5
	- C/m ΔINC đồng dạng ΔBMC	0,5
	+ Tính được $\frac{S_{CNI}}{S_{BMC}} = \left(\frac{NC}{MC}\right)^2 = \frac{1}{5}$	0,5
	+ C/m $S_{BMC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Từ đó suy ra $\frac{S_{CNI}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{20}$	0,5

Bài 5 (1 điểm) Cho a, b là 2 số dương thỏa mãn $a + b \leq \frac{4}{5}$. Chứng minh $a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$

Với $a, b > 0$, ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$	0,25
Mà $a + b \leq \frac{4}{5}$ nên $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 5$ (1)	
Ta có $P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(a + \frac{4}{25a}\right) + \left(b + \frac{4}{25b}\right) + \frac{21}{25} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$	0,25
áp dụng Bất đẳng thức Cô si với 2 số dương ta có: $a + \frac{4}{25a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{25a}} = \frac{4}{5}$ $b + \frac{4}{25b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{25b}} = \frac{4}{5}$ (2) Từ (1) và (2) ta có: $P \geq \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{21}{25} \cdot 5 = \frac{29}{5}$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$	0,25
Vậy $a + b + \frac{a+b}{ab} \geq \frac{29}{5}$ (Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{2}{5}$)	0,25

Lưu ý:

- Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Nếu học sinh không vẽ hình hoặc sai hình thì không chấm điểm bài hình
- Bài làm không chặt chẽ, không đủ cơ sở ở phần nào thì trừ nửa số điểm ở phần đó.

PHÒNG GD&ĐT HUYỆN GIA LÂM

ĐỀ THI HSG TOÁN 8
NĂM HỌC: 2020 – 2021
Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tính giá trị của A biết $|x + 3| = 1$
3. Tìm giá trị của x để $A < 0$
4. Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 2: (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1. $\frac{x+1}{6} + \frac{x+2}{5} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{3}$
2. $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{3}{4}$

Bài 3: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = 5x^2 + y^2 - 2xy + 14x - 2y + 5$
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.
2. Chứng minh rằng đa thức $A(x) = (x^2 + x - 1)^{2020} + (x^2 - x + 1)^{2020} - 2$ chia hết cho đa thức $B(x) = x - 1$
3. Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a và b.
4. Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \leq x^4 + y^4$

Bài 4: (6,5 điểm) Cho hình vuông ABCD có $AB = a$, hai đường chéo cắt nhau tại O. Trên hai cạnh AB, BC lần lượt lấy hai điểm E và G sao cho . Gọi H là giao điểm của tia AG và tia DC, I là giao điểm của tia OG và đoạn thẳng BH.

1. Chứng minh rằng: $\triangle OGE$ vuông cân.
2. Tính diện tích tứ giác OEBG theo a
3. Chứng minh rằng: $EG \parallel BI$
4. Gọi K là giao điểm của tia EO và tia IC. Chứng minh rằng: $KG \perp EI$

===== **HẾT** =====

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG 8
GIA LÂM
Năm học: 2020-2021
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (5,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tính giá trị của A biết $|x + 3| = 1$
3. Tìm giá trị của x để $A < 0$
4. Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq \pm 2$

$$1) A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

$$A = \frac{x - 2(x + 2) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{x^2 - 4 + 10 - x^2}{x + 2}$$

$$A = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2}$$

$$A = \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6}$$

$$A = \frac{-1}{x - 2}$$

$$2) \text{ Ta có: } |x + 3| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 1 \\ x + 3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ (ko t/m)} \\ x = -4 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -4 \text{ thay vào A ta có: } A = \frac{-1}{-4 - 2} = \frac{1}{6}$$

$$3) \text{ Để } A < 0 \text{ thì } \frac{-1}{x - 2} < 0 \text{ mà } -1 < 0 \text{ nên } x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Vậy $A < 0$ khi $x > 2$

4) Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z}$ nên $x-2 \in U(1) = \{-1; 1\} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 2: (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1. $\frac{x+1}{6} + \frac{x+2}{5} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{3}$

2. $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{3}{4}$

Lời giải

1) $\frac{x+1}{6} + \frac{x+2}{5} = \frac{x+3}{4} + \frac{x+4}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{6} + 1 + \frac{x+2}{5} + 1 = \frac{x+3}{4} + 1 + \frac{x+4}{3} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{6} + \frac{x+7}{5} = \frac{x+7}{4} + \frac{x+7}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+7}{6} + \frac{x+7}{5} - \frac{x+7}{4} - \frac{x+7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+7) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -7$$

Vậy $x = -7$

2) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{3}{4}$ ĐK: $x \neq 0; x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-x}{x(x+3)} = \frac{3x(x+3)}{4x(x+3)}$$

$$\Rightarrow 3.4 = 3x(x+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x=1$; $x=-4$

Bài 3: (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = 5x^2 + y^2 - 2xy + 14x - 2y + 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Chứng minh rằng đa thức $A(x) = (x^2 + x - 1)^{2020} + (x^2 - x + 1)^{2020} - 2$ chia hết cho đa thức $B(x) = x - 1$

3. Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a và b .

4. Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \leq x^4 + y^4$

Lời giải

1) $A = 5x^2 + y^2 - 2xy + 14x - 2y + 5$

$$A = (x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) + (4x^2 + 12x + 9) - 5$$

$$A = (x - y + 1)^2 + (2x + 3)^2 - 5 \geq -5$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5 khi $\begin{cases} y = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$

2) Chứng minh rằng đa thức $A(x) = (x^2 + x - 1)^{2020} + (x^2 - x + 1)^{2020} - 2$ chia hết cho đa thức $B(x) = x - 1$

Ta thấy đa thức $B(x) = x - 1$ có nghiệm là $x = 1$

Mà $A(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2020} + (1^2 - 1 + 1)^{2020} - 2 = 0$ nên đa thức $A(x)$ phải có 1 nhân tử là $x - 1$.

Vậy nên đa thức $A(x)$ chia hết cho đa thức $B(x)$

3) Chứng minh rằng $a^3b - ab^3$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a và b .

$$\text{Xét } A = a^3b - ab^3 = ab(a^2 - 1) - ab(b^2 - 1)$$

$$A = ab(a-1)(a+1) - ab(b-1)(b+1)$$

Do $a-1; a; a+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $ab(a-1)(a+1)$ chia hết cho 6

Tương tự : $b-1; b; b+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $ab(b-1)(b+1)$ chia hết cho 6

Do vậy: $A = ab(a-1)(a+1) - ab(b-1)(b+1)$ chia hết cho 6

Do đó: $A = a^3b - ab^3$ chia hết cho 6

4) Ta cần chứng minh: $x^2 + y^2 \leq x^3 + y^3$ (1)
 $x^3 + y^3 \leq x^4 + y^4$ (2)

Thật vậy: $x^2 + y^2 \leq x^3 + y^3 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2) \leq 2(x^3 + y^3)$ vì $x+y=2$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 \leq 2x^3 + 2y^3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2(x-y) - y^2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x^2 - y^2)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x+y)(x-y)^2 \text{ luôn đúng vì } x+y=2 > 0; (x-y)^2 \geq 0$$

Từ (2) $\Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^4 + y^4$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^3 + y^3) \leq 2(x^4 + y^4) \text{ vì } x+y=2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + xy^3 + x^3y + y^4 \leq 2x^4 + 2y^4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^4 - xy^3 - x^3y + y^4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^3(x-y) - y^3(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x^3 - y^3)(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x^2 + xy + y^2)(x-y)^2 \text{ luôn đúng}$$

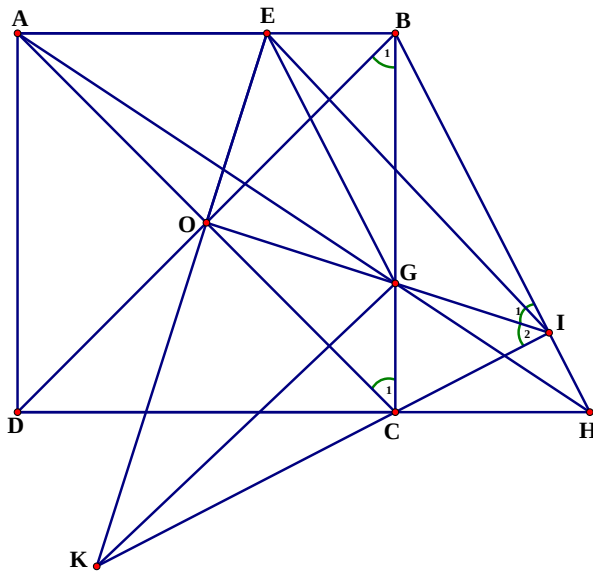
$$\text{vì } x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \forall x, y; (x-y)^2 \geq 0$$

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 + y^2 \leq x^4 + y^4$ với $x+y=2$

Bài 4: (6,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Trên hai cạnh AB, BC lần lượt lấy hai điểm E và G sao cho $AE = BG$. Gọi H là giao điểm của tia AG và tia DC , I là giao điểm của tia OG và đoạn thẳng BH .

1. Chứng minh rằng: $\triangle OGE$ vuông cân.
2. Tính diện tích tứ giác $OEBG$ theo a
3. Chứng minh rằng: $EG \parallel BI$
4. Gọi K là giao điểm của tia EO và tia IC . Chứng minh rằng: $KG \perp EI$

Lời giải



Xét $\triangle OAE$ và $\triangle OBG$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AE = BG \\ \widehat{OAE} = \widehat{OBG} = 45^\circ \\ OA = OB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAE = \triangle OBG \text{ (cgc)} \Rightarrow \begin{cases} OE = OG \\ \widehat{AOE} = \widehat{BOG} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{AOE} + \widehat{EOB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOG} + \widehat{EOB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EOG} = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle OEG$ vuông cân tại O

$$2) \text{ Ta có: } S_{OEBG} = S_{\triangle OGB} + S_{\triangle OEB}$$

$$\Rightarrow S_{OEBG} = S_{\triangle OEA} + S_{\triangle OEB} = S_{\triangle ABE}$$

$$\text{Mà } S_{\triangle ABO} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$$

Nên $S_{OEBG} = \frac{1}{4}a^2$ (đvdt)

3) Vì $AB \parallel CH$ nên $\frac{AG}{GH} = \frac{BG}{GC}$

Mà $BG = AE; GC = EB$ (Vì $GC = BC - BG; EB = AB - AE$)

Nên $\frac{AG}{GH} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow EG \parallel BH$ hay $EG \parallel BI$

4) Vì $EG \parallel BI$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{OGE} = 45^\circ$ (Vì $\triangle OGE$ vuông cân tại O)

Xét $\triangle OGC$ và $\triangle BGI$ có:

$\widehat{I_1} = \widehat{C_1} = 45^\circ; \widehat{OGC} = \widehat{BGI}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OGC \square \triangle BGI$ (g-g) $\Rightarrow \frac{OG}{BG} = \frac{GC}{GI}$

Lại có: $\widehat{OGB} = \widehat{CGI}$ (đối đỉnh) nên $\triangle OGB \square \triangle CGI$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{I_2} = \widehat{B_1} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^\circ \Rightarrow KI \perp BI$

Mà $EG \parallel BI \Rightarrow EG \perp CI$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} IG \perp EK \\ EG \perp KI \end{array} \right\} \Rightarrow G \text{ là trọng tâm } \triangle EIK \Rightarrow KG \perp EI$

===== **HẾT** =====

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TIỀN HẢI**

**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC: 2017 – 2018**

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1: (4,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y + 2$

b) Cho $a = 999...9^2$ (số gồm 2018 chữ số 9), $b = 0,999...9^2$ (số gồm 2018 chữ số 9).

Chứng minh $1 + a + b$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 2: (4,5 điểm)

a) Cho biểu thức $M = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{2x - 1}{x - 1} \right) : \frac{2x - 1}{x - x^2}$

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị biểu thức M khi x là nghiệm của phương trình

$$|x - 1| = 2x + 1$$

b) Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2014, chia cho $x + 2$ dư -2018. Tìm dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 3x - 10$.

Bài 3: (4,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Tìm giá trị của m để phương trình ẩn x : $\frac{2x}{x - 2} + \frac{2x + m}{x + 1} = 4$ có nghiệm.

c) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình: $x^2 - (y + 4)x + 2y = 0$

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Vẽ BH vuông góc với CM tại H . Đường thẳng đi qua H và vuông góc với DH cắt cạnh BC tại N .

Chứng minh rằng:

a) $BC^2 = CH.CM$

b) $\triangle DHC \sim \triangle NHB$

c) $MN \parallel AC$

d) Khi M thay đổi trên cạnh AB thì đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với DN đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (1,0 điểm) Cho đa giác lồi có 24 cạnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường chéo của đa giác lồi không song song với bất kì cạnh nào của đa giác đó.

===== **HẾT** =====

Bài 1: (4,0 điểm)a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y + 2$ b) Cho $a = 999...9^2$ (số gồm 2018 chữ số 9), $b = 0,999...9^2$ (số gồm 2018 chữ số 9).Chứng minh $1 + a + b$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài	Đáp án	Điểm
1 (4đ)	$\begin{aligned} & \text{a) } x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y + 2 \\ & = (x^2 + 2xy + y^2) + 2(x + y) + 1 + (x + y + 1) \\ & = (x + y)^2 + 2(x + y) + 1 + (x + y + 1) \\ & = (x + y + 1)^2 + (x + y + 1) \\ & = (x + y + 1)(x + y + 2). \end{aligned}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	$\begin{aligned} & \text{b) } a + b + 1 = (10^{2018} - 1)^2 + \left(\frac{10^{2018} - 1}{10^{2018}} \right)^2 + 1. \text{ (Đặt } x = 10^{2018} \text{)} \\ & \Rightarrow a + b + 1 = (x - 1)^2 + \left(\frac{x - 1}{x} \right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} + 1 \\ & \Rightarrow a + b + 1 = \frac{(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)x + x^2}{x^2} = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} \right)^2 \end{aligned}$	0,5 0,5 1,0

Bài 2: (4,5 điểm)a) Cho biểu thức $M = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{2x - 1}{x - 1} \right) : \frac{2x - 1}{x - x^2}$ Rút gọn biểu thức M và tính giá trị biểu thức M khi x là nghiệm của phương trình

$$|x - 1| = 2x + 1$$

b) Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2014, chia cho $x + 2$ dư - 2018. Tìm dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 3x - 10$.

Câu	Đáp án	Điểm
2 (4,5đ)	a) ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1$	0,25

$M = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{2x - 1}{x - 1} \right) : \frac{2x - 1}{x - x^2}$	
$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \frac{2x^3 + x^2 - x - (2x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)}{x^3 - 1} \cdot \frac{x - x^2}{2x - 1}$	0,25
$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} - \frac{2x^3 + x^2 - x - (2x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{x(1 - x)}{2x - 1}$	0,25
$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} + \frac{-2x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{x(1 - x)}{2x - 1}$	0,5
$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} + \frac{-x(2x - 1)}{(x^2 + x + 1)(2x - 1)}$	0,25
$= \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$	0,25
$ x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = 0$ (không thỏa ĐKXD) hoặc $x = -2$ (thỏa ĐKXD)	0,5
Với $x = -2 \Rightarrow M = \frac{4}{3}$	0,25
b) $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$	0,5
Ta có: $f(x) = (x - 5)(x + 2) \cdot q(x) + r(x)$.	0,25
Vì bậc của $r(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 1 nên đặt $r(x) = ax + b$.	0,25
Vì $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2014, chia cho $x + 2$ dư -2018 nên:	
$f(5) = 5a + b = 2014$ và $f(-2) = -2a + b = -2018$	0,25
Suy ra $a = 576$ và $b = -866$.	0,25
Vậy đa thức dư cần tìm là $576x - 866$.	0,25

Bài 3: (4,5 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Tìm giá trị của m để phương trình ẩn x : $\frac{2x}{x - 2} + \frac{2x + m}{x + 1} = 4$ có nghiệm.

c) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình: $x^2 - (y + 4)x + 2y = 0$

Câu	Đáp án	Điểm
-----	--------	------

		$x - 2$	-4	-2	-1	1	2	4	0,25
		x	-2	0	1	3	4	6	
		$y = x - 2 - \frac{4}{x-2}$	-3	0	3	-3	0	3	
		KL	tm	tm	tm	tm	tm	tm	0,25
	Vậy: $(x, y) \in \{(-2, -3), (0, 0), (1, 3), (3, -3), (4, 0), (6, 3)\}$								

Bài 4: (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Vẽ BH vuông góc với CM tại H . Đường thẳng đi qua H và vuông góc với DH cắt cạnh BC tại N .

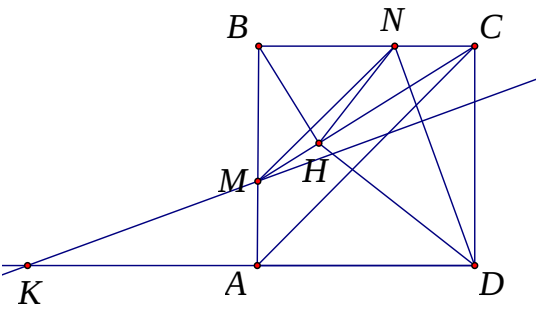
Chứng minh rằng:

a) $BC^2 = CH.CM$

b) $\triangle DHC \sim \triangle NHB$

c) $MN \parallel AC$

d) Khi M thay đổi trên cạnh AB thì đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với DN đi qua một điểm cố định.

Câu	Đáp án	Điểm
4 (6,0đ)		
	a) Xét hai tam giác vuông CHB và CBM có: $\widehat{BCH}$ chung $\Rightarrow \triangle CHB \sim \triangle CBM (g - g)$ $\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CB}{CM} \Rightarrow BC^2 = CH.CM$	1,0 1,0
	b) Ta có $\widehat{DHC} = \widehat{NHB}$ (cùng phụ với $\widehat{NHC}$) $\widehat{DCH} = \widehat{NBH}$ (cùng phụ với $\widehat{BCH}$) $\Rightarrow \triangle DHC \sim \triangle NHB (g - g)$	0,5 0,5 1,0

	c) $\Delta DHC \sim \Delta NHB \Rightarrow \frac{DC}{NB} = \frac{HC}{HB} \Rightarrow \frac{BC}{NB} = \frac{HC}{HB} \quad (1)$	0,25
	Xét hai tam giác vuông CBH và BMH có: $\widehat{BCH} = \widehat{MBH}$ (cùng phụ với $\widehat{HBC}$) $\Rightarrow \Delta CBH \sim \Delta BMH (g - g)$ $\Rightarrow \frac{CB}{BM} = \frac{CH}{HB} \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $NB = BM$. ΔBMN vuông cân tại $B \Rightarrow \widehat{BNM} = 45^\circ$ Mà $\widehat{BCA} = 45^\circ$ nên $MN \parallel AC$.	0,25
	d) Gọi K là giao điểm của đường thẳng kẻ qua M và vuông góc với DN với AD . Vì $NB = MB$ nên $NC = MA \quad (3)$. $\widehat{KMA} = \widehat{KDN}$ (cùng phụ với $\widehat{MKA}$) Mà $\widehat{CND} = \widehat{KDN}$ (vì $BC \parallel AD$) nên $\widehat{CND} = \widehat{KMA} \quad (4)$.	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $\Rightarrow \Delta MAK \sim \Delta NCD (g - c - g)$ $\Rightarrow AK = CD$ không đổi. Suy ra K là điểm cố định.	0,5 0,25

Bài 5: (1,0 điểm) Cho đa giác lồi có 24 cạnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một đường chéo của đa giác lồi không song song với bất kì cạnh nào của đa giác đó.

Câu	Đáp án	Điểm
5 (1,0đ)	5) Giả sử mỗi đường chéo của đa giác lồi 24 cạnh luôn song song với một cạnh nào đó của đa giác. Số đường chéo của đa giác 24 cạnh là: $24(24-3) = 252$.	0,25
	Vì $252 : 24$ dư 10 nên theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 11 đường chéo cùng song song với cạnh $A_i A_{i+1}$ nào đó của đa giác ($1 \leq i \leq 24$)	0,25
	Vì mỗi đường chéo được nối bởi hai đỉnh không kề của đa giác suy ra số đỉnh của đa giác lớn hơn $11.2 + 2 = 24$, trái với giả thiết.	0,25
	Suy ra điều giả sử sai. Vậy đa giác lồi 24 cạnh luôn tồn tại một đường chéo của đa giác lồi không song song với bất kì cạnh nào của đa giác đó.	0,25

Lưu ý:

- Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

-
- Nếu học sinh không vẽ hình hoặc sai hình thì không chấm điểm bài hình.
 - Bài làm không chặt chẽ, không đủ cơ sở ở phần nào thì trừ nửa số điểm ở phần đó.

===== **HẾT** =====